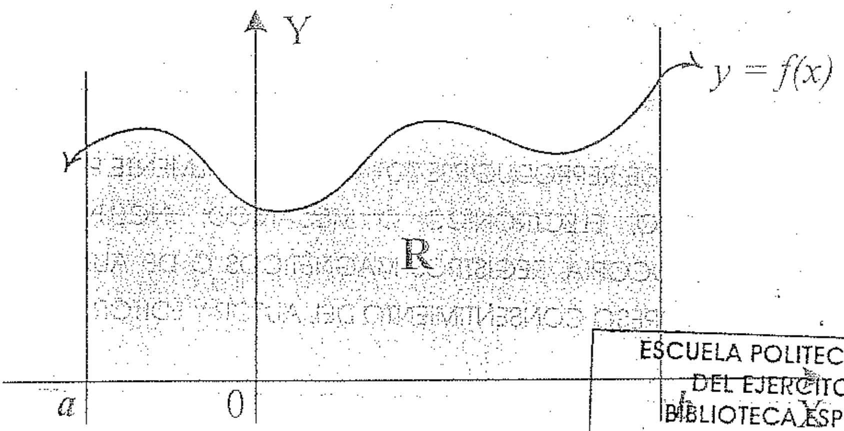
ANÁLISIS MATEMÁTICO II

PARA ESTUDIANTES DE CIENCIA E INGENIERÍA

(QUINTA EDICIÓN)



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\ldots)$$

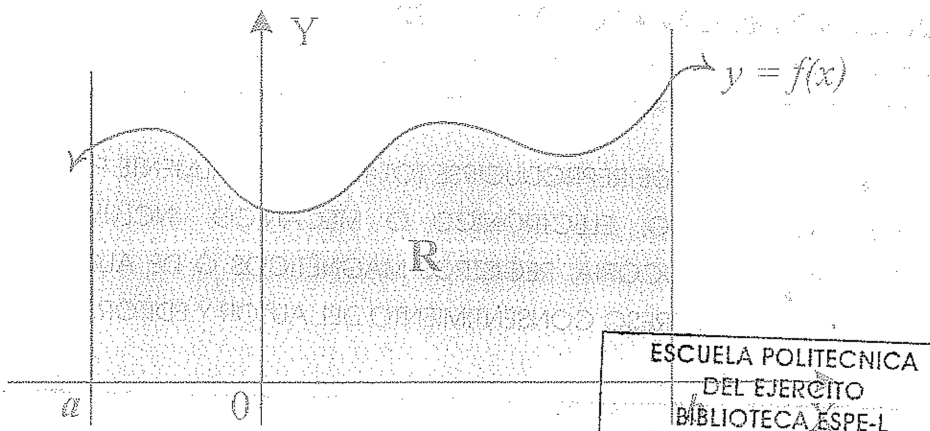
EDUARDO ESPINOZA RAMOS

LIMA – PERÚ

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

PARA ESTUDIANTES DE CIENCIA E INGENIERÍA

(QUINTA EDICIÓN)



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\ldots)$$

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

LIMA – PERÚ

IMPRESO EN EL PERÚ

Fecha de publicación	03 - 01 - 2009
Ejemplares impresos	1000 libros
Número de edición	*5ta EDICIÓN*
Autor	Eduardo Espinoza Ramos

RUC	N° 20520372122
Ley de Derechos del Autor	N° 13714
Registro comercial	N° 10716
Escritura Publica	N° 4484
Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú con el número	N° 2007-12586

PRÓLOGO

En la presente obra Intitulada "Análisis Matemático II para Estudiantes de Ciencia e Ingeniería" en su 4ta. Edición, hemos aprovechado de los numerosos y valiosos comentarios y sugerencias de mis colegas que elaboran en las diversas universidades de la capital, al igual que la 3ra. Edición se expone en forma teórica y práctica, los métodos de integración, integral definida, integración impropia, integración numérica, Ecuaciones Paramétricas, Coordenadas Polares y sus aplicaciones, las funciones Beta y Gamma, los polinomios de Taylor, así mismo se ha incluido en las integrales indefinida las ecuaciones diferenciales sencillas y sus aplicaciones en esta 5ta edición se ha incluido las aplicaciones de la integral indefinida en la Administración y Economía, también se ha incluido las aplicaciones de la integral definida en la administración y economía; se ha hecho la demostración de las propiedades de la integral definida, se ha incluido también más ejercicios desarrollados y propuestos de las prácticas y exámenes de las diversas Universidades de la capital.

La parte teórica se desarrolla de manera metódica y con especial cuidado, tratando de no perder el rigor matemático pero tratando de no caer en el excesivo formulismo que confunde al lector.

La lectura provechosa del presente trabajo requiere del conocimiento previo de las funciones reales de variable real, los límites y continuidad de una función, así como la derivación de las funciones en una variable.

La presente obra es recomendable para estudiante de ciencias matemáticas, física, ingeniería, economía y para toda persona interesada en fundamentar sólidamente sus conocimientos matemáticos del análisis real.

Por último deseo agradecer y expresar mi aprecio a las siguientes personas por sus valiosos comentarios y sugerencias.

- **DOCTOR PEDRO CONTRERAS CHAMORRO**

  Ex-Director de la Escuela Profesional de Matemática Pura de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

  Catedrático Principal en Pos-Grado de la Facultad de Matemática Pura de la UNMSM

  Miembro Fundador de la Academia Nacional de Ciencia y tecnología del Perú.

  Catedrático de la Universidad Particular Ricardo Palma.

- **DOCTOR EUGENIO CABANILLAS LAPA**

  Doctor en matemática Pura, Universidad Federal de Río de Janeiro – Brasil.

  Director de Pos-Grado en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

  Catedrático de la Universidad Nacional del Callao.

- **LIC. ANTONIO CALDERON LEANDRO**

  Ex-Jefe de Departamento Académico de la Facultad de Ing. Pesquera y Alimentos de la Universidad Nacional del Callao.

  Jefe de Departamento Académico de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

  Coordinador del Area de Matemática en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Ricardo Palma.

- **MGS. SERGIO LEYVA HARO**

  ExJefe del Centro de Computo de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao.

  Catedrático en la Facultad de Ingeniería Ambiental y de Recursos Naturales de la Universidad Nacional del Callao.

- **LIC. JUAN BERNUI BARROS**

  Director del Intituto de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

  Catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

- **MGS. PALERMO SOTO SOTO**

  Catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

  Catedrático de la Universidad Particular Ricardo Palma.

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

PRESENTACIÓN

En la presente obra, Eduardo Espinoza Ramos, demuestra que sigue avanzando, no sólo en el aspecto técnico formal de la matemática, si no que, su avance se manifiesta en la selección cuidadosa y esmero en la impresión de esta obra.

Su formación de matemático, como su experiencia en la docencia universitaria, se amalgaman y dan como fruto una obra que marca un camino en su madurez profesional, obra, que seguramente llenará un vacío para quienes no sólo desean "resolver problemas" sino también conocer el lenguaje formal y las ideas de esa hermosa ciencia que es la matemática

DOCTOR PEDRO CONTRERAS CHAMORRO
DIRECTOR DE LA ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA PURA DE LA UNMSM
ASESOR DEL "CONCYTEC"

DEDICATORIA

Este libro lo dedico a mis hijos **RONALD, JORGE** y **DIANA**, que Dios ilumine sus caminos para que puedan ser guías de su prójimo

ÍNDICE

CAPÍTULO I

CAPÍTULO II

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO VII

CAPÍTULO VIII

CAPÍTULO I

1. INTEGRAL INDEFINIDA

1.1 INTRODUCCIÓN.-

El problema básico de la derivación es: Dado el recorrido de un punto móvil, calcular su velocidad o también, dada una curva, calcular su pendiente.

El problema básico de la integración, es el caso inverso de la derivación: dado la velocidad de un punto móvil en cada instante, hallar su trayectoria o también dado la pendiente de una curva en cada uno de sus puntos, calcular la curva.

En el estudio del cálculo diferencial se ha tratado esencialmente: Dada una función hallar su derivada, muchas aplicaciones importantes del cálculo, guardan relación con el problema inverso, es decir:

Dada la derivada de una función, hallar tal función por ejemplo: $f'(x)=4$, $g'(x)=5x^4$. Ahora el problema es hallar $f(x)$ y $g(x)$, pero con un poco de astucia se puede hallar dichas funciones, esto es:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x)=4x \text{ puesto que } f'(x)=4 \\ g(x)=x^5 \text{ puesto que } g'(x)=5x^4 \end{array}}$$

Esta operación de determinar la función original a partir de su derivada es la inversa de la derivación y lo llamaremos cálculo de la función primitiva o antiderivada.

1.2 LA ANTIDERIVADA DE UNA FUNCIÓN.-

DEFINICIÓN.- La función $F: I \to \mathbb{R}$, se llama la antiderivada o primitiva de $f: I \to \mathbb{R}$, sí $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in I$. ($I=[a, b]$)

Ejemplo.- Sea $f(x)=5x^4$ y $g(x)=3e^{3x}$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$, las funciones $F(x)=x^5$ y $G(x)=e^{3x}$ para $x\in\mathbb{R}$ son las antiderivadas de $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente puesto que:

$$\begin{cases} F(x)=x^5 \\ G(x)=e^{3x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'(x)=5x^4=f(x) \\ G'(x)=3e^{3x}=g(x) \end{cases}$$

Sin embargo las funciones $F_1(x)=x^5+7$ y $G_1(x)=e^{3x}+5$ también son antiderivadas de las funciones $f(x)=5x^4$ y $g(x)=3e^{3x}$ respectivamente, puesto que:

$$\begin{cases} F_1(x)=x^5+7 \\ G_1(x)=e^{3x}+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1'(x)=5x^4=f(x) \\ G_1'(x)=3e^{3x}=g(x) \end{cases}$$

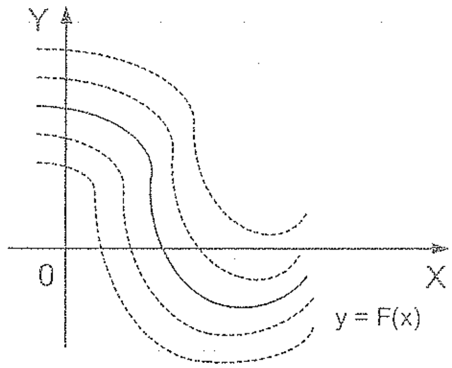
análogamente, otras antiderivadas de $f(x)$ y $g(x)$ son por ejemplo: $F_2(x)=x^5-4$, $F_3(x)=x^5+4\pi$, $F_4(x)=x^5+a$, $G_2(x)=e^{3x}-7$, $G_3(x)=e^{3x}-e^{\pi}$, $G_4=e^{3x}+b$ donde a y b son constantes cualquiera, puesto que sus derivadas son iguales a $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente.

En general, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ es decir que $F'(x)=f(x)$, por lo tanto $F(x)+c$, también es una antiderivada de $f(x)$ para cualquier constante c, puesto que su derivada es igual a la función $f(x)$, es decir: $(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$.

1.3 LA ANTIDERIVADA GENERAL.-

DEFINICIÓN.- Si la antiderivada de $f(x)$ es $F(x)$ sobre I. Entonces la función $G(x)=F(x)+c$, se denomina la antiderivada general de $f(x)$.

El significado geométrico de la antiderivada $F(x)$ de $f(x)$, es que cualquier otra antiderivada de $f(x)$ es una curva paralela al gráfico de $y=F(x)$.



OBSERVACIÓN.- Resulta claro que el cálculo de antiderivadas o primitivas no determina una única función, si no una familia de funciones, que difieren entre sí en una constante.

El proceso del cálculo de antiderivadas o primitivas se suele denominar integración y se denota por el símbolo $\int$, llamado signo de integración, el símbolo $\int f(x)dx$ se llama integral indefinida de $f(x)$.

1.4 LA INTEGRAL INDEFINIDA.-

DEFINICIÓN 1.- Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ sobre un intervalo I, o sea $F'(x) = f(x)$, entonces a su antiderivada general $G(x) = F(x) + c$ se denota por:

$$\boxed{G(x) = \int f(x)dx = F(x) + c,\ \forall x \in I}$$

Al cual le llamaremos la integral indefinida de $f(x)$.

NOTA.- De la definición de la integral indefinida se tiene: $G'(x) = F'(x) = f(x)$ es decir:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)}$$

PROPIEDADES.-

De la definición de integral indefinida se tienen las siguientes propiedades:

1. $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$ o sea que "La derivada de la integral indefinida es igual al integrando" es decir:

$$\boxed{\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)}$$

2. $d\left(\int f(x)dx\right)=\left(\int f(x)dx\right)'dx=f(x)dx$ o sea que "La diferencial de la integral indefinida es igual a la función integrado por la diferencial de x, es decir:

$$\boxed{d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx}$$

3. Si f es una función derivable en I, entonces una antiderivada de f' es f y

$$\boxed{\int f'(x)dx=f(x)+c}$$

4. Se conoce que $d(f(x))=f'(x)dx$, luego de la propiedad (3) se obtiene:

$$\boxed{\int d(f(x))=f(x)+c}$$

OBSERVACIÓN.- De las propiedades (2) y (3), a la integral indefinida también podemos interpretarla como una operación inversa de la diferenciación, puesto que la integral indefinida al actuar en la diferencial $d(f(x))$ reproduce la función $f(x)$ más la constante de integración.

Ejemplo.- Con las propiedades de la integral indefinida, se tiene, que por simple inspección:

1) $\int(x^2+3x+2)dx=\int d(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+c$

2) $$\int e^{4x}dx = \int d\left(\frac{e^{4x}}{4}\right) = \frac{e^{4x}}{4} + c$$

3) $$\int (\cos 3x - \operatorname{sen} 4x)\,dx = \int d\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\cos 4x}{4}\right) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\cos 4x}{4} + c$$

4) $$\int x^n dx = \int d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\,,\ n \neq -1$$

DEFINICIÓN 2.- En toda integral indefinida $\int f(x)dx$, a la función $f(x)$ le llamamos función integrando y a la variable x le llamaremos variable de integración, la constante c es llamada constante de integración, a $\int f(x)dx$ también se lee "integral indefinida de $f(x)$ diferencial de x"

NOTA.- Sugerimos al lector el dominio de las fórmulas básicas de integración, de tal manera que, el estudio de las técnicas de integración sea amena y ágil, para tal efecto hemos agrupado en cuatro partes las fórmulas básicas.

1.5 FÓRMULAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN.-

1.5.1 PRIMERAS FÓRMULAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN.-

Sean f, g funciones derivables, k y c son constantes, entonces:

1. $\int dx = x + c$
2. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
3. $\int d(f(x)) = f(x) + c$
4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\,,\ n \neq -1$
5. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Sea $u = f(x)$, una función diferenciable en x

6. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c\,,\ n \neq -1$
7. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

(8) $\int e^u du = e^u + c$

(9) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c\ ,\ a > 0,\ a \neq 1$

(10) $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(\frac{u}{a}) + c$

(11) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$

(12) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + c$

Ejemplos de aplicación de estas fórmulas.

Calcular las siguientes integrales.

(1) $\int x(a - bx^2)dx$

<u>**Desarrollo**</u>

Como $x(a - bx^2) = ax - bx^3$, entonces:

$$\int x(a - bx^2)dx = \int (ax - bx^3)dx = a\int x dx - b\int x^3 dx = \frac{ax^2}{2} - \frac{bx^4}{4} + c$$

(2) $\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}} dx$

<u>**Desarrollo**</u>

A la función, se expresa en la forma:

$$\frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}} = \frac{x^{2m} - 2x^{m+n} + x^{2n}}{\sqrt{x}} = x^{2m-\frac{1}{2}} - 2x^{m+n-\frac{1}{2}} + x^{2n-\frac{1}{2}} = x^{\frac{4m-1}{2}} - 2x^{\frac{2m+2n-1}{2}} + x^{\frac{4n-1}{2}}$$

entonces: $\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{4m-1}{2}} - 2x^{\frac{2m+2n-1}{2}} + x^{\frac{4n-1}{2}})dx$

$$= \frac{x^{\frac{4m+1}{2}}}{\frac{4m+1}{2}} - \frac{2x^{\frac{2m+2n+1}{2}}}{\frac{2m+2n+1}{2}} + \frac{x^{\frac{4n+1}{2}}}{\frac{4n+1}{2}} + c$$

$$= \frac{2\sqrt{x^{4m+1}}}{4m+1} - \frac{4\sqrt{x^{2m+2n+1}}}{2m+2n+1} + \frac{2\sqrt{x^{4n+1}}}{4n+1} + c$$

③ $\int (x - \sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)dx$

Desarrollo

Efectuando la multiplicación de $(x - \sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)$, es decir:

$(x - \sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 1) = x^{\frac{3}{2}} + 1$, entonces se tiene:

$$\int (x - \sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 1)dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + x + c$$

④ $\int \frac{g(x).f'(x) - g'(x).f(x)}{g^2(x)} dx$

Desarrollo

Se sabe que la diferencial de un cociente es: $d(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2} dx$

Ahora reemplazando en la integral dada se tiene:

$$\int \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2} dx = \int d(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{f(x)}{g(x)} + c$$

⑤ $\int \frac{3 + \ln x}{x} dx$

Desarrollo

A la integral escribiremos en la forma:

$$\int \frac{3 + \ln x}{x} dx = 3\int \frac{dx}{x} + \int \ln x \frac{dx}{x} = 3\ln|x| + \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

(6) $\int \frac{dx}{x^2-4x+13}$

Desarrollo

Cuando en el denominador se tiene una expresión cuadrática, en éste caso, se completa cuadrados:

$$x^2-4x+13=(x^2-4x+4)+9=(x-2)^2+9$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+13}=\int \frac{dx}{(x-2)^2+9}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(\frac{x-2}{3})+c$$

(7) $\int \frac{x+1}{x^2+2x}dx$

Desarrollo

Cuando se observa que el diferencial del denominador se encuentra en el numerador o su diferencia esté en un factor de proporcionalidad, en éste caso se aplica la fórmula (7) es decir:

Sea $u=x^2+2x \Rightarrow du=2(x+1)dx$, de donde, ahora reemplazando en la integral:

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x}dx=\int \frac{du}{2u}=\frac{1}{2}\ln|u|+c=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x|+c$$

(8) $\int \frac{x^3dx}{1+x^4}$

Desarrollo

En forma similar al ejercicio (7) se tiene:

Sea $u=1+x^4 \Rightarrow du=4x^3dx \Rightarrow x^3dx=\frac{du}{4}$

Ahora reemplazando en la integral: $\int \frac{x^3dx}{1+x^4}=\int \frac{du}{4u}=\frac{1}{4}\ln|u|+c=\frac{1}{4}\ln|1+x^4|+c$

9. $\int (ax+b)^{\frac{3}{2}}\,dx$

Desarrollo

En éste ejercicio se aplicará la fórmula (6) es decir:

Sea: $u = ax+b \Rightarrow du = adx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{a}$

Ahora reemplazando en la integral dada:

$$\int (ax+b)^{\frac{3}{2}}\,dx = \int u^{\frac{3}{2}}\frac{du}{a} = \frac{1}{a}.\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5a}(ax+b)^{\frac{5}{2}} + c$$

10. $\int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}\,dx$

Desarrollo

A la integral dada lo escribiremos en la forma:

$$\int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}\,dx = \int (a+bx^n)^{\frac{1}{2}}x^{n-1}\,dx \qquad \ldots (1)$$

Ahora aplicando la fórmula (6), es decir:

Sea $u = a+bx^n \Rightarrow du = bnx^{n-1}dx$ de donde $x^{n-1}dx = \dfrac{du}{bn}$ $\qquad \ldots (2)$

Luego reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}\,dx = \int u^{\frac{1}{2}}\frac{du}{bn} = \frac{2}{3bn}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2(a+bx^n)^{\frac{3}{2}}}{3bn} + c$$

11. $\int \dfrac{\ln(\ln x)}{x\ln x}\,dx$

Desarrollo

En ésta integral aplicamos la fórmula (6), es decir:

Sea $u=\ln(\ln(x)) \Rightarrow du=\dfrac{dx}{x\ln x}$, ahora reemplazando en la integral se tiene:

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx=\int \ln(\ln x)\frac{dx}{x\ln x}=\int u\,du=\frac{u^2}{2}+c=\frac{\ln^2(\ln(x))}{2}+c$$

(12) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}$

Desarrollo

A la expresión, agrupemos en la forma:

$$\sqrt{1+x^2+(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{(1+x^2)+(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\sqrt{(1+x^2)(1+\sqrt{1+x^2})}=\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}=\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=\int (1+\sqrt{1+x^2})^{-\frac{1}{2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \ldots (1)$$

Ahora aplicamos la fórmula (6), es decir:

$$\text{Sea } u=1+\sqrt{1+x^2} \Rightarrow du=\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}=\int u^{-\frac{1}{2}}du=2u^{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+c$$

(13) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x\sqrt{x}}$

Desarrollo

En el presente ejercicio aplicaremos la fórmula (7); es decir:

Sea $u = 1 + x\sqrt{x}$, de donde $du = \frac{3}{2}\sqrt{x}\ dx$ entonces $\sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}du$

Ahora reemplazamos en la integral dada, se tiene:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{2}{3}\ln|u| + c = \frac{2}{3}\ln\left|1+x\sqrt{x}\right| + c$$

(14) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(x^2+1)+1}{1+x^2}dx$

Desarrollo

En primer lugar aplicamos la propiedad (7) es decir:

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(x^2+1)+1}{1+x^2}dx = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx + \int \ln(x^2+1)\frac{xdx}{1+x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2}$$

Ahora aplicamos las fórmulas (6), (8) y (10), es decir:

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(x^2+1)+1}{1+x^2}dx = e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{\ln^2(x^2+1)}{4} + \operatorname{arctg} x + c$$

(15) $\int \frac{x^2+3}{x^2(x^2+9)}dx$

Desarrollo

En los ejemplos anteriores, para el cálculo de las integrales, lo que sé hacia era expresar en una forma de tal manera que, se pueda utilizar las propiedades básicas de integración en forma directa, pero ciertas funciones no es tan fáciles de expresar en forma directa. esto depende de la práctica que se tenga y de la habilidad de la que está calculando: tal es el caso del presente ejercicio, es decir, en el cálculo de la integral. se hace de la siguiente manera.

$x^2 + 3 = x^2 + \frac{1}{3}(x^2 + 9 - x^2) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}(x^2+9)$, reemplazando en la integral tenemos:

$$\int \frac{x^2+3}{x^2(x^2+9)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{2x^2+(x^2+9)}{x^2(x^2+9)}dx = \frac{1}{3}\int\left[\frac{2x^2}{x^2(x^2+9)} + \frac{x^2+9}{x^2(x^2+9)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\int\frac{2dx}{x^2+9}+\int\frac{dx}{x^2}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}-\frac{1}{x}\right]+c$$

(16) $\int\frac{dx}{x(x^7+1)}$

Desarrollo

En forma similar al caso anterior, el numerador expresamos en la forma:

$1=(x^7+1)-x^7$, ahora reemplazamos en la integral dada:

$$\int\frac{dx}{x(x^7+1)}=\int\frac{(x^7+1)-x^7}{x(x^7+1)}dx=\int\frac{\cancel{x^7+1}}{x(\cancel{x^7+1})}dx-\int\frac{x^7\,dx}{x(x^7+1)}$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x^6\,dx}{x^7+1} \qquad \text{(aplicando la fórmula 7)}$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{7}\ln|x^7+1|+c$$

(17) $\int\frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x-6\operatorname{sen}x+5}$

Desarrollo

$$\int\frac{\cos x\;dx}{\operatorname{sen}^2 x-6\operatorname{sen}x+5}=\int\frac{\cos x\;dx}{\left(\operatorname{sen}^2 x-6\operatorname{sen}x+9\right)-4}=\int\frac{\cos x\;dx}{(\operatorname{sen}x-3)^2-4}$$

Sea $z=senx-3\Rightarrow dz=\cos x dx$

$$\int\frac{\cos x\;dx}{\operatorname{sen}^2 x-6\operatorname{sen}x+5}=\int\frac{dz}{z^2-4}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}x-5}{\operatorname{sen}x-1}\right|+c$$

1.5.2 SEGUNDAS FÓRMULAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN.-

En éstas fórmulas básicas van a considerarse los casos en que él integrando es una raíz cuadrada de una expresión cuadrática.

Sea $u=f(x)$ una función diferenciable en x, entonces:

① $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + c$

② $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c$

③ $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c$

④ $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\,arcsen\left(\frac{u}{a}\right) + c$

⑤ $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c$

⑥ $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c$

⑦ $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\,arc\sec(\frac{|u|}{a}) + c\,, \quad a > 0$

NOTA.- Las integrales de este tipo se calculan completando cuadrados.

Ejemplos de aplicación de estas fórmulas.

Calcular las siguientes integrales.

① $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-6x-6}}$

Desarrollo

En la expresión completamos cuadrados: $-x^2-6x-6 = 3-(x^2+6+9) = 3-(x+3)^2$

Ahora reemplazando en la integral y aplicando la fórmula (1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-6x-6}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3-(x+3)^2}} = arcsen(\frac{x+3}{\sqrt{3}}) + c$$

② $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

Desarrollo

Completando cuadrados en el denominador: $5-2x+x^2 = x^2-2x+1+4 = (x-1)^2+4$

Ahora reemplazando en la integral y aplicando la fórmula (2)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}} = \ln\left|x-1+\sqrt{5-2x+x^2}\right|+c$$

③ $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

Desarrollo

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int \frac{\frac{dx}{x}}{\sqrt{1-\ln^2 x}} \qquad \ldots (1)$$

Sea $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{dx}{x}$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen}(u)+c = \operatorname{arcsen}(\ln x)+c$$

④ $\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^4 x}}\,dx$

Desarrollo

A la integral dada escribiremos así:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^4 x}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{2-(\operatorname{sen}^2 x)^2}}\,dx \qquad \ldots (1)$$

Sea $u=\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow du = 2\operatorname{sen} x\cos x\,dx$ ... (2)

Ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^4 x}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{2-u^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{u}{\sqrt{2}}) + c = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{2}}) + c$$

(5) $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx$

Desarrollo

Completando cuadrados: $x^2-2x-1=(x-1)^2-2$

Reemplazando y aplicando la fórmula (5) se tiene:

$$\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx = \int \sqrt{(x-1)^2-2}\,dx$$

$$= \frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-1} - \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right| + c$$

(6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$

Desarrollo

Completando cuadrados: $2ax-x^2 = a^2-(x-a)^2$

Ahora reemplazando y aplicando la fórmula (1).

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} = \operatorname{arcsen}(\frac{x-a}{a}) + c$$

(7) $\int \frac{(8x-3)\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$

Desarrollo

Cuando se tiene éste tipo de integrales, en el numerador se pone el diferencial de la cantidad subradical, luego se resta ó suma una cantidad de tal manera que, resulte la misma expresión, es decir: $d(12x-4x^2-5)=(12-8x)\,dx$

$$\int\frac{(8x-3)\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}=-\int\frac{(12-8x-9)\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}=-\left[\int\frac{(12-8x)\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}-9\int\frac{dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}\right]$$

$$=-2\sqrt{12x-4x^2-5}+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-\frac{3}{2})^2}}$$

$$=-2\sqrt{12x-4x^2-5}+\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{2x-3}{2})+c$$

8. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$

Desarrollo

A la expresión, separamos y simplificamos

$$\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}=\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{(2+x^2)(2-x^2)}}=\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2+x^2}\sqrt{2-x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2+x^2}\sqrt{2-x^2}}-\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2+x^2}\sqrt{2-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$$

Ahora reemplazamos en la integral dada se tiene:

$$\int\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx=\int[\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}]dx=\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}-\int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$$

$$=\operatorname{arcsen}(\frac{x}{\sqrt{2}})-\ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right|+c$$

9. $\displaystyle\int\frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$

Desarrollo

Al integrando se divide, numerador y denominador entre x^2

$$\int\frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}=\int\frac{\frac{x^2-1}{x^2}dx}{\frac{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}{x^2}}=\int\frac{(1-\frac{1}{x^2})dx}{(x+\frac{1}{x})\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}$$

Ahora hacemos la sustitución: $u=x+\frac{1}{x} \Rightarrow du=(1-\frac{1}{x^2})dx$

$$u=x+\frac{1}{x} \Rightarrow u^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2$$

enseguida reemplazamos en la integral

$$\int\frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}=\int\frac{du}{u\sqrt{u^2-2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}arc\sec\frac{|u|}{\sqrt{2}}+c=\frac{1}{\sqrt{2}}arc\sec(\frac{x^2+1}{\sqrt{2}|x|})+c$$

10. $\displaystyle\int\frac{x^2+17}{\sqrt{x^2+9}}dx$

Desarrollo

$$\int\frac{x^2+17}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int\frac{(x^2+9)+8}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int\frac{x^2+9}{\sqrt{x^2+9}}dx+8\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$=\int\sqrt{x^2+9}\,dx+8\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+9}+25\ln|x+\sqrt{x^2+9}|\right]+c$$

1.5.3 TERCERAS FÓRMULAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN.-

En estas fórmulas básicas vamos a considerar a las funciones trigonométricas, para esto tenemos una función $u=f(x)$ diferenciable en x, entonces:

1. $\int \text{sen}\,u.du=-\cos u+c$	2. $\int \cos u.du=\text{sen}\,u+c$

③ $\int \operatorname{tg} u.du = -\ln|\cos u| + c$

④ $\int c\operatorname{tg} u.du = \ln|\operatorname{sen} u| + c$

⑤ $\int \sec u.du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + c = \ln\left|\operatorname{tg}(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + c$

⑥ $\int \cos ec\, u.du = \ln|\cos ec\, u - c\operatorname{tg} u| + c = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + c$

⑦ $\int \sec^2 u.du = \operatorname{tg} u + c$

⑧ $\int \cos ec^2 u.du = -c\operatorname{tg} u + c$

⑨ $\int \sec u.\operatorname{tg} u.du = \sec u + c$

⑩ $\int \cos ec\, u.c\operatorname{tg} u.du = -\cos ec\, u + c$

Ejemplos de aplicación de estas fórmulas básicas:

Calcular las siguientes integrales.

① $\int \operatorname{sen}(x^2 - 4x + 5)(x-2)\, dx$

Desarrollo

Sea $u = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow du = 2(x-2)dx \Rightarrow (x-2) = \frac{du}{2}$, reemplazando en la integral

$$\int \operatorname{sen}(x^2 - 4x + 5)(x-2)\, dx = \int \operatorname{sen} u \frac{du}{2} = -\frac{\cos u}{2} + c = -\frac{\cos(x^2 - 4x + 5)}{2} + c$$

② $\int \cos(\operatorname{sen} x + x^2)(2x + \cos x)\, dx$

Desarrollo

Sea $u = \operatorname{sen} x + x^2 \Rightarrow du = (2x + \cos x)dx$, reemplazando en la integral dada

$$\int \cos(\operatorname{sen} x + x^2)(2x + \cos x)\, dx = \int \cos u.du = \operatorname{sen} u + c = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x + x^2) + c$$

③ $\int \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{x^2+4})x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

Desarrollo

Sea $u=\sqrt{x^2+4} \Rightarrow du=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$, reemplazando en la integral dada:

$$\int \operatorname{tg}(\sqrt{x^2+4})\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}=\int \operatorname{tg} u.du=\ln|\sec u|+c=\ln\left|\sec(\sqrt{x^2+4})\right|+c$$

④ $\int c\operatorname{tg}(\ln x)\frac{dx}{x}$

Desarrollo

Sea $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{dx}{x}$, reemplazando en la integral dada:

$$\int c\operatorname{tg}(\ln x)\frac{dx}{x}=\int c\operatorname{tg} u.du=\ln|\operatorname{sen} u|+c=\ln|\operatorname{sen}(\ln x)|+c$$

⑤ $\int \sec(3x+5)\,dx$

Desarrollo

Sea $u=3x+5 \Rightarrow du=3dx \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$, reemplazando en la integral dada:

$$\int \sec(3x+5)\,dx=\int \sec u\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\ln|\sec u+\operatorname{tg} u|+c=\frac{1}{3}\ln|\sec(3x+5)+\operatorname{tg}(3x+5)|+c$$

⑥ $\int \sec^2(\operatorname{sen}\sqrt{x}+x)(\frac{2\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}})dx$

Desarrollo

Sea $u=\operatorname{sen}\sqrt{x}+x \Rightarrow du=\frac{2\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$, reemplazando en la integral dada:

$$\int \sec(\operatorname{sen}\sqrt{x}+x)\left(\frac{2\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)dx = \int \sec^2 u.du = \operatorname{tg} u + c = \operatorname{tg}(\operatorname{sen}\sqrt{x}+x)+c$$

⑦ $\int \sec(\sqrt{\operatorname{sen} x})\operatorname{tg}(\sqrt{\operatorname{sen} x})\sqrt{c\operatorname{tg} x}\sqrt{\cos x}\,dx$

Desarrollo

Sea $u = \sqrt{\operatorname{sen} x} \Rightarrow du = \dfrac{\cos x dx}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \Rightarrow du = \dfrac{\sqrt{c\operatorname{tg} x}\sqrt{\cos x}}{2}dx$

De donde, reemplazando en la integral se tiene:

$$\int \sec(\sqrt{\operatorname{sen} x})\operatorname{tg}(\sqrt{\operatorname{sen} x})\sqrt{c\operatorname{tg} x}\sqrt{\cos x}\,dx = 2\int \sec u.\operatorname{tg} u.du = 2\sec u + c$$

$$= 2\sec(\sqrt{\operatorname{sen} x}) + c$$

⑧ $\int \sqrt{1+\cos 8x}\,dx$

Desarrollo

Se conoce que: $\cos^2 4x = \dfrac{1+\cos 8x}{2} \Rightarrow 1+\cos 8x = 2\cos^2 4x$, reemplazando en la integral dada:

$$\int \sqrt{1+\cos 8x}\,dx = \int \sqrt{2\cos^2 4x}\,dx = \sqrt{2}\int \cos 4x.dx = \frac{\sqrt{2}\operatorname{sen} 4x}{4} + c$$

1.5.4 CUARTAS FÓRMULAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN.-

En estas fórmulas básicas vamos a considerar a las funciones hiperbólicas, para esto consideramos una función $u = f(x)$ diferenciable en x, entonces:

① $\int \operatorname{senh} u.du = \cosh u + c$

② $\int \cosh u.du = \operatorname{senh} u + c$

③ $\int \operatorname{tgh} u.du = \ln|\cosh u| + c$

④ $\int c\operatorname{tgh} u.du = \ln|\operatorname{senh} u| + c$

(5) $\int \operatorname{sech}^2 u.du = \operatorname{tgh} u + c$	(6) $\int \operatorname{cosech}^2 u.du = -c\operatorname{tgh} u + c$
(7) $\int \sec h\ u.\operatorname{tgh} u.du = -\sec hu + c$	(8) $\int \operatorname{cosech} u.c\operatorname{tgh} u.du = -\operatorname{cosech} u + c$

Ejemplos de aplicación de estas fórmulas básicas.

Calcular las siguiente integrales.

(1) $\int \operatorname{sech} x.dx$

Desarrollo

Como $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}$

Hacer: $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$, reemplazando en la integral dada:

$$\int \operatorname{sech} x dx = 2\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = 2\int \frac{du}{u^2+1} = 2\operatorname{arctg}(u) + c = 2\operatorname{arctg}\left(e^x\right) + c$$

(2) $\int (3\operatorname{senh} 7x - 8\cosh 7x)\,dx$

Desarrollo

$$\int (3\operatorname{senh} 7x - 8\cosh 7x)\,dx = 3\int \operatorname{senh} 7x dx - 8\int \cosh 7x.dx = \frac{3\cosh 7x}{7} - \frac{8\operatorname{sen} 7x}{7} + c$$

(3) $\int 5^{\operatorname{tgh} x}.\sec h^2 x.dx$

Solución

Sea $u = \operatorname{tgh} x \Rightarrow du = \operatorname{sech}^2 x\ dx$, reemplazando en la integral dada, y por la fórmula (9) de la primera parte se tiene:

$$\int 5^{\operatorname{tgh} x}.\sec h^2 x\ dx = \int 5^u\,du = \frac{5^u}{\ln 5} + c = \frac{5^{\operatorname{tgh} x}}{\ln 5} + c$$

(4) $\int \cosh^2 x.dx$

Solución

$\cosh^2 x = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2)$, reemplazando en la integral dada:

$$\int \cosh^2 x.dx = \frac{1}{4}\int (e^{2x} + e^{-2x} + 2)dx = \frac{1}{4}[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} + 2x] + c$$

$$= \frac{1}{4}(\operatorname{senh} 2x + 2x) + c = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x + \frac{x}{2} + c$$

(5) $\int \operatorname{senh}^4 x.\cosh x.dx$

Solución

$$\int \operatorname{senh}^4 x \cosh x.dx = \int (\operatorname{senh} x)^4 \cosh x.dx = \frac{\operatorname{senh}^5 x}{5} + c$$

(6) $\int e^x.\cosh(e^x)\operatorname{senh}(e^x)dx$

Solución

$$\int e^x \cosh(e^x)\operatorname{senh}(e^x)dx = \int \underbrace{\operatorname{senh}(e^x)}_{u}.\underbrace{\cosh(e^x).e^x dx}_{du} = \frac{\operatorname{senh}^2 e^x}{2} + c$$

(7) $\int \operatorname{senh}(\sqrt{x})\frac{dx}{\sqrt{x}}$

Solución

$$\int \operatorname{senh}(\sqrt{x})\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int \operatorname{senh}(\sqrt{x})d(\sqrt{x}) = 2\cosh(\sqrt{x}) + c$$

(8) $\int x\operatorname{sech}^2 x^2 dx$

Solución

$$\int x\operatorname{sech}^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sech}^2 x^2 .2x.dx = \frac{1}{2}\operatorname{tgh} x^2 + c$$

OBSERVACIÓN.- En ciertos casos es preferible elegir un cambio de variable en la forma más adecuada a fin que la integración sea fácil de resolver y este caso lo veremos con el nombre de integración por sustitución o cambio de variable.

1.5.5. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE.-

TEOREMA.- Si $x = \phi(t)$ es una función diferenciable entonces:

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\phi(t)).\phi'(t)dt}$$

<u>**Demostración**</u>

Sea $F(x) = \int f(x)dx$ y definimos $G(t) = F(\phi(t))$ ... (1)

Probaremos que $G(t)$ es la integral indefinida de la función $f(\phi(t)).\phi'(t)$, esto es que se cumple:

$$\frac{dG(t)}{dt} = f(\phi(t)).\phi'(t) \quad \text{... (2)}$$

Lo que es equivalente $\quad G(t) = \int f(\phi(t)).\phi'(t)dt$ ... (3)

En efecto se tiene: $\quad \dfrac{dG(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}F(\phi(t)) = \dfrac{d}{dt}F(x), \ x = \phi(t)$

$$= \frac{dF(x)}{dx}.\frac{dx}{dt} \quad \text{(regla de la cadena)}$$

$$= f(x).\phi'(t) \quad \text{pues} \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$$= f(\phi(t)).\phi'(t) \quad \text{(lo cual demuestra 2)}$$

Se concluye que:

Si $x=\phi(t)$ entonces $\int f(x)dx = F(x) = F(\phi(t)) = G(t) = \int f(\phi(t)).\phi'(t)\,dt$

◈ ◈ ◈

Ejemplos.- Calcular las siguientes integrales.

① $\int x\sqrt[3]{x-2}\;dx$

Solución

Sea $t=x-2 \Rightarrow x=t+2 \Rightarrow dx=dt$, reemplazando en la integral:

$$\int x\sqrt[3]{x-2}\;dx = \int (t+2)\sqrt[3]{t}\;dt = \int (t^{\frac{4}{3}}+2t^{\frac{1}{3}})dt$$

$$= \frac{3}{7}t^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{2}t^{\frac{4}{3}}+c = \frac{3}{7}(x-2)^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{2}(x-2)^{\frac{4}{3}}+c$$

② $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Solución

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x^2 x\;dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \ldots (1)$$

Sea $t=1-x^2 \Rightarrow x^2=1-t \Rightarrow x\,dx=-\frac{dt}{2}$, reemplazando en (1)

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x^2 x\;dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1-t}{\sqrt{t}}(-\frac{dt}{2}) = \frac{1}{2}\int (t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})dt = \frac{1}{2}[\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}-2t^{\frac{1}{2}}]+c$$

$$= \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}+c = t^{\frac{1}{2}}(\frac{t}{3}-1)+c = \frac{\sqrt{t}\,(t-3)}{3}+c = \sqrt{1-x^2}\,(\frac{1-x^2-3}{3})+c$$

$$= -\frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}+c$$

③ $\int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx$

Solución

$$\int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx=\int (x^2)^2\sqrt{1-x^2}\,x\ dx \qquad \ldots (1)$$

Sea $t=1-x^2 \Rightarrow x^2=1-t \Rightarrow x\,dx=-\frac{dt}{2}$, reemplazando en (1)

$$\int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx=\int (x^2)^2\sqrt{1-x^2}\,x\ dx=\int (1-t)^2\sqrt{t}(-\frac{dt}{2})$$

$$=\int (1-2t+t^2)\sqrt{t}(-\frac{dt}{2})=\frac{1}{2}\int (2t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{5}{2}})dt$$

$$=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{7}t^{\frac{7}{2}}+c=\frac{2}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{7}(1-x^2)^{\frac{7}{2}}+c$$

④ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3-1}}$

Solución

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3-1}}=\int \frac{x^2dx}{x^3\sqrt{x^3-1}} \qquad \ldots (1)$$

Sea $t^2=x^3-1 \Rightarrow x^3=1+t^2 \Rightarrow x^2dx=\frac{2t\ dt}{3}$, reemplazando en (1)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3-1}}=\int \frac{x^2dx}{x^3\sqrt{x^3-1}}=\int \frac{2t\ dt}{3(1+t^2)\sqrt{t^2}}$$

$$=\frac{2}{3}\int \frac{dt}{1+t^2}=\frac{2}{3}\operatorname{arctg} t+c=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\sqrt{x^3-1})+c$$

⑤ $\int \frac{x^4dx}{\sqrt[7]{x^5+1}}$

Solución

Sea $t = x^5 + 1 \Rightarrow x^4 dx = \frac{dt}{5}$, reemplazando en la integral dada:

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt[7]{x^5+1}} = \int \frac{dt}{5\sqrt[7]{t}} = \frac{1}{5}\int t^{-\frac{1}{7}} dt = \frac{7t^{\frac{6}{7}}}{30} + c = \frac{7}{30}(x^5+1)^{\frac{6}{7}} + c$$

⑥ $\int \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos(5\sqrt{x}+4)}}}\,.x^{-\frac{1}{2}} dx$

Solución

Por la identidad: $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$, de donde: $1+\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$

$$\sqrt{2+2\cos(5\sqrt{x}+4)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos(5\sqrt{x}+4)} = \sqrt{2}\sqrt{2}\cos\frac{5\sqrt{x}+4}{2} = 2\cos(\frac{5\sqrt{x}+4}{2})$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos(5\sqrt{x}+4)}} = \sqrt{2+2\cos\frac{5\sqrt{x}+4}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\frac{5\sqrt{x}+4}{2}}$$

$$= \sqrt{2}.\sqrt{2}\cos\frac{5\sqrt{x}+4}{4} = 2\cos\frac{5\sqrt{x}+4}{4}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos(5\sqrt{x}+4)}}} = \sqrt{2+2\cos\frac{5\sqrt{x}+4}{4}} = \sqrt{2}.\sqrt{1+\cos\frac{5\sqrt{x}+4}{4}}$$

$$= \sqrt{2}.\sqrt{2}\cos\frac{5\sqrt{x}+4}{8} = 2\cos\frac{5\sqrt{x}+4}{8}$$

Ahora reemplazamos en la integral dada

$$\int \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos(5\sqrt{x}+4)}}}\,.x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\int \cos\frac{5\sqrt{x}+4}{8}.x^{-1} dx$$

$$z = \frac{5\sqrt{x}+4}{8} \Rightarrow \frac{8}{5}dz = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{16}{5} dz$$

$$\int \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos(5\sqrt{x}+4)}}}\, x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\int \cos z \frac{16}{5} dz = \frac{32}{5}\operatorname{sen} z + c$$

$$= \frac{32}{5}\operatorname{sen}\frac{5\sqrt{x}+4}{8} + c$$

1.5.6. INTEGRALES DE FUNCIONES QUE CONTIENEN UN TRINOMIO CUADRADO.-

Se trata de las integrales de la forma siguiente:

(1) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$	(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$
(3) $\int \frac{(ax+b)}{cx^2+dx+e} dx$	(4) $\int \frac{(ax+b)dx}{\sqrt{cx^2+dx+e}}$

Las integrales de la forma (1) y (2) se calculan completando cuadrado en el trinomio y aplicando 11 y 12 de la 1ra. fórmulas básicas 1, 2 y 3 de la 2da. fórmulas básicas es decir:

$$ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{b}{a}x)+c = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2})+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$= a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a} = a[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ax-b^2}{4a^2}]$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}$$

Luego aplicar las fórmulas indicadas para las integrales de la forma (3) y (4), primero se calcula la derivada del trinomio cuadrado $2ax+b$.

Luego se acomoda en la expresión $ax+b$ en la siguiente forma:

$ax+b=\frac{a}{2c}[2cx+d]-\frac{ad}{2c}+b$, como se observa que la expresión $2cx+d$ es la derivada del trinomio cuadrado, luego reemplazamos en cada una de las integrales.

$$\int\frac{(ax+b)\,dx}{cx^2+dx+e}=\frac{a}{2c}\int\frac{(2cx+d)}{cx^2+dx+e}dx+(b-\frac{ad}{2c})\int\frac{dx}{cx^2+dx+e}$$

aquí se aplica la propiedad (7) de las 1ra fórmulas básicas y la integral de la forma (1).

En forma similar para la otra integral

$$\int\frac{(ax+b)\,dx}{\sqrt{cx^2+dx+e}}=\frac{2}{2c}\int\frac{2cx+d}{\sqrt{cx^2+dx+e}}+(b-\frac{ad}{2c})\int\frac{dx}{\sqrt{cx^2+dx+e}}$$

aquí se aplica la propiedad 6 de la 1ra fórmula básicas y la integral de la fórmula (2).

Ejemplo.- Calcular la integral $\int\frac{dx}{x^2+2x+3}$

Solución

Completando cuadrados: $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+3}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c$$

Ejemplo.- Calcular la integral $\int\frac{dx}{x^2-7x+10}$

Solución

Completando cuadrados: $x^2-7x+10=(x^2-7x+\frac{49}{4})+10-\frac{49}{4}=(x-\frac{7}{2})^2-\frac{9}{4}$

$$\int\frac{dx}{x^2-7x+10}=\int\frac{dx}{(x-\frac{7}{2})^2-\frac{9}{4}}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}}{x-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}}\right|+c=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|+c$$

Ejemplo.- Calcular la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$

Solución

Completando cuadrados: $4x-3-x^2 = 1-(x^2-4x+4) = 1-(x-2)^2$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \operatorname{arcsen}(x-2)+c$$

Ejemplo.- Calcular la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$

Solución

Completando cuadrados: $x^2+6x+13 = (x+3)^2+4$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+13}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2+4}} = \ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+13}\right|+c$$

Ejemplo.- Calcular la integral $\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-7x+12}$

Solución

$$x-2 = \frac{1}{2}\left[\frac{2x-7+3}{x^2-7x+12}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2x-7}{x^2-7x+12}\right] + \frac{3}{2(x^2-7x+12)}$$

se observa que $2x-7$ es la derivada del trinomio $x^2-7x+12$

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-7x+12} = \frac{1}{2}\int \frac{2x-7}{x^2-7x+12}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-7x+12}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-7x+12\right| + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{7}{2})^2-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 7x + 12\right| + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2(\frac{1}{2})}\ln\left|\frac{x - \frac{7}{2} - \frac{1}{2}}{x - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 7x + 12\right| + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right| + c$$

Ejemplo.- Calcular la integral $\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+12}dx$

Solución

$$3x - 1 = \frac{3}{8}\left[8x - 4 + \frac{4}{3}\right] = \frac{3}{8}(8x-4) + \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx = \frac{3}{8}\int \frac{8x-4}{4x^2-4x+17}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{4x^2-4x+17}$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left|4x^2 - 4x + 17\right| + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + 4}$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left|4x^2 - 4x + 17\right| + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x - \frac{1}{2}}{2} + c$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left|4x^2 - 4x + 17\right| + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{4}) + c$$

Ejemplo.- Calcular la integral $\int \frac{(3x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

Solución

$$3x - 1 = \frac{3}{2}\left[2x + 2 - \frac{8}{3}\right] = \frac{3}{2}(2x+2) - 4$$

se observa que $2x + 2$ es la derivada del trinomio

$$\int \frac{(3x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx - 4\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

$$= 3\sqrt{x^2+2x+2} - 4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + c$$

Ejemplo.- Calcular la integral $\int \frac{(4-7x)\,dx}{\sqrt{x^2+2x-8}}$

Solución

$$4-7x = -\frac{7}{2}\left[2x+2-\frac{22}{7}\right] = -\frac{7}{2}(2x+2)+11$$

Se observa que $2x+2$ es la derivada del trinomio

$$\int \frac{(4-7x)\,dx}{\sqrt{x^2+2x-8}} = -\frac{7}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x-8}} + 11\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-9}}$$

$$= -7\sqrt{x^2+2x-8} + 11\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-8}\right| + c$$

1.5.7. EJERCICIOS PROPUESTOS DE LAS FÓRMULAS BÁSICAS.-

Calcular las siguientes integrales indefinidas inmediatas:

1. $\int \frac{3ax^2-2bx}{\sqrt{ax^3-bx^2}}\,dx$ **Rpta.** $2\sqrt{ax^3-bx^2}+c$

2. $\int \frac{x\cos x.dx}{(x\,\text{sen}\,x+\cos x-1)^m}$ **Rpta.** $\frac{(x\,\text{sen}\,x+\cos x-1)^{1-m}}{1-m}+c$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}$ **Rpta.** $2\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}+c$

4. $\int \ln(\cos x).\text{tg}\,x.dx$ **Rpta.** $-\frac{\ln^2(\cos x)}{2}+c$

⑤ $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$ **Rpta.** $\frac{3}{4}(1+\ln x)^{\frac{4}{3}}+c$

⑥ $\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a+bx^n}}$ **Rpta.** $\frac{2}{nb}\sqrt{a+bx^n}+c$

⑦ $\int \frac{x-\operatorname{arctg}(2x)}{1+4x^2}dx$ **Rpta.** $\frac{\ln(1+4x^2)}{8}-\frac{\operatorname{arctg}^2(2x)}{4}+c$

⑧ $\int \frac{dx}{(\operatorname{arcsen} x)^3\sqrt{1-x^2}}$ **Rpta.** $-\frac{1}{2(\operatorname{arcsen} x)^2}+c$

⑨ $\int \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}$ $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$ **Rpta.** $\operatorname{arctg}(e^x)+c$

⑩ $\int \frac{a^x \ln a}{1+a^{2x}}dx$ **Rpta.** $\operatorname{arctg}(a^x)+c$

⑪ $\int \frac{e^x(1+x\ln x)}{x}dx$ **Rpta.** $e^x \ln x+c$

⑫ $\int x^{2x}(\ln x+1)dx$ **Rpta.** $\frac{x^{2x}}{2}+c$

⑬ $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$ **Rpta.** $-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|+c$

⑭ $\int \operatorname{sen} 2x\sqrt{1+2\cos 2x}\,dx$ **Rpta.** $-\frac{1}{6}(1+2\cos 2x)^{\frac{3}{2}}+c$

⑮ $\int \sqrt{x}(x^{\frac{3}{2}}-4)^3\,dx$ **Rpta.** $\frac{1}{6}(x^{\frac{3}{2}}-4)^4+c$

⑯ $\int \frac{x\,dx}{a+bx^2}$ **Rpta.** $\frac{1}{2b}\ln\left|a+bx^2\right|+c$

(17) $\int \frac{ax+b}{px+q}dx$ **Rpta.** $\frac{ax}{p}+\frac{bp-aq}{p^2}\ln\left|x+\frac{q}{p}\right|+c$

(18) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$ **Rpta.** $(x^2+1)^{\frac{1}{2}}+c$

(19) $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$ **Rpta.** $2\sqrt{x}+\frac{\ln^2 x}{2}+c$

(20) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+8}}$ **Rpta.** $(x^2+8)^{\frac{1}{2}}+c$

(21) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{16-9x^2}}$ **Rpta.** $\frac{1}{3}\text{arcsen}(\frac{3x}{4})+c$

(22) $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$ **Rpta.** $\frac{2}{3}\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]^{\frac{3}{2}}+c$

(23) $\int \frac{e^x\,dx}{a+be^x}$ **Rpta.** $\frac{1}{b}\ln\left|a+be^x\right|+c$

(24) $\int \frac{dx}{4+(x-2)^2}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}\text{arctg}(\frac{x-2}{2})+c$

(25) $\int \frac{x\,dx}{6+(3+2x^2)^2}$ **Rpta.** $\frac{1}{4\sqrt{6}}\text{arctg}(\frac{3+2x^2}{\sqrt{6}})+c$

(26) $\int \frac{\text{sen}\,x\,dx}{1-\cos x}$ **Rpta.** $\ln|1-\cos x|+c$

(27) $\int \frac{dx}{x(x^2-8)}$ **Rpta.** $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2}{x^2-8}\right|+c$

(28) $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{a+b\,\text{tg}\,x}$ **Rpta.** $\frac{1}{b}\ln\left|a+b\,\text{tg}\,x\right|+c$

(29) $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{6+2\operatorname{tg}^2 x}$ Rpta. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}})+c$

(30) $\int e^{(2x-5)}dx$ Rpta. $\frac{1}{2}e^{(2x-5)}+c$

(31) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ Rpta. $-\frac{1}{\ln x}+c$

(32) $\int \frac{2^x 3^{x+1}}{5^{x+2}}dx$ Rpta. $\frac{3}{25}(\frac{6}{5})^x(\frac{1}{\ln 6-\ln 5})+c$

(33) $\int \frac{18\,dx}{9x^2-x^4}$ Rpta. $-\frac{2}{x}-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+c$

(34) $\int \frac{e^x+\operatorname{sen} x}{\sqrt{e^x-\cos x}}dx$ Rpta. $2\sqrt{e^x-\cos x}+c$

(35) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\sqrt[3]{c\operatorname{tg} x-1}}$ Rpta. $-\frac{3}{2}(c\operatorname{tg} x-1)^{\frac{2}{3}}+c$

(36) $\int \frac{(x^2-2x+1)^{\frac{1}{5}}}{1-x}dx$ Rpta. $-\frac{5}{2}(x-1)^{\frac{2}{5}}+c$

(37) $\int \frac{\operatorname{senh} x\,dx}{(1+\cosh x)^3}$ Rpta. $-\frac{1}{2(1+\cosh x)^2}+c$

(38) $\int (\ln x+1)e^{x\ln x}dx$ Rpta. x^x+c

(39) $\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2}$ Rpta. $\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right|+c$

(40) $\int a^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$ Rpta. $\frac{a^{\operatorname{sen} x}}{\ln a}+c$

41) $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{x-\cos x}\,dx$ Rpta. $\ln|x-\cos x|+c$

42) $\int \frac{e^{-bx}\,dx}{1-e^{-bx}}$ Rpta. $\frac{1}{b}\ln\left|1-e^{-bx}\right|+c$

43) $\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx^3)^2}$ Rpta. $-\frac{1}{3b(a+bx^3)}+c$

44) $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}\,dx$ Rpta. $\frac{1}{4}\ln\left|x^4-4x+1\right|+c$

45) $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$ Rpta. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{x-2}{2})+c$

46) $\int \frac{18\,dx}{x^2+4x-5}$ Rpta. $3\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+c$

47) $\int (\frac{\sec 2x}{1+\operatorname{tg} 2x})^2\,dx$ Rpta. $-\frac{1}{2(1+\operatorname{tg} 2x)}+c$

48) $\int \frac{4\,dx}{\sqrt{-4x^2-20x-9}}$ Rpta. $2\operatorname{arcsen}(\frac{2x+5}{4})+c$

49) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x+2x^2+x^3}}$ Rpta. $\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}+c$

50) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$ Rpta. $2\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+c$

51) $\int \frac{2x-\sqrt{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ Rpta. $-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}(\operatorname{arcsen} x)^{\frac{3}{2}}+c$

52) $\int \frac{\ln x\,dx}{x(1+\ln^2 x)}dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\ln\left|1+\ln^2 x\right|+c$

(53) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$ Rpta. $\ln|e^{x}+e^{-x}|+c$

(54) $\int \frac{\ln x-1}{\ln^2 x}dx$ Rpta. $\frac{x}{\ln x}+c$

(55) $\int \frac{g'(x)}{(g(x))^2}dx$ Rpta. $-\frac{1}{g(x)}+c$

(56) $\int \frac{x\ln x-(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{x(1+x^2)\ln^2 x}dx$ Rpta. $\frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x}+c$

(57) $\int \frac{1-x\ln x}{xe^x}dx$ Rpta. $\frac{\ln x}{e^x}+c$

(58) $\int \frac{x^x(x\ln^2 x+x\ln x-1)}{x\ln^2 x}dx$ Rpta. $\frac{x^x}{\ln x}+c$

(59) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x-x}{\sqrt{1-x^2}(\operatorname{arcsen} x)^2}dx$ Rpta. $\frac{x}{\operatorname{arcsen} x}+c$

(60) $\int \frac{g(x).g'(x)}{\sqrt{1+g^2(x)}}dx$ Rpta. $\sqrt{1+g^2(x)}+c$

(61) $\int e^{x+e^x}dx$ Rpta. $e^{e^x}+c$

(62) $\int \frac{\ln(2x)}{\ln(4x)x}dx$ Rpta. ln x – ln 2 . ln | ln 4x |

(63) $\int \frac{2+x+3\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+2\operatorname{arctg} x+\frac{3}{4}\operatorname{arctg}^4 x+c$

(64) $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ Rpta. $-\cos^2\sqrt{x}+c$

(65) $\int \frac{\ln(2x)+\ln^2 x}{3x}dx$ Rpta. $\frac{1}{6}\ln^2|x|+\frac{1}{9}\ln^3|x|+\frac{1}{3}\ln 2.\ln|x|+c$

(66) $\int \frac{e^{\ln x+\frac{1}{x}}}{x^3}dx$ Rpta. $-e^{\frac{1}{x}}+c$

(67) $\int e^{e^{e^x}} e^{e^x+x}dx$ Rpta. $e^{e^{e^x}}+c$

(68) $\int \frac{x\,dx}{(1+x^4)\operatorname{arctg}^3 x^2}$ Rpta. $-\frac{1}{4\operatorname{arctg}^2 x^2}+c$

(69) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\cos^2 x+4}$ Rpta. $-\ln\left|\cos^2 x+4\right|+c$

(70) $\int e^x \operatorname{sen}(4e^x+2)dx$ Rpta. $-\frac{1}{4}\cos(4e^x+2)+c$

(71) $\int \frac{(x+2)^2\,dx}{\sqrt{x^3+6x^2+12x+4}}$ Rpta. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+6x^2+12x+4}+c$

(72) $\int \frac{x^3+x+5}{x^2+1}dx$ Rpta. $\frac{x^2}{2}+5\operatorname{arctg} x+c$

(73) $\int \frac{4+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3-3x^2}}dx$ Rpta. $\frac{\sqrt{3}}{3}(x+4\arcsen x)+c$

(74) $\int \frac{(x+1)(x^2+1)\ln(x^2+1)+2x^2}{x^2+1}e^x dx$ Rpta. $xe^x\ln(1+x^2)+c$

(75) $\int \sqrt[5]{3x^4+4x^3+6x^2+12x+9}\,(x^3+x^2+x+1)dx$

Rpta. $\frac{5}{72}\left(3x^4+4x^3+6x^2+12x+9\right)^{\frac{6}{5}}+c$

(76) $\int \frac{dx}{x(\ln(\ln^3(\ln x))).(\ln(\ln x))\ln x}$ Rpta. $\frac{1}{3}\ln\left|\ln\left|\ln\left|\ln x\right|\right|\right|+c$

(77) $\int \frac{3+x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$ Rpta. $3\operatorname{arctg} x+\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)+c$

(78) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ Rpta. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(x^2)+c$

(79) $\int \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+13}}$ Rpta. $\sqrt{x^2-4x+13}+c$

(80) $\int x(\frac{1}{x^2-a^2}-\frac{1}{x^2-b^2})dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}\right|+c$

(81) $\int \frac{\operatorname{sen} x-x\ln x.\cos x}{x\operatorname{sen}^2 x}dx$ Rpta. $\frac{\ln x}{\operatorname{sen} x}+c$

(82) $\int \frac{\ln x\,dx}{(1-\ln^2 x)x}$ Rpta. $-\frac{1}{2}\ln\left|1-\ln^2 x\right|+c$

(83) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}}$ Rpta. $\frac{1}{4}\operatorname{arcsen}(x^4)+c$

(84) $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-6e^x+13}$ Rpta. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{e^x-3}{2})+c$

(85) $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg} x+1}}$ Rpta. $\ln\left|\operatorname{tg} x+2+\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg} x+1}\right|+c$

(86) $\int \frac{(2x+3)}{\sqrt{1+x^2}}dx$ Rpta. $2\sqrt{1+x^2}-3\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+c$

(87) $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$ Rpta. $-\operatorname{arcsen}(e^{-x})+c$

(88) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ Rpta. $\arcsen(\frac{x+2}{3})+c$

(89) $\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$ Rpta. $\arcsen(\frac{x-1}{4})+c$

(90) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-9\ln^2 x}}$ Rpta. $\frac{1}{3}\arcsen(\ln x^{\frac{3}{2}})+c$

(91) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{2-e^{2x}+3e^x}}$ Rpta. $\arcsen(\frac{2e^x-3}{\sqrt{17}})+c$

(92) $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\sqrt{2-\cos^2 x}}$ Rpta. $-\arcsen(\frac{\cos x}{\sqrt{2}})+c$

(93) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-6x-9x^2}}$ Rpta. $\frac{1}{3}\arcsen(\frac{3x+1}{\sqrt{6}})+c$

(94) $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$ Rpta. $\frac{1}{3}\arcsen(\frac{3x-2}{\sqrt{2}})+c$

(95) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{-2-\operatorname{sen}^2 x+3\operatorname{sen} x}}$ Rpta. $\arcsen(2\operatorname{sen}x-3)+c$

(96) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$ Rpta. $\frac{1}{3}\ln|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}|+c$

(97) $\int \frac{3\,dx}{x\sqrt{4\ln^2 x+9}}$ Rpta. $\frac{3}{2}\ln|2\ln x+\sqrt{4\ln^2 x+9}|+c$

(98) $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{x^4+6x^2+5}}$ Rpta. $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+3+\sqrt{x^4+6x^2+5}\right|+c$

(99) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$ Rpta. $\ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|+c$

(100) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$ Rpta. $\ln|e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}|+c$

(101) $\int \frac{dx}{\sqrt{-26-16x-2x^2}}$ Rpta. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}(\frac{x+4}{\sqrt{3}})+c$

(102) $\int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{1+4\ln x-\ln^2 x}}$ Rpta. $-\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}-2\operatorname{arcsen}(\frac{2+\ln x}{\sqrt{5}})+c$

(103) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x+1}}$ Rpta. $\ln|2\operatorname{sen} x+1+2\sqrt{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x+1}|+c$

(104) $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1}}$ Rpta. $\ln\left|2\operatorname{tg} x+1+2\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+1+2\sqrt{(\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} x+1}}\right|+c$

(105) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}dx$ Rpta. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x\sqrt{5}+\sqrt{5x^2+1}\right|+\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+1}+c$

(106) $\int \frac{(6-x)\,dx}{\sqrt{4x^2-12x+7}}$ Rpta. $\frac{9}{4}\ln\left|2x-3+\sqrt{4x^2-12x+7}\right|-\frac{1}{4}\sqrt{4x^2-12x+7}+c$

(107) $\int \frac{4\,dx}{\cos x\sqrt{1-\operatorname{sen} 2x+2\cos^2 x}}$ Rpta. $4\ln\left|(\operatorname{tg}^2 x-1)+\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x+3}\right|+c$

(108) $\int \frac{\cos^2 x(\operatorname{tg}^2 x+1)}{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}dx$ Rpta. $-\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}+c$

(109) $\int \sqrt{\frac{\sec x-\operatorname{tg} x}{\sec x+\operatorname{tg} x}}dx$ Rpta. $\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|-\ln|\sec x|+c$

(110) $\int \frac{(8x-3)\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$ Rpta. $-2\sqrt{12x-4x^2-5}+\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{2x-3}{2})+c$

(111) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$ Rpta. $\frac{1}{b}\ln\left|bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}\right|+c$

(112) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sqrt{a^2+\operatorname{sen}^2 ax}}$ Rpta. $\frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{sen} ax+\sqrt{a^2+\operatorname{sen}^2 ax}\right|+c$

(113) $\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx$ Rpta. $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+c$

(114) $\int \sqrt{2-x-x^2}\,dx$ Rpta. $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2}+\frac{9}{8}\operatorname{arcsen}(\frac{2x+1}{3})+c$

(115) $\int \sqrt{x^2+x}\,dx$ Rpta. $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x}-\frac{1}{8}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}|+c$

(116) $\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$ Rpta. $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right|+c$

(117) $\int \sqrt{x^2-2x-3}\,dx$ Rpta. $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-3}-2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}\right|+c$

(118) $\int \sqrt{6x-x^2}\,dx$ Rpta. $\frac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2}+\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{x-3}{3})+c$

(119) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$ Rpta. $\frac{1}{3}((x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}})+c$

(120) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}}$ Rpta. $2(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x})-2(\operatorname{arctg}\sqrt{2x+1}+\operatorname{arctg}\sqrt{x})+c$

(121) $\int x^{2\operatorname{sen} x-1}(\operatorname{sen} x+x\cos x.\ln x)\,dx$ Rpta. $\frac{1}{2}x^{2\operatorname{sen} x}+c$

(122) $\int \frac{\ln 3x}{x\ln 5x}\,dx$ Rpta. $\ln\frac{3}{5}.\ln|\ln 5x|+\ln x+c$

(123) $\int \frac{dx}{e^x+4}$ Rpta. $-\frac{1}{4}\ln\left|1+4e^{-x}\right|+c$

(124) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$ Rpta. $\frac{4}{3}(\sqrt{x}+1)^{\frac{3}{2}}-4(\sqrt{x}+1)^{\frac{1}{2}}+c$

(125) $\int \frac{dx}{2^x+3}$ Rpta. $\frac{1}{3}(x-\frac{1}{\ln 2}\ln(2^x+3))+c$

(126) $\int \frac{dx}{e^{\ln(2x)\sqrt{\ln x+\sqrt{\ln x+\sqrt{\ldots\infty}}}}-x}$ Rpta. $\sqrt{\ln x+\sqrt{\ln x+\ldots+\infty}}$

(127) $\int \frac{x^5\,dx}{x^3-8}$ Rpta. $\frac{x^3}{3}+\frac{8}{3}\ln\left|x^3-8\right|+c$

(128) $\int \frac{2e^x+e^{-x}}{3e^x-4e^{-x}}\,dx$ Rpta. $\ln\left|\sqrt[3]{3e^{2x}-4}\sqrt[3]{3-4e^{-2x}}\right|+c$

(129) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ Rpta. $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+c$

(130) $\int \frac{e^x\sqrt{e^x+2}}{e^x+6}\,dx$ Rpta. $2\sqrt{e^x+2}-4\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{e^x+2}}{2})+c$

(131) $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{1+e^x}}$ Rpta. $\frac{2}{3}(e^x-1)^{3/2}-2(e^x+1)^{1/2}+c$

(132) $\int \frac{\ln x\,dx}{x^3(\ln x-1)^3}$ Rpta. $-\frac{1}{2x^2(\ln x-1)^2}+c$

(133) $\int \frac{\sqrt{e^x-1}e^{\operatorname{arctg} x}+\ln((1+x^2)^{\sqrt{x^2e^x-x^2}})+\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{e^x+x^2e^x-x^2-1}}\,dx$

Rpta. $e^{\operatorname{arctg} x}+\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)+\operatorname{arctg} x+c$

(134) $\int \operatorname{sen}(a+bx)\,dx$ Rpta. $-\frac{\cos(a+bx)}{b}+c$

(135) $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx$ Rpta. $-\cos(\ln x)+c$

(136) $\int x\cos(2-x^2)dx$ **Rpta.** $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2-x^2)+c$

(137) $\int \operatorname{sen}^5 4x\cos 4x \quad dx$ **Rpta.** $\frac{\operatorname{sen}^6 4x}{24}+c$

(138) $\int \operatorname{tg}^3(\frac{x}{3})\sec^2(\frac{x}{3})dx$ **Rpta.** $\frac{3}{4}\operatorname{tg}^4(\frac{x}{3})+c$

(139) $\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x\, dx}{\sqrt{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}}$ **Rpta.** $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x}+c$

(140) $\int \cos(\operatorname{sen} x+2x)(\cos x+2)\,dx$ **Rpta.** $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x+2x)+c$

(141) $\int \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x+5)\cos x\,dx$ **Rpta.** $\ln|\sec(\operatorname{sen} x+5)|+c$

(142) $\int \sec^2(\cos(\ln x))\frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}dx$ **Rpta.** $-\operatorname{tg}(\cos\ln x)+c$

(143) $\int \cos(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx$ **Rpta.** $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)+c$

(144) $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$ **Rpta.** $-2\cos\sqrt{x}+c$

(145) $\int \operatorname{tg}\sqrt{3x+1}\,\frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ **Rpta.** $\frac{2}{3}\ln\left|\sec\sqrt{3x+1}\right|+c$

(146) $\int c\operatorname{tg}(\ln x)\frac{dx}{x}$ **Rpta.** $\ln|\operatorname{sen}(\ln x)|+c$

(147) $\int \operatorname{tg}\sqrt{\ln x}\,\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ **Rpta.** $2\ln\left|\sec\sqrt{\ln x}\right|+c$

(148) $\int \frac{dx}{\cos^2(1-4x)}$ **Rpta.** $-\frac{1}{4}\operatorname{tg}(1-4x)+c$

149) $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{1-\operatorname{sen} x}$ **Rpta.** $\operatorname{sen} x - \frac{\cos^2 x}{2} + c$

150) $\int \frac{dx}{1+\cos 10x}$ **Rpta.** $\frac{1}{10}\operatorname{tg} 5x + c$

151) $\int \frac{dx}{4+5\cos^2 x}$ **Rpta.** $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}(\frac{2\operatorname{tg} x}{3}) + c$

152) $\int \frac{dx}{4+5\operatorname{sen}^2 x}$ **Rpta.** $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}(\frac{3\operatorname{tg} x}{2}) + c$

153) $\int \sqrt{1+\operatorname{sen} x}\,dx$ **Rpta.** $-2\sqrt{1-\operatorname{sen} x} + c$

154) $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} 2x}\,dx$ **Rpta.** $\frac{1}{2}\ln|\cos ec 2x - c\operatorname{tg} 2x| + \frac{\operatorname{tg} x}{2} + c$

155) $\int \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$ **Rpta.** $\sqrt{2}\operatorname{sen} x + c$

156) $\int \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ **Rpta.** $-\sqrt{2}\cos x + c$

157) $\int \sqrt{1+\cos 8x}\,dx$ **Rpta.** $\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{sen} 4x + c$

158) $\int \sqrt{1-\cos 8x}\,dx$ **Rpta.** $-\frac{\sqrt{2}}{4}\cos 4x + c$

159) $\int \operatorname{sen}\sqrt{\cos x}.\sqrt{\operatorname{tg} x.\operatorname{sen} x}\,dx$ **Rpta.** $2\cos\sqrt{\cos x} + c$

160) $\int \frac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos x + 10}{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}\,dx$ **Rpta.** $2\operatorname{sen} x + c$

161) $\int x^2\cosh(x^3+3)dx$ **Rpta.** $\frac{\operatorname{senh}(x^3+3)}{3} + c$

(162) $\int \frac{dx}{\operatorname{senh} x.\cosh^2 x}$ Rpta. $\ln\left|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{\cosh x} + c$

(163) $\int e^{2x} \cosh x \quad dx$ Rpta. $\frac{e^{3x}}{6} + \frac{e^{x}}{2} + c$

(164) $\int e^{x} \operatorname{senh} x \quad dx$ Rpta. $\frac{e^{2x}}{4} - \frac{x}{2} + c$

(165) $\int \operatorname{senh}^3 x.\cosh^2 x \quad dx$ Rpta. $\frac{\cosh^5 x}{5} - \frac{\cosh^3 x}{3} + c$

(166) $\int \frac{e^x}{x}(\ln e + \ln x.\ln e^x)dx$ Rpta. $e^x \ln x + c$

(167) $\int \frac{x^{2/3} + x^4 e^{\operatorname{sen} 3x}\cos 3x + x^3}{x^4}dx$ Rpta. $-\frac{3}{7}x^{-7/3} + \frac{e^{\operatorname{sen} 3x}}{3} + \ln x + c$

(168) $\int \frac{(1-x)^2}{x^4}dx$ Rpta. $-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + c$

(169) $\int x\sqrt{4+x^2}\,dx$ Rpta. $\frac{1}{3}(4+x^2)^{3/2} + c$

(170) $\int \sqrt{2ax - x^2}\,dx$ Rpta. $\frac{a}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x-a}{a} + \frac{x-a}{2a}\sqrt{2ax-x^2} + c$

(171) $\int \frac{(x^2+2x)dx}{\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}}$ Rpta. $\frac{1}{2}(x^3+3x^2+1)^{2/3} + c$

(172) $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{9-x^4}}$ Rpta. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{x^2}{3}) + c$

(173) $\int 6x.e^{-x^2}dx$ Rpta. $-3e^{x^2} + c$

174) $\int \frac{2e^{2x}-e^{x}-3}{e^{2x}-2e^{x}-3}dx$ Rpta. $x+\ln(e^{x}-3)+c$

175) $\int \frac{(6-2x)\,dx}{\sqrt{8-4x-4x^2}}$ Rpta. $\frac{\sqrt{8-4x-4x^2}}{2}+\frac{7}{2}\operatorname{arcsen}\frac{2x+1}{6}$

176) $\int \frac{x^3+3x}{x^2+1}dx$ Rpta. $\frac{x^2+3}{2}+\ln\left(x^2+1\right)+c$

177) $\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5}$ Rpta. $\ln\left|x^2+2x+5\right|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+c$

178) $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x}}$ Rpta. $\sqrt{x^2+2x}+2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+c$

179) $\int \operatorname{sen}^5 x\cos x \quad dx$ Rpta. $\frac{\operatorname{sen}^6 x}{6}+c$

180) $\int \frac{dx}{5x^2-20x+23}$ Rpta. $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}\,(x-2)}{\sqrt{3}}+c$

181) $\int \frac{dx}{x^2-2x+4}$ Rpta. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{x-1}{\sqrt{3}})+c$

182) $\int \frac{dx}{\sqrt{-5-12x-3x^2}}$ Rpta. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\sqrt{3}(\frac{x+2}{\sqrt{7}})+c$

183) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{9-x}}$ Rpta. $2\operatorname{arcsen}(\frac{\sqrt{x}}{3})+c$

184) $\int \frac{x\,dx}{5+x^4}$ Rpta. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{5}}+c$

185) $\int \frac{dx}{2x^2+x+1}$ Rpta. $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{7}}+c$

(186) $\displaystyle\int \frac{dx}{6x-12-4x^2}$ **Rpta.** $-\dfrac{1}{2\sqrt{39}}\ln\left|\dfrac{x-3-\sqrt{39}}{x-3+\sqrt{39}}\right|+c$

(187) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{b}\operatorname{arcsen}\dfrac{bx}{a}+c$

(188) $\displaystyle\int \sqrt{e^x}\,dx$ **Rpta.** $2e^{x/2}+c$

(189) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$ **Rpta.** $\ln(\ln x)+c$

(190) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx$ **Rpta.** $\dfrac{\ln^2 x}{2}+c$

(191) $\displaystyle\int \frac{x\ln(1+x^2)dx}{1+x^2}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{4}\left[\ln(1+x^2)\right]^2+c$

(192) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ **Rpta.** $2\ln(1+\sqrt{x})+c$

(193) $\displaystyle\int \frac{(2\ln x+1)\,dx}{x(\ln^2 x+\ln x)}$ **Rpta.** $\ln(\ln^2 x+\ln x)+c$

(194) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(2-7x)^{3/2}}$ **Rpta.** $\dfrac{2}{49}\left(\dfrac{4-7x}{\sqrt{2-7x}}\right)+c$

(195) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-3}\;dx}{(2x-3)^{1/3}+1}$

Rpta. $2\left[\dfrac{(2x-3)^{7/6}}{7}-\dfrac{(2x-3)^{5/6}}{5}+\dfrac{\sqrt{2x-3}}{3}-\sqrt[6]{2x-3}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{2x-3}\right]+c$

(196) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\;dx$ **Rpta.** $\dfrac{2}{5}(x+1)^{5/2}-\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+c$

(197) $\int x\sqrt{2-5x}\;dx$ Rpta. $\frac{2}{125}(2-5x)^{5/2}-\frac{4}{75}(2-5x)^{3/2}+c$

(198) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ Rpta. $\frac{2}{3}\left[(x+1)^{3/2}+x^{3/2}\right]+c$

(199) $\int x^2\sqrt{1+x}\;dx$ Rpta. $\frac{2}{7}(1+x)^{7/2}-\frac{4}{5}(1+x)^{5/2}+\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}+c$

(200) $\int x\sqrt{4+x}\;dx$ Rpta. $\frac{2}{5}(x+4)^{5/2}-\frac{8}{3}(x+4)^{3/2}+c$

(201) $\int \frac{x^5dx}{\sqrt[3]{9+x^2}}$ Rpta. $\frac{3}{2}\left[\frac{(9+x^2)^{8/3}}{8}-\frac{18}{5}(9+x^2)^{5/3}+\frac{81}{2}(9+x^2)^{2/3}\right]+c$

(202) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{1+x})^{1/2}}$ Rpta. $\frac{4}{3}(1+\sqrt{1+x})^{1/2}(\sqrt{1+x}-2)+c$

(203) $\int x^2(x+3)^{11}dx$ Rpta. $\frac{(x+3)^{14}}{14}-\frac{6(x+3)^{13}}{13}+\frac{3(x+3)^{12}}{4}+c$

(204) $\int \frac{e^x\sqrt{e^{2x}-4}-2e^{2x}(e^x+2)}{2(e^x+2)\sqrt{e^{2x}-4}}dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\ln(e^x+2)-\sqrt{e^{2x}-4}+c$

(205) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$ Rpta. $x+3\ln\frac{x-3}{x-2}+c$

(206) $\int \frac{x^2-3x-8}{x^2-2x+1}dx$ Rpta. $x+\frac{10}{x-1}-\ln|x-1|+c$

(207) $\int \frac{x^2+1}{(x+2)^2}dx$ Rpta. $x-4\ln|x+2|-\frac{5}{x+2}+c$

(208) $\int \frac{(4x+5)dx}{x^2+2x+2}$ Rpta. $2\ln|x^2+2x+2|+\operatorname{arctg}(x+1)+c$

209) $\displaystyle\int \frac{(3x-5)\,dx}{x^2-8x+42}$ Rpta. $\dfrac{3}{2}\ln\left|x^2-8x+42\right|+\dfrac{7}{\sqrt{26}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-4}{\sqrt{26}}\right)+c$

210) $\displaystyle\int \frac{5x+3}{x^2+4x+4}\,dx$ Rpta. $5\ln|x+2|+\dfrac{7}{x+2}+c$

211) $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x-7)^2}$ Rpta. $-\dfrac{1}{3(x^3+3x-7)}+c$

212) $\displaystyle\int\left[\frac{(x^2+1)\ln(x^2+1)+2xe^x\operatorname{arctg}x}{x^2+1}+\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}e^x\right]dx$

Rpta. $e^x\ln(x^2+1)\operatorname{arctg}x+c$

213) $\displaystyle\int\left[\frac{(1+x^2)\cos x+(1+x+x^2)\operatorname{sen}x}{\sqrt{1+x^2}}e^x\right]dx$ Rpta. $e^x\sqrt{1+x^2}\operatorname{sen}x+c$

214) $\displaystyle\int \frac{(x+1)(x^2+1)\ln(x^2+1)+2x^2}{x^2+1}e^x\,dx$ Rpta. $xe^x\ln(1+x^2)+c$

215) $\displaystyle\int\left[\frac{2(x^2+x+1)+(2x^3+6x^2+5x+2)\ln x}{2\sqrt{x^2+x+1}}e^x\right]dx$ Rpta. $x\sqrt{1+x+x^2}\,e^x\ln x+c$

216) Suponga que $f(x)$ es una función "suficientemente derivable" simplifique la expresión dada:

a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int\left(x^3+\frac{d}{dx}\int x^3f(x)\,dx+f''(x)\right)dx$ Rpta. $x^3\left(1+f(x)\right)+f''(x)$

b) $\displaystyle\int\left(x\,f(x)\right)'dx$ Rpta. $xf(x)$

c) $\displaystyle\int\left(4f''(x)+5f'(x)\right)dx$ Rpta. $4f'(x)+5f(x)$

d) $\displaystyle\int\Big(\left(xf(x)\right)''+xf'(x)+f(x)\Big)dx$ Rpta. $f(x)+x\left(f(x)+f'(x)\right)$

e) $\int (x f'(x)+f(x))\,dx$ Rpta. $xf(x)$

(217) $\int \frac{\operatorname{sen} x\, e^{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^3 x}\,dx$ Rpta. $\frac{1}{2}e^{\operatorname{tg}^2 x}+c$

(218) $\int \frac{4\operatorname{arctg}^2 x+2x^2+1+5x+2}{1+x^2}\,dx$ Rpta. $2x+\frac{4}{3}\operatorname{arctg}^3 x+\frac{5}{2}\ln|x^2+1|+c$

(219) $\int x(x^2+1)\sqrt{4-2x^2-x^4}\,dx$ Rpta. $-\frac{1}{16}(4-2x^2-x^4)^{\frac{3}{2}}+c$

(220) $\int (x^2-4x+4)^{\frac{4}{3}}\,dx$ Rpta. $\frac{3}{11}(x-2)^{\frac{11}{3}}+c$

(221) $\int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\,\frac{dx}{x^2}$ Rpta. $-2(1+\frac{1}{3x})^{\frac{3}{2}}+c$

(222) $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}\,dx$ Rpta. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x^2+1}+c$

(223) $\int \operatorname{sen} x.\operatorname{sen}(\cos x)\,dx$ Rpta. $\cos(\cos x)+c$

(224) $\int \sec x.\operatorname{tg} x.\cos(\sec x)\,dx$ Rpta. $\operatorname{sen}(\sec x)+c$

(225) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ Rpta. $\operatorname{arcsen} x+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+c$

(226) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$ Rpta. $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|+c$

(227) $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\,dx$ Rpta. $\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+c$

(228) $\int \frac{(x+4)\,dx}{(x^2+8x)^{\frac{1}{4}}}$ Rpta. $-\frac{8}{5(x^2+8x)^{\frac{5}{4}}}+c$

(229) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$ Rpta. $\sqrt{x^2+2x}+2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+c$

(230) $\int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}\,dx$ Rpta. $\ln\left|x^2+2x+5\right|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(\frac{x+1}{2})+c$

(231) $\int \frac{(6-2x)\,dx}{\sqrt{8-4x-4x^2}}$ Rpta. $\frac{1}{2}\sqrt{8-4x-4x^2}+\frac{7}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{2x+1}{3})+c$

(232) $\int \frac{2e^{2x}-e^x-3}{e^{2x}-2e^x-3}\,dx$ Rpta. $x+\ln|e^x-3|+c$

(233) $\int \frac{x^3+3x}{x^2+1}\,dx$ Rpta. $\frac{x^2}{2}+\ln\left|x^2+1\right|+c$

(234) $\int \frac{\sqrt{2x^2+1}-x+1}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx$ Rpta. $x-\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1}\right|+c$

(235) $\int \frac{x^{\frac{2}{3}}+x^4e^{\operatorname{sen}3x}\cos 3x+x^3}{x^4}\,dx$ Rpta. $\ln x+\frac{e^{\operatorname{sen}3x}}{3}-\frac{3}{7}x^{-\frac{7}{3}}+c$

(236) $\int \frac{x^2+x^5}{\sqrt{16-x^6}}\,dx$ Rpta. $-\frac{\sqrt{16-x^6}}{3}+\frac{arcsen(\frac{x^3}{4})}{3}+c$

(237) $\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ Rpta. $\frac{a^2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}+c$

(238) $\int \frac{(2x^3-1)x^2\,dx}{(1+x^3)^3}$ Rpta. $\frac{x^6}{3(x^3+1)^2}+\frac{1}{6(x^3+1)^2}+c$

(239) $\int \sqrt{(x^{-2}-x^2)^2+4}\;dx$ Rpta. $\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+c$

(240) $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt[3]{x^7 - x^3}}$ **Rpta.** $\frac{3}{8}(x^4 - 1)^{\frac{2}{3}} + c$

1.5.8. ECUACIONES DIFERENCIALES MUY SENCILLAS.-

Una ecuación que contiene una función y sus derivadas, o sólo sus derivadas, se llama "Ecuación Diferencial" usaremos la técnica de antiderivada para resolver una ecuación diferencial de la forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)} \quad \text{... (1)}$$

donde la variable dependiente "y" no aparece en el lado derecho.

La solución de la ecuación diferencial (1) consiste simplemente en encontrar una función $y(x)$ que satisfaga la ecuación (1), luego la solución general de la ecuación (1) es la integral indefinida.

$$\boxed{y(x) = \int f(x)\,dx + c} \quad \text{... (2)}$$

Ejemplo.- Encontrar la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$

Solución

La solución general de la ecuación diferencial dada es: $y(x) = \int 2x\,dx + c = x^2 + c$

NOTA.- Una ecuación diferencial de la forma de la ecuación (1) puede aparecer junto con una condición inicial de la forma $y(x_0) = y_0$ y con estas condiciones conociendo la solución general (2) se obtiene la solución particular de la ecuación (1), por lo tanto la combinación.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0} \quad \text{... (3)}$$

de una ecuación diferencial con una condición inicial es llamado un "Problema con condición inicial".

Ejemplo.- Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x+1$, $y(0) = 3$

Solución

La solución general es: $y(x) = \int (2x+1)\,dx + c = x^2 + x + c$ como $y(0) = 3$ es decir: cuando $x = 0$, $y = 3$, que al reemplazar en la solución general se tiene: $3 = 0 + 0 + c$ entonces $c = 3$, por lo tanto la solución particular es $y = x^2 + x + 3$

OBSERVACIÓN.- El método indicado para resolver una ecuación diferencial puede escribirse como integrar ambos lados de una ecuación diferencial con respecto a x.

$$\int (\frac{dy}{dx})dx = \int (2x+1)\,dx \quad \Rightarrow \quad y(x) = x^2 + x + c$$

También las ecuaciones diferenciales sencillas aparecen en la forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}} \qquad \ldots (4)$$

La ecuación diferencial (4) se puede expresar con diferenciales en la forma:

$$\boxed{h(y)\,dy = g(x)\,dx}$$

así las variables están separadas, por lo que se dice que estas ecuaciones son "Ecuaciones Diferenciales Separables" y la solución general se obtiene por integración directa.

$$\boxed{\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx + c}$$

Ejemplo.- Hallar la solución general de la ecuación diferencial. $\frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{x^3-3}}{y^2}$

Solución

La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2\sqrt{x^3-3}}{y^2}$, se escribe con diferenciales

$y^2dy=x^2\sqrt{x^3-3}dx$, quedando las variables separadas.

Ahora integrando ambos miembros para obtener la solución

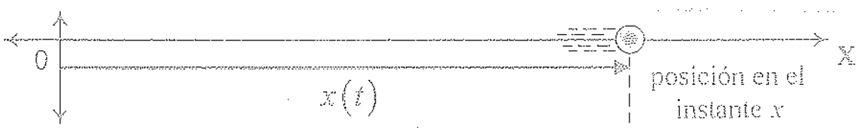
$$\int y^2dy=\int x^2\sqrt{x^3-3}\quad dx+c \;\Rightarrow\; \frac{y^3}{3}=\frac{2}{9}(x^3-3)^{\frac{3}{2}}+c$$

$\therefore\; 3y^2=2(x^3-3)^{\frac{3}{2}}+9c$ que es la solución general.

OBSERVACIÓN.- Las ecuaciones diferenciales tienen muchas aplicaciones en diversos campos, así por ejemplo se aplica al movimiento rectilíneo en Física, en Química, Biología, Psicología, Sociología, Administración, Economía, etc., en esta sección trataremos solamente del movimiento rectilíneo, aceleración constante y movimiento vertical con aceleración gravitacional constante.

1.5.9. MOVIMIENTO RECTILINEO.-

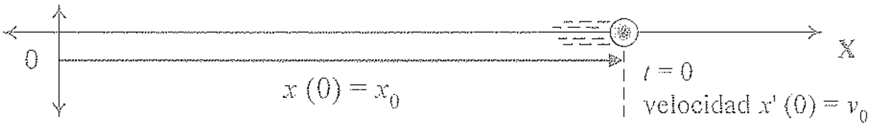
Las antiderivadas nos permite, en muchos casos importantes, analizar el movimiento de una partícula (o masa puntual) en términos de las fuerzas que actúan sobre esta. Si la partícula se mueve con movimiento rectilíneo, a lo largo de una línea recta (eje X), bajo la influencia de una fuerza dada, entonces el movimiento de la partícula queda descrito por su "función de posición" $x(t)$ que da su coordenada x en el tiempo t.



La función de posición $x(t)$ de una partícula que se mueve a lo largo del eje X.

La "velocidad" de la partícula $v(t)$ es la derivada, con respecto al tiempo de su función de posición.

$$\boxed{v(t)=\frac{dx}{dt}}$$



Su aceleración $a(t)$ es la derivada de su velocidad con respecto del tiempo.

$$\boxed{a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}}$$

En una situación típica, se tiene la siguiente información:

$a\ (t)$:	La aceleración de la partícula
$x(0) = x_0$	Su posición inicial.
$v(0) = v_0$	Su velocidad inicial.

Para determinar la función de posición de la partícula $x(t)$.

Primeramente resolveremos el problema con condición inicial.

$$\boxed{\frac{dv}{dt}=a(t),\quad v(0)=v_0} \qquad \dots (\alpha)$$

correspondiente a la función velocidad $v(t)$.

Conociendo $v(t)$ se puede resolver el problema con condición inicial.

$$\boxed{\frac{dx}{dt}=v(t),\quad x(0)=x_0} \qquad \dots (\beta)$$

para la función de posición $x(t)$ de la partícula.

1.5.10. ACELERACIÓN CONSTANTE.-

La solución de los problemas con condiciones iniciales en las ecuaciones (α) y (β) es más sencillo cuando la aceleración "a" es constante. Se parte de:

$$\frac{dv}{dt} = a \quad (a \text{ es una constante}) \qquad \ldots (1)$$

de donde: $v(t) = \int a\,dt + c_1 = at + c_1 \Rightarrow \boxed{v(t) = at + c_1}$ ... (2)

para calcular c_1 se tiene $v(0) = v_0$ obteniendo $v(t) = at + v_0$

como $x'(t) = v(t)$ una segunda antiderivada se tiene:

$$x(t) = \int v(t)\,dt + c_2 = \int (at + v_0)\,dt + c_2 \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{at^2}{2} v_0 t + c_2} \qquad \ldots (3)$$

para $x(0) = x_0$ entonces $c_2 = x_0$

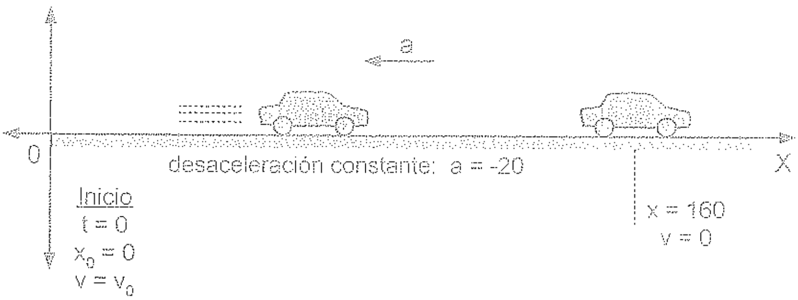
Luego $$\boxed{x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0} \qquad \ldots (4)$$

NOTA.- Las ecuaciones (3) y (4) solamente son válidas en los casos en que la aceleración "a" es constante no se aplica cuando la aceleración varia.

Ejemplo.- Las marcas de derrape de unos neumáticos indican que se han aplicado los frenos durante una distancia de 160 pies antes de detenerse el automóvil. Supongamos que el automóvil en cuestión tiene una desaceleración constante de $20\,pies/seg^2$ bajo las condiciones del derrape. ¿A qué velocidad viajaba el auto cuando se comenzó a frenar?

<u>Solución</u>

Consideremos al eje X orientado positivamente en la dirección del movimiento del auto, elegimos el orden de modo que $x_0 = 0$ cuando $t = 0$.



En este sistema coordenado, la velocidad del auto $v(t)$ es una función decreciente del tiempo t (en segundos), de modo que su aceleración es $a=-20\ pies/seg^2$ y no $a=+20$, por lo tanto comenzamos con la ecuación de aceleración constante.

$\frac{dv}{dt}=-20$, integrando se tiene $v(t)=\int -20\ dt+c_1=-20t+c_1$

aunque la velocidad inicial no se conoce, los datos iniciales $t=0,\ v=v_0$ implican que $c_1=v_0$, luego la velocidad del automóvil es: $v(t)=-20t+v_0$

como $x(t)=\int v(t)\,dt+c_2=\int(-20t+v_0)\,dt+c_2 \Rightarrow \boxed{x(t)=-10t^2+v_0t+c_2}$

al sustituir los datos iniciales $t=0,\ x=0$ obtenemos $c_2=0$ por lo tanto, la función del automóvil es: $\boxed{x(t)=-10t^2+v_0t}$

El hecho de que las marcas del derrape tenga una longitud de 160 pies nos dice que $x=160$ cuando el auto se detiene, es decir: $x=160$ si $v=0$ al sustituir estos valores en la ecuación de la velocidad y de posición se tiene:

$$\begin{cases} -20t+v_0=0 & \quad ...(1) \\ -10t^2+v_0t=160 & \quad ...(2) \end{cases}$$

de la ecuación (1) $v_0=20t$, reemplazando en (2):

$-10t^2+20t^2=160 \Rightarrow t^2=16 \Rightarrow t=4$

Luego cuando $t=4$ seg. el auto se detiene, quiere decir que a velocidad del auto era

$v_0=20t=20(4)=80\ pies/seg$

1.5.11. MOVIMIENTO VERTICAL CON ACELERACIÓN GRAVITACIONAL CONSTANTE.-

Una de las aplicaciones de las ecuaciones de la velocidad y la aceleración esta seleccionada con el movimiento vertical cerca de la superficie de la tierra una partícula con este movimiento esta sujeta a una aceleración "a" hacia abajo, que casi es constante si sólo sé utilizar distancias verticales pequeñas. La magnitud de esta constante se denota con g, aproximadamente igual a $32\ pies/seg^2$ ó $9.8\ m/seg^2$.

Si se desprecia la resistencia del aire, podemos suponer que esta aceleración debida a la gravedad es la única influencia externa sobre la partícula en movimiento, como aquí trabajamos con el movimiento vertical, es natural elegir el eje Y como el sistema de coordenadas para la posición de la partícula. Si elegimos la dirección hacia arriba como la dirección positiva, entonces el efecto de la gravedad sobre la partícula consiste en disminuir su altura, y también disminuye su velocidad $v = \frac{dx}{dt}$, entonces la aceleración de la partícula es: $\quad a = \frac{dv}{dt} = -32\ pies/seg^2$

$$v(t) = \int a\ dt + c = \int -32\ dt + c = -32t + c = -32t + v_0 \qquad \ldots (1)$$

$$y(t) = \int v(t)\,dt + k = \int (-32t + v_0)\,dt + k = -16t^2 + v_0 t + k\ , \text{ para } t = 0,\ \ y(0) = y_0$$

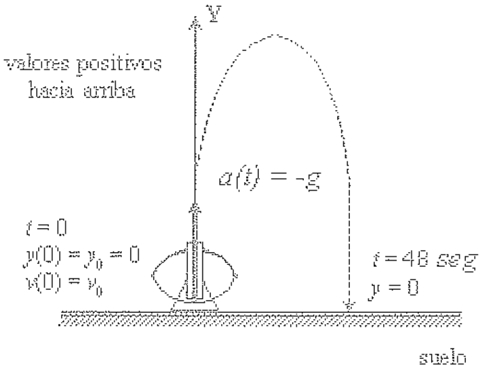
$$y_0 = 0 + k \implies k = y_0 \text{ por lo tanto } y(t) = -16t^2 + v_0 t + y_0 \qquad \ldots (2)$$

Aquí y_0 es la altura inicial de la partícula en pies, v_0 es la velocidad inicial en *pies/seg.* y t el tiempo en segundos.

Ejemplo.- Suponga que se dispara una flecha en sentido vertical mediante una poderosa ballesta, desde el piso, y que vuelve a tocar el suelo 48 segundos después. Si podemos despreciar la resistencia del aire. Determinar la velocidad inicial de la flecha y la altura máxima que alcanza.

<u>**Solución**</u>

Ubiquemos el sistema de coordenadas en la presente figura donde el nivel del suelo correspondiente a $y = 0$, la flecha se lanza en el instante $t = 0$ (en segundos) y con la dirección positiva hacia arriba. Las unidades en el eje Y están en pies.



Se tiene que cuando $t = 48$ *seg.*, $y = 0$ y no tenemos la información sobre la velocidad inicial v_0 pero se puede usar las ecuaciones (1) y (2) que son:

$$\begin{cases} v(t) = -32t + v_0 \\ y(t) = -16t^2 + v_0 t + y_0 = -16t^2 + v_0 t \end{cases}$$

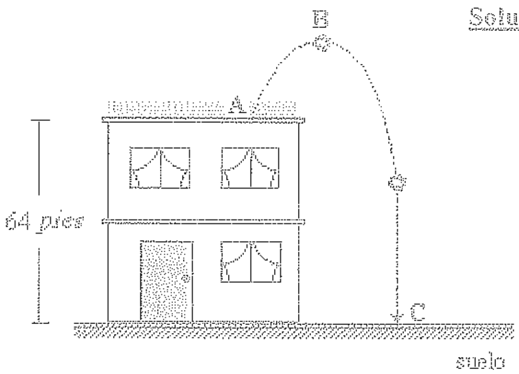
Cuando $t = 48$ seg. se tiene $y = 0$ de donde

$$0 = -16(48)^2 + 48v_0 \Rightarrow v_0 = 16(48) = 768 \ \ pies/seg$$

para determinar la altura máxima de la flecha, maximicemos $y(t)$ calculando el valor de t para lo cual la derivada se anula, es decir, la flecha alcanza su altura máxima cuando su velocidad se anula $-32t + v_0 = 0$ de donde $t = \dfrac{v_0}{32} = 24$ en este instante, la flecha ha alcanzado su altura máxima de

$$y_{\max} = y(24) = -16(24)^2 + 768(24) = 9216 \ \ pies.$$

Ejemplo.- Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde el techo de una casa de 64 pies de altura y la velocidad inicial es 48 *pies/seg.* ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en llegar al suelo y con qué velocidad llegará?



Solución

$V_A = 48 \ \ pies/seg$

$t_{AC} = ?$

t	$y(t)$	v
0	64	48

$a = -32 \ \ pies/seg^2$

se sabe que $v(t) = \int a \ \ dt = \int -32 \ \ dt + c$

$v(t) = -32t + c$ como para $t = 0$, $v(0) = 48$

$48 = 0 + c$ entonces $c = 48$

Luego $\boxed{v(t) = -32t + 48}$ ... (1)

Además $y(t) = \int v(t)dt + k \Rightarrow y(t) = \int (-32t + 48)dt + k$

$y(t) = -16t^2 + 48t + k$ como $t = 0$, $y(0) = 64$

$64 = 0 + 0 + k$ entonces $k = 64$

Luego $\boxed{y(t) = -16t^2 + 48t + 64}$ ... (2)

Calculando el tiempo transcurrido t_{AC} que demora en llegar la pelota al suelo y esto ocurre cuando $y = 0$ de donde:

$$-16t^2 + 48t + 64 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t-4)(t+1) = 0$$

$$\Rightarrow t = 4, \; t = -1$$

por lo tanto el tiempo que tomara en llegar al suelo es $t_{AC} = 4\ seg$

1.5.12. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

1) Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = (x-2)^3$ donde $y(2) = 1$.

Solución

La solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$y(x) = \int (x-2)^3 dx + k = \frac{(x-2)^4}{4} + k \quad \text{como } y(2) = 1$$

$$y(2) = 1 = \frac{(2-2)^2}{4} + k \text{ de donde } k = 1 \text{ por lo tanto la solución es } y = \frac{(x-2)^2}{4} + 1$$

(2) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $x.\sqrt{1+y^2}+y.\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx}=0$

Solución

A la ecuación diferencial expresamos con diferenciales

$x.\sqrt{1+y^2}\,dx+y.\sqrt{1+x^2}\,dy=0$ separando las variables

$\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}}=0$, integrando $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\int\frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}}=k$

de donde: $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=k$

(3) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $(4x+xy^2)dx+(y+x^2y)dy=0$

Solución

A la ecuación diferencial expresamos en la forma: $x.(4+y^2)dx+y.(1+x^2)dy=0$

Separando las variables: $\frac{x\,dx}{1+x^2}+\frac{y\,dy}{4+y^2}=0$, integrando término a término:

$\int\frac{x\,dx}{1+x^2}+\int\frac{y\,dy}{4+y^2}=\ln k$, de donde $\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2}\ln\left(4+y^2\right)=\ln k$

$\ln\sqrt{1+x^2}.\sqrt{4+y^2}=\ln k$, de donde $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}=k \quad \therefore \quad (1+x^2)(4+y^2)=c$

(4) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $x\,dy+\sqrt{1+y^2}\,dx=0$

Solución

$x\,dy+\sqrt{1+y^2}\,dx=0$, separando las variables

$\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{dx}{x}=0$, integrando ambos miembros

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} + \int \frac{dx}{x} = k \quad \text{de donde} \quad \ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right| + \ln x = \ln c$$

$\ln x.(y+\sqrt{1+y^2}) = \ln c$ por lo tanto $x.(y+\sqrt{1+y^2}) = c$

(5) Hallar la solución particular de la ecuación diferencial sen 2x dx + cos 3y dy = 0, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{3}$

Solución

sen $2x\ dx$ + cos $3y\ dy = 0$, integrando ambos miembros

$$\int \operatorname{sen} 2x\ dx + \int \cos 3y\ dy = k \quad \text{de donde} \quad -\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3y}{3} = k$$

como $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{3}$ es decir para $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{3}$

$$-\frac{\cos \pi}{2} + \frac{\operatorname{sen} \pi}{3} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} + 0 = k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}$$

$-\dfrac{\cos 2x}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 3y}{3} = \dfrac{1}{2}$ de donde: 2 sen $3y$ − 3 cos $2x = 3$

(6) La pendiente de al recta tangente en cualquier punto (x , y) de esta curva es $3\sqrt{x}$, si el punto (9,4) esta en la curva, encontrar una ecuación de la curva.

Solución

Por la condición del problema: $mL_t = \dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt{x}$ de donde

$dy = 3\sqrt{x}\ dx$ integrando $\displaystyle\int dy = \int 3\sqrt{x}\ dx + c$

$y = 2x^{\frac{3}{2}} + c$ como la curva pasa por (9,4) entonces

$4 = 29^{\frac{3}{2}} + c \Rightarrow 4 = 54 + c \Rightarrow c = -50$ $\therefore$ $y = 2x\sqrt{x} - 50$

(7) La pendiente de una curva en cualquier punto (x,y) de ella es igual a $\cos x$. Encontrar una ecuación de la curva sí esta pasa por el punto $(\frac{\pi}{2},2)$

Solución

De la condición del problema se tiene: $mL_t = \frac{dy}{dx} = \cos x$

De donde $dy = \cos x\, dx$, integrando $\int dy = \int \cos x\; dx + k$

$y = \operatorname{sen} x + k$, como la curva pasa por el punto $(\frac{\pi}{2},2)$ entonces

$2 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + k \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + k$ de donde $k = 1 \qquad \therefore \quad y = \operatorname{sen} x + 1$

(8) En cada punto de una curva cuya ecuación es $y = f(x)$; $D_x^2 y = 6x - 2$, y en el punto $(1,2)$ la pendiente de la curva es 8. Halle una ecuación de la curva.

Solución

$$D_x y = \int D_x^2 y\, dx + k = \int (6x-2)\, dx + k = 3x^2 - 2x + k$$

$mL_t = D_x y|_{(1,2)} = 8$ entonces $3 - 2 + 4 = 8 \Rightarrow k = 7$

$$y = \int D_x y\; dx + c = \int (3x^2 - 2x + 7) dx + c$$

$y = x^3 - x^2 + 7x + c$, como la curva pasa por el punto $(1,2)$ se tiene:

$1 = 1 - 1 + 7 + 6 \quad \Rightarrow \quad c = -6 \qquad \therefore \quad y = x^3 - x^2 + 7x - 6$

(9) Una partícula se mueve en línea recta, $x(t)$ es la distancia dirigida por la partícula desde el origen en t seg. $V(t)$ es la velocidad de la partícula en t segundos, $a(t)$ es la aceleración de la partícula en t segundos.

a) $a(t)=5-2t$, $V(2)$ y $x=0$ cuando $t=0$ expresar $V(t)$, $x(t)$ en términos de t.

<u>Solución</u>

$a(t)=\frac{dv}{dt}=5-2t \Rightarrow dv=(5-2t)dt$, integrando:

$V(t)=5t-t^2+c$ para $V=2$ cuando $t=0 \Rightarrow c=2$

por lo tanto $\boxed{V(t)=5t-t^2+2}$

$V(t)=\frac{dx}{dt}=5t-t^2+2$ de donde $dx=(5t-t^2+2)dt$

$\int dx=\int(5t-t^2+2)dt+k \Rightarrow x(t)=\frac{5t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+2t+k$ como x = 0 cuando t = 0

0 = 0 – 0 + 0 + k entonces k = 0 $\therefore \boxed{x(t)=\frac{5t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+2t}$

b) $a(t)=3t-t^2$, $V=\frac{7}{6}$ y x = 1 cuando t = 1 expresar x y V en términos de t.

<u>Solución</u>

$a(t)=\frac{dV}{dt}=3t-t^2$ de donde $dV=(3t-t^2)dt$

$\int dV=\int(3t-t^2)dt+c \Rightarrow v(t)=\frac{3t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+c$

Como t = 1, $V=\frac{7}{6}$ se tiene $\frac{7}{6}=\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+c \Rightarrow$ c = 0

$$V(t)=\frac{3t^2}{2}-\frac{t^3}{3}$$

$$V(t)=\frac{dx}{dt}=\frac{3t^2}{2}-\frac{t^3}{3} \quad \text{de donde} \quad dx=(\frac{3t^2}{2}-\frac{t^3}{3})dt$$

$$\int dx=\int(\frac{3t^2}{2}-\frac{t^3}{3})dt+k \quad \Rightarrow \quad x(t)=\frac{t^3}{2}-\frac{t^4}{12}+k$$

Como $X(1)=1$ entonces $1=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}+k \quad \Rightarrow \quad k=\frac{7}{12}$

$$\therefore \quad x(t)=\frac{t^3}{2}-\frac{t^4}{12}+\frac{7}{12}$$

(10) La velocidad de una partícula que se desplaza a lo largo de una recta en el instante es $v(t)=t\sqrt{1+t^2}$. Determinar la distancia recorrida por la partícula desde el instante $t_1=\sqrt{8}$ hasta el instante $t_2=\sqrt{24}$

Solución

Sea $X(t)$ la posición de la partícula en el instante t entonces $X'(t)=v(t)=t\sqrt{1+t^2}$

La distancia recorrida des el instante t_1 hasta el instante t_2 es:

$$X(t_2)-X(t_1)=X(\sqrt{24})-X(\sqrt{8}) \qquad \ldots (1)$$

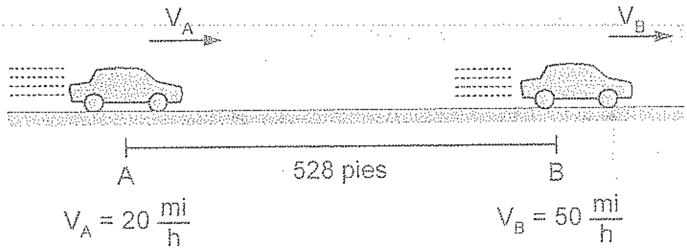
Como $X'(t)=v(t) \quad \Rightarrow \quad X(t)=\int v(t)dt+c \quad \Rightarrow \quad X(t)=\int t\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{1}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}+c$

$$X(\sqrt{24})=\frac{1}{3}(1+24)^{\frac{3}{2}}+c=\frac{125}{3}+c\,; \quad X(\sqrt{8})=\frac{1}{3}(1+8)^{\frac{3}{2}}+c=\frac{27}{3}+c$$

Reemplazando en (1): $X(\sqrt{24})-X(\sqrt{8})=(\frac{124}{3}+c)-(\frac{27}{3}+c)=\frac{98}{3}$

(11) Si el conductor de un automóvil desea aumentar su rapidez de 20 mi/h a 50 mi/h mientras corre una distancia de 528 pies ¿Cuál es la aceleración constante que debe mantener?

Solución



Se conoce que 1 milla = 528 pies, entonces:

$$V_A = 20\frac{mi}{h}.\frac{5280}{3600} = \frac{88}{3}\ pies/seg\ ; \quad V_B = 50\frac{mi}{h}.\frac{5280}{3600} = \frac{220}{3}\ pies/seg$$

Además $V(t) = \int a\,dt + c$ de donde $V(t) = at + c$

Cuando $t = 0$, $V = \frac{88}{3} \Rightarrow \frac{88}{3} = 0 + c \Rightarrow c = \frac{88}{3}$

$$\boxed{V(t) = at + \frac{88}{3}} \quad \ldots (1)$$

Además $x(t) = \int V(t)dt + k$, reemplazando $x(t) = \int (at + \frac{88}{3})dt + k = \frac{at^2}{2} + \frac{88t}{3} + k$

Cuando $t = 0, x = 0 \Rightarrow 0 = 0 + 0 + k \Rightarrow k = 0$ entonces: $\boxed{x(t) = \frac{at^2}{2} + \frac{88t}{3}}$ ... (2)

Ahora encontramos la aceleración cuando $V = \frac{220}{3}$, $t = ?$

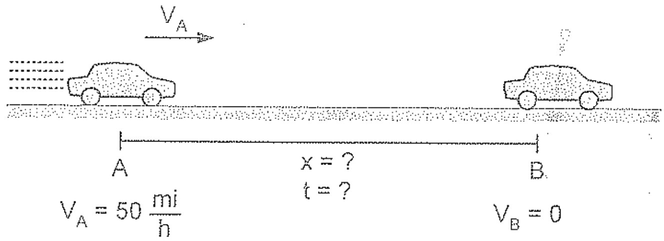
Reemplazando $V = \frac{220}{3}$ en (1): $\frac{220}{3} = at + \frac{88}{3} \Rightarrow t = \frac{132}{3a}$ ... (3)

Reemplazando $x = 528$ y (3) en (2): $528 = \frac{a}{2}(\frac{132}{3a}) + \frac{88}{3}(\frac{132}{3a}) \Rightarrow 9a(528) = 20328$

$$a = \frac{20328}{9(528)} \Rightarrow a = \frac{77}{18}\ pies/seg^2$$

(12) Si se aplica los frenos de un carro viajando a 50 mi/h y si los frenos pueden dar al carro una aceleración negativa constante de $20 pies/seg^2$. ¿Cuánto tardará el coche en detenerse? ¿Qué distancia recorrerá antes de parar?

Solución



$$V_A = 50\frac{mi}{h} = \frac{220}{3}\frac{pies}{seg}; \quad a = -20 pies/seg^2, \text{ además } V(t) = \int -20\ dt + c = -20t + c$$

Cuando t = 0, $V = \frac{220}{3}$ de donde $\frac{220}{3} = 0 + c \Rightarrow c = \frac{220}{3}$

$$\boxed{V(t) = -20t + \frac{220}{3}} \qquad \ldots (1)$$

Además $x(t) = \int V(t)dt + k = \int (-20t + \frac{220}{3})dt + k$

$x(t) = -10t^2 + \frac{220}{3}t + k$, cuando t = 0, x = 0

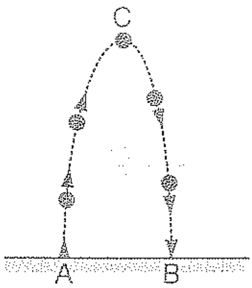
$0 = -0 + 0 + k$ de donde k = 0 entonces $x(t) = -10t^2 + \frac{220t}{3}$ ... (2)

Para hallar el tiempo que necesita para detenerse el carro es cuando V(t) = 0, t = ? en la ecuación (1) $0 = -20t + \frac{220}{3}$ entonces $t = \frac{11}{3} seg$

Luego la distancia recorrida es cuando $t = \frac{11}{3} seg$ en (2):

$$x(\frac{11}{3}) = -10(\frac{11}{3})^2 + \frac{220}{3}(\frac{11}{3}) = \frac{1210}{3} pies$$

(13) Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de 20 pies/seg. ¿Cuánto tiempo le tomará llegar al suelo y con qué velocidad llegará?. ¿Durante cuánto tiempo está subiendo la piedra y que tan alto llegará?



Solución

$V_A = 20\, pies/seg$

$T_{AB} = ?$ $T_{AC} = ?$ $V_F = ?$

a = -32 pies/seg. porque se opone el movimiento

como $a = \frac{dV}{dt} = -32 \Rightarrow V(t) = \int -32 dt \Rightarrow$ V(t) = -32t + c

para V = 20 pues/seg. cuando t = 0, x = 0 tenemos: 20 = -0 + c $\Rightarrow$ c = 20

Luego: V(t) = -32t + 20 $\Rightarrow$ $V(t) = \frac{dx}{dt} = -32t + 20$ $\Rightarrow$ dx = (-32t + 20)dt

Integrando: $\int dx = \int (-32t + 20)dt + k \Rightarrow x(t) = -16t^2 + 20t + k$

Para x = 0 cuando t = 0 $\Rightarrow$ 0 = -0 + 0 + k $\Rightarrow$ k = 0

Luego se tiene: $x(t) = -16t^2 + 20t$

T_{AB} es el tiempo que demora en llegar al suelo, para esto x = 0 $\Rightarrow$ $-16t^2 + 20t = 0$

$\Rightarrow$ t = 0, $t = \frac{5}{4}$, el tiempo que demora en caer es $\frac{5}{4} seg$ y la velocidad con que llega

al suelo es $V = -32(\frac{5}{4}) + 20 = -20 \frac{pies}{seg}$, por lo tanto V = 20 pies/seg. es la velocidad

con que llega al suelo; el tiempo que demora en subir es $\frac{t}{2}$ es decir $\frac{5}{8} seg$

1.5.13. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS.-

① Hallar la solución general de la ecuación diferencial

a) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y(1+x^3)}$ **Rpta.** $3y^2-2\ln(1+x^2)=c$

b) $\sqrt{1+x^3}\,\frac{dy}{dx}=x^2y+x^2$ **Rpta.** $2\sqrt{1+x^3}=3\ln(y+1)+c$

c) $\frac{dy}{dx}=1+x+y^2+xy^2$ **Rpta.** $arctg\, y-x-\frac{x^2}{2}=c$

d) $\frac{dy}{dx}=-\frac{e^{-x}+x}{y+e^y}$ **Rpta.** $y^2-x^2+2(e^y-e^{-x})=c$

e) $(x-y^2x)dx+(y-x^2y)dy=0$ **Rpta.** $(x^2-1)(y^2-1)=k$

f) $(x+x\sqrt{y})dy+y\sqrt{y}dx=0$ **Rpta.** $-\frac{2}{\sqrt{y}}+\ln xy=c$

g) $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$ **Rpta.** $1+e^y=c(1+x^2)$

h) $(e^y+1)\cos x\ dx+e^y(sen\,x+1)dy=0$ **Rpta.** $(sen\,x+1)(e^y+1)=k$

② Hallar la solución particular de la ecuación diferencial con las condiciones iniciales.

a) $\frac{dy}{dx}=3x^2+\frac{2}{x^2}$, y(1) = 1 **Rpta.** $y=\frac{3x^4}{4}-\frac{2}{x}+\frac{9}{4}$

b) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$, y(2) = -1 **Rpta.** $y=2\sqrt{x+2}-5$

c) $y^2\frac{dy}{dx}-x^2=0$, y(-2) = -2 **Rpta.** y = x

d) $(4x+xy^2)dx+(y+x^2y)dy=0$; y(1) = 2 **Rpta.** $(1+x^2)(1+y^2)=16$

e) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2y-y}{y+1}$, $y(3)=1$ **Rpta.** $x^3-3x-3y-3\ln|y|=21$

f) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-6x^2y}{y-x^3y}$, $y(3)=1$ **Rpta.** $(x^3-1)^4=26^4(2y^2-1)$

g) $\dfrac{dy}{dx}-2y\,ctg\,x=0$, $y(\dfrac{\pi}{2})=2$ **Rpta.** $y=2sen^2x$

h) $x(y^6+1)dx+y^2(x^4+1)dy=0$ **Rpta.** $3arctg\ x^2+2arctg\ y^3=\dfrac{\pi}{2}$

③ Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 128 pies/seg. Si la única fuerza que se considera es la atribuida a la aceleración de la gravedad, determinar:

a) Cuánto tiempo tardará la piedra en chocar contra el suelo.

b) La velocidad con la cual chocara contra el suelo.

c) A qué altura se elevara la piedra en su ascenso.

Rpta. a) 8 seg. b) 128 pies/seg. c) 256 pies

④ Una pelota se deja caer desde la cúspide del monumento a Washington, el cual tiene 555 pies de altura.

a) ¿Cuánto tiempo tomará a la pelota llegar al suelo?

b) ¿A qué velocidad chocará la pelota con el suelo?

Rpta. a) $\dfrac{1}{4}\sqrt{555}\ seg$ b) $8\sqrt{555}\ pies/seg$

⑤ En un movimiento rectilíneo, la función aceleración de un punto es a(t) = -32 en el instante $t \geq 0$. Si la velocidad del punto es -20 cuando t = 0, y la posición del mismo punto en 10 unidades en al dirección positiva cuando t = 0, encuentre la función velocidad V(t) y la función de posición x(t).

Rpta. V(t) = -32t – 20 , $x(t)=-16t^2-20t+10$

6. Una mujer que se encuentra en un globo deja caer sus binoculares cuando el globo está a 150 pies de altura sobre el suelo y se eleva a razón de 10 pie/seg.

   a) ¿Cuánto tiempo tardarán los binoculares en llegar al suelo?

   b) ¿Cuál es la velocidad de los binoculares al momento del impacto?

   Rpta. a) 3.4 seg. b) 99 pie/seg.

7. Usted arroja una pelota hacia arriba, desde el suelo, con una velocidad inicial de 97 pie/seg. ¿A qué altura sube la pelota, y por cuánto tiempo permanece en el aire?

   Rpta. 144 pies , 6 seg.

8. Laura suelta una piedra a un pozo, esta llega al fondo 3 seg., después ¿Cuál es la profundidad del pozo? **Rpta.** 144 pies

9. Efraín arroja una pelota hacia arriba, con una velocidad inicial de 48 pies/seg. desde la parte superior de un edificio de altura 160 pies. La pelota cae al suelo en la base del edificio ¿Cuánto permanece la pelota en el aire, y con que velocidad golpea al suelo?

   Rpta. 5 seg. , 112 pies/seg.

10. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 40 pies/seg. desde un punto situado a 20 pies sobre el nivel del suelo.

    a) Si v pies/seg. es la velocidad de la pelota cuando está a x pies del punto inicial exprese v en términos de x.

    b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando ésta se encuentra a 36 pies del suelo y sigue ascendiendo?

    Rpta. a) $v^2 = -64x + 1600$ b) 24 pies/seg.

11. Una partícula se desplaza en línea recta en forma tal que sí v cm./seg. es la velocidad de la partícula a los t segundos, entonces $V(t) = \operatorname{sen} \pi t$, donde el sentido positivo es a la derecha del origen. Si la partícula está en el origen del inicio del movimiento, determine su posición $\frac{2}{3}$ segundos más tarde.

    Rpta. $\frac{3}{2\pi}$ cm. a la derecha del origen.

(12) Juanito arroja una piedra hacia arriba, desde el suelo. La piedra alcanza una altura máxima de 225 pies ¿Cuál era su velocidad inicial? **Rpta.** 120 pies/seg.

(13) Gálvez arroja una pelota de tenis hacia arriba, desde la parte superior de un edificio de 400 pies de altura ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al suelo? ¿Con qué velocidad golpea al suelo? **Rpta.** 5 seg. y -160 pies/seg.

(14) Se arroja una pelota hacia arriba, desde el suelo, con una velocidad inicial de 160 pies/seg. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? **Rpta.** 400 pies

(15) Si el conductor de un automóvil desea aumentar la velocidad de 40 Km./hr a 100 Km./hr al recorrer una distancia de 200 m ¿Cuál es la aceleración constante que debe mantenerse? **Rpta.** $1.62\dfrac{m}{seg^2}$

(16) El punto (3,2) está en una curva y en cualquier punto (x,y) de la curva, la recta tangente tiene una pendiente igual a 2x – 3. Encontrar una ecuación de la curva.

Rpta. $y = x^2 - 3x + 2$

(17) En cualquier punto (x,y) de una curva $D_x^2 y = 1 - x^2$, y una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (1,1) es y = 2 – x. Encontrar una ecuación de la curva.

Rpta. $12y = 6x^2 - x^4 - 20x + 27$

(18) Los puntos (-1,3) y (0,2) están en una curva y en cualquier punto (x,y) de la curva $D_x^2 y = 2 - 4x$. Encontrar una ecuación de la curva. **Rpta.** $3y = 3x^2 - 2x^3 + 2x + c$

(19) Encontrar la curva que pasa por el punto (1,2) cuya normal en cualquier punto (excepto en x = 0) se biseca por el eje X. **Rpta.** $y^2 + 2x^2 = 6$

(20) La pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x,y) en una curva es 10 – 4x y el punto (1,-1) está en la curva. Encontrar una ecuación de la curva.

Rpta. $y = 10x - 2x^2 - 9$

1.6. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.-

Entre los métodos de integración que se va ha estudiar se tiene: Integración de las funciones trigonométricas, integración por partes y casos especiales, integración por sustitución trigonométrica, integración de funciones racionales por descomposición en fracciones parciales, el Método de Ortrograski, integración de funciones racionales de seno y coseno, integración de algunas funciones irracionales entre ellas las binomiales con la combinación de CHEBICHEV.

1.6.1. INTEGRACIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.-

Se trata de las integrales que tiene la forma siguiente:

$$\int sen^n x\,dx,\quad \int \cos^n x\,dx,\quad \int tg^n x\,dx,\quad \int ctg^n x\,dx,$$

$$\int sen^m x\cos^n x\,dx,\quad \int tg^m x\sec^n x\,dx,\quad \int ctg^m x\cos ec^n x\,dx$$

Para calcular estas integrales, aplicaremos los criterios siguientes:

A) **Para el cálculo de las integrales de la forma:**

$$\int sen^n x\,dx,\quad \int \cos^n x\,dx$$

Se presentan dos casos:

1er. Caso.- Cuando n es un número entero positivo par, se usan las identidades siguientes:

$$sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

2do. Caso.- Cuando n es un número entero positivo impar, a las integrales de este caso expresaremos en la forma:

$$\int sen^n x\,dx = \int sen^{n-1} x.sen\,x\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x.\cos x\,dx$$

Luego se usa la identidad $sen^2 x + \cos^2 x = 1$

Ejemplos de aplicación de este criterio.

Calcular las integrales siguientes:

① $\int sen^2 3x\,dx$

Solución

Observamos que el exponente es par, entonces usamos la identidad

$sen^2 3x = \dfrac{1-\cos 6x}{2}$, luego al reemplazar en la integral dada se tiene:

$$\int sen^2 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 6x)dx = \frac{1}{2}(x - \frac{sen\,6x}{6}) + c = \frac{x}{2} - \frac{sen 6x}{12} + c$$

OBSERVACION.- En forma práctica se puede calcular las siguientes integrales:

$$\int \text{sen}(nx)dx = -\frac{\cos(nx)}{n} + c \quad ; \quad \int \cos(nx)dx = \frac{\text{sen}(nx)}{n} + c$$

Ejemplo 1: $\int \text{sen}(20x)dx = -\dfrac{\cos(20x)}{20} + c$

Ejemplo 2: $\int \cos(18x)\,dx = \dfrac{\text{sen}(18x)}{18} + c$

En forma similar ocurre en las integrales de las demás funciones trigonométricas.

② $\int \cos^4 2x\,dx$

Solución

Observamos que el exponente de la función es par, entonces usaremos la identidad: $\cos^2 2x = \dfrac{1+\cos 4x}{2}$, por lo tanto:

$$\int \cos^4 2x\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 4x+\cos^2 4x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 4x+\frac{1+\cos 8x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2}+2\cos 4x+\frac{\cos 8x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 4x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 8x}{16}\right)+c$$

(3) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 4x \quad dx$

Solución

Observemos que el exponente de la función es impar, entonces a la integral escribiremos así:

$$\int \operatorname{sen}^3 4x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 4x.\operatorname{sen} 4x\, dx = \int (1-\cos^2 4x)\operatorname{sen} 4x\, dx$$

$$= \int \operatorname{sen} 4x\, dx - \int \cos^2 4x.\operatorname{sen} 4x\, dx = -\frac{\cos 4x}{4}+\frac{\cos^3 4x}{12}+c$$

Observación.- En forma práctica se puede integrar las siguientes funciones.

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^n(kx)\cos(kx)dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1}(kx)}{(n+1)k}+c \quad ; \quad \int \cos^n(kx)\operatorname{sen}(kx)dx = -\frac{\cos^{n+1}(kx)}{(n+1)k}+c}$$

Ejemplo 1: $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{19} 2x.\cos 2x \quad dx = \frac{\operatorname{sen}^{20} 2x}{40}+c$

Ejemplo 2: $\displaystyle\int \cos^{29} 3x.\operatorname{sen} 3x \quad dx = -\frac{\cos^{30} 3x}{90}+c$

En forma similar ocurre en las integrales de las demás expresiones trigonométricas.

(4) $\int \cos^5 3x \ dx$

Solución

Observemos que el exponente de la función es impar, entonces a la integral expresamos así:

$$\int \cos^5 3x\,dx = \int \cos^4 3x.\cos 3x\,dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 3x)^2 \cos 3x\,dx$$

$$= \int (1-2\operatorname{sen}^2 3x + \operatorname{sen}^4 3x)\cos 3x\,dx$$

$$= \int \cos 3x\,dx - 2\int \operatorname{sen}^2 3x.\cos 3x\,dx + \int \operatorname{sen}^4 3x.\cos 3x\,dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{2\operatorname{sen}^3 3x}{9} + \frac{\operatorname{sen}^5 3x}{15} + c$$

B) Para el cálculo de las integrales de la forma

$$\boxed{\int \operatorname{tg}^n x \ dx \ , \ \int c\operatorname{tg}^n x \ dx}$$

Se presentan los siguientes casos:

1er. Caso.- Si n es un número entero par positivo, a las integrales dadas se expresan así:

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x.\operatorname{tg}^2 x\,dx$$

$$\int c\operatorname{tg}^n x\,dx = \int c\operatorname{tg}^{n-2} x.c\operatorname{tg}^2 x\,dx$$

Luego se usan las identidades siguientes.

$$\boxed{1+\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \ ; \ 1+c\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x}$$

2do. Caso.- Si n es un número entero positivo impar, a las integrales dadas se expresan en la forma:

$$\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \int \operatorname{tg}^{n-1} x.\operatorname{tg} x\, dx = \int \left[\operatorname{tg}^2 x\right]^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg} x\, dx$$

$$\int c\operatorname{tg}^n x\ dx = \int c\operatorname{tg}^{n-1} x.c\operatorname{tg} x\ dx = \int [c\operatorname{tg}^2 x]^{\frac{n-1}{2}}\ c\operatorname{tg} x\ dx$$

Luego se usan las identidades siguientes.

$$\boxed{1+\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \quad ; \quad 1+c\operatorname{tg}^2 x = \cos ec^2 x}$$

Ejemplos de aplicación de este criterio

Calcular las siguientes integrales.

① $\int \operatorname{tg}^2 4x\ \ dx$

Solución

Observamos que el exponente de la función es par, entonces de acuerdo al criterio establecido expresamos: $\int \operatorname{tg}^2 4x\, dx = \int (\sec^2 4x - 1) dx = \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{4} - x + c$

② $\int c\operatorname{tg}^4 4x\ \ dx$

Solución

En forma similar al ejemplo anterior, por tener el exponente par; a là integral expresaremos así:

$$\int c\operatorname{tg}^4 4x\, dx = \int c\operatorname{tg}^2 4x.c\operatorname{tg}^2 4x\, dx = \int c\operatorname{tg}^2 4x\left(\cos ec^2 4x - 1\right) dx$$

$$= \int c\operatorname{tg}^2 4x.\cos ec^2 4x\, dx - \int c\operatorname{tg}^2 4x\, dx$$

$$= -\frac{c\,\text{tg}^3 4x}{12} - \int (\cos ec^2 4x - 1)dx = -\frac{c\,\text{tg}^3 4x}{12} + \frac{c\,\text{tg}\,4x}{4} + x + c$$

(3) $\int \text{tg}^6 5x \quad dx$

Solución

Observemos que el exponente de la función es par, entonces a la integral expresamos así:

$$\int \text{tg}^6 5x\,dx = \int \text{tg}^4 5x.\text{tg}^2 5x\,dx = \int \text{tg}^4 5x(\sec^2 5x - 1)dx$$

$$= \int \text{tg}^4 5x.\sec^2 5x - \int \text{tg}^4 5x\,dx = \frac{\text{tg}^5 5x}{25} - \int \text{tg}^2 5x(\sec^2 5x - 1)dx$$

$$= \frac{\text{tg}^5 5x}{25} - \int \text{tg}^2 5x \sec^2 5x\,dx + \int \text{tg}^2 5x\,dx$$

$$= \frac{\text{tg}^5 5x}{25} - \frac{\text{tg}^3 5x}{15} + \int (\sec^2 5x - 1)dx = \frac{\text{tg}^5 5x}{25} - \frac{\text{tg}^3 5x}{15} + \frac{\text{tg}\,5x}{5} - x + c$$

(4) $\int \text{tg}^3 5x\;dx$

Solución

Observamos que el exponente de la función es impar, entonces a la integral expresamos así:

$$\int \text{tg}^3 5x\,dx = \int \text{tg}^2 5x.\text{tg}\,5x\,dx = \int (\sec^2 5x - 1)\,\text{tg}\,5x\,dx = \frac{\text{tg}^2 5x}{10} - \frac{\ln|\sec 5x|}{5} + c$$

(5) $\int c\,\text{tg}^5 3x\;dx$

Solución

Como el exponente de la función es impar, entonces a la integral escribiremos en la forma:

$$\int c\operatorname{tg}^5 3x\,dx = \int c\operatorname{tg}^4 3x.c\operatorname{tg}3x\,dx = \int (\cos ec^2 3x-1)^2 c\operatorname{tg}3x\,dx$$

$$= \int (\cos ec^4 3x - 2\cos ec^2 3x + 1)c\operatorname{tg}3x\,dx$$

$$= \int \cos ec^3 3x.\cos ec3x.c\operatorname{tg}3x\;dx - 2\int c\operatorname{tg}3x.\cos ec^2 3x\;dx + \int c\operatorname{tg}3x\;dx$$

$$= -\frac{\cos ec^4 3x}{12} + \frac{c\operatorname{tg}^2 3x}{3} + \frac{\ln|\operatorname{sen}3x|}{3} + c$$

C) **Para el cálculo de las integrales de la forma.**

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^m x.\cos^n x dx}$$

Se presentan los siguientes casos:

1er Caso. Si m ó n, es decir, cualquiera de los exponentes es un número entero positivo impar y el otro es cualquier número, se procede de la siguiente manera.

i) Suponiendo que m es un número impar y n es cualquier número, entonces a la integral expresamos así:

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^m x.\cos^n x\;dx = \int \operatorname{sen}^{m-1} x.\cos^n x.\operatorname{sen}x\;dx}$$

Luego se usa la identidad: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

ii) Suponiendo que n es un número entero impar y m es cualquier número, se procede de la siguiente manera.

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^m x.\cos^n x\;dx = \int \operatorname{sen}^m x.\cos^{n-1} x.\cos x\;dx}$$

Luego se usa la identidad: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

2do. Caso. Si m y n los dos exponentes son números enteros positivos pares, se usan las identidades siguientes:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad ; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}}$$

y con estas sustituciones la integral $\int \operatorname{sen}^m x.\cos^n x\, dx$ se transforma en integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$, las cuales han sido estudiadas anteriormente.

Ejemplos de aplicación de éste criterio.

Calcular las siguientes integrales.

① $\int \cos^3 x.\operatorname{sen}^4 x \quad dx$

<u>**Solución**</u>

Como uno de los exponentes es impar, entonces a la integral dada escribiremos así:

$$\int \cos^3 x.\operatorname{sen}^4 x\, dx = \int \cos^2 x.\operatorname{sen}^4 x.\cos x\, dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}^4 x \cos x\, dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^4 x \cos x\, dx - \int \operatorname{sen}^6 x \cos x\, dx = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x - \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x + c$$

② $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\ dx$

<u>**Solución**</u>

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}.\frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}(x - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}) + c$$

③ $\int \operatorname{sen}^5 x.\cos^2 x \; dx$

Solución

Como uno de los exponentes es impar, entonces a la integral dada escribiremos así:

$$\int \operatorname{sen}^5 x.\cos^2 x\,dx = \int \operatorname{sen}^4 x.\cos^2 x.\operatorname{sen} x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x.\operatorname{sen} x\,dx$$

$$= \int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx$$

$$= \int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx - 2\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\,dx + \int \cos^6 x \operatorname{sen} x\,dx$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

④ $\int \operatorname{sen}^4 x.\cos^2 x \; dx$

Solución

Como los dos exponentes son pares, entonces se usan las identidades:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad ; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x.\cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x(1-\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int \operatorname{sen}^2 2x\,dx - \int \operatorname{sen}^2 2x.\cos 2x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{6}\right] + c = \frac{1}{8}\left[\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} x}{8} - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{6}\right] + c$$

⑤ $\int \cos^7 x.\text{sen}^3 x\ dx$

Solución

Observamos que los exponentes son impares, entonces a la integral dada expresamos así:

$$\int \cos^7 x.\text{sen}^3 x\,dx = \int \cos^7 x.\text{sen}^2 x.\text{sen}\,x\,dx = \int \cos^7 x(1+\cos^2 x)\,\text{sen}\,x\,dx$$

$$= \int \cos^7 x.\text{sen}\,x\,dx - \int \cos^9 x.\text{sen}\,x\,dx = -\frac{\cos^8 x}{8} + \frac{\cos^{10} x}{10} + c$$

⑥ $\int \text{sen}^2 3x.\cos^4 3x\ dx$

Solución

Como los exponentes son pares, entonces usaremos las identidades:

$$\text{sen}^2 3x = \frac{1-\cos 6x}{2} \quad ; \quad \cos^2 3x = \frac{1+\cos 6x}{2}$$

$$\int \text{sen}^2 3x.\cos^4 3x\,dx = \int (\frac{1-\cos 6x}{2})(\frac{1+\cos 6x}{2})^2\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 6x)(1+\cos 6x)dx = \frac{1}{8}\int \text{sen}^2 6x(1+\cos 6x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int \text{sen}^2 6x\,dx + \int \text{sen}^2 6x\cos 6x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1-\cos 12x}{2}\,dx + \frac{\text{sen}^3 6x}{18}\right] + c$$

$$= \frac{1}{8}(\frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\,12x}{24} + \frac{\text{sen}^3 6x}{18}) + c = \frac{x}{16} - \frac{\text{sen}\,2x}{192} + \frac{\text{sen}^3 6x}{144} + c$$

D) Para el cálculo de las integrales de la forma

$$\boxed{\int \operatorname{tg}^n x.\sec^m x\, dx \quad ; \quad \int c\operatorname{tg}^n x \cos ec^m x\, dx}$$

Se presentan dos casos:

1er. Caso. Cuando n es un número positivo impar y m es cualquier número, a las integrales escribiremos en la forma:

$$\int \operatorname{tg}^n x.\sec^m x\, dx = \int \operatorname{tg}^{n-1} x.\sec^{m-1} x.\operatorname{tg} x.\sec x\, dx$$

$$\int c\operatorname{tg}^n x \cos ec^m x\, dx = \int c\operatorname{tg}^{n-1} x.\cos ec^{m-1} x.c\operatorname{tg} x.\cos ecx\, dx$$

Luego se usa las identidades siguientes.

$$\boxed{1+\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \quad , \quad 1+c\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x}$$

2do. Caso. Cuando m es un número entero positivo par y n es cualquier número, entonces a las integrales se escribe así:

$$\int \operatorname{tg}^n x.\sec^m x\, dx = \int \operatorname{tg}^n x.\sec^{m-2} x.\sec^2 x\, dx$$

$$\int c\operatorname{tg}^n x \cos ec^m x\, dx = \int c\operatorname{tg}^n x.\cos ec^{m-2} x.\cos ec^2 x\, dx$$

Luego se usa las identidades siguientes.

$$\boxed{1+\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \quad , \quad 1+c\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x}$$

Observación:

1) Cuando n es un número entero positivo impar y m es un número entero positivo par, se puede aplicar cualquiera de los dos casos.

2) Si n es par y m es impar se aplica el 1er. caso.

Ejemplo de aplicación de éste criterio.

Calcular las siguientes integrales.

① $\int \sec^4 2x.\operatorname{tg}^2 2x\,dx$

Solución

Observemos que el exponente de la $\sec 2x$ es par, entonces a la integral escribiremos así:

$$\int \sec^4 2x.\operatorname{tg}^2 2x\,dx = \int \sec^2 2x.\operatorname{tg}^2 2x.\sec^2 2x\,dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 2x)\operatorname{tg}^2 2x.\sec^2 2x\,dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 2x.\sec^2 2x\,dx + \int \operatorname{tg}^4 2x.\sec^2 2x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{6} + \frac{\operatorname{tg}^5 2x}{10} + c$$

② $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}.\sec^6 x\,dx$

Solución

Como el exponente de $\sec x$ es par, entonces a la integral dada escribiremos así:

$$\int \sqrt{\operatorname{tg} x}.\sec^6 x\,dx = \int \operatorname{tg}^{1/2} x.\sec^4 x.\sec^2 x\,dx = \int \operatorname{tg}^{1/2} x(1+\operatorname{tg}^2 x)^2 \sec^2 x\,dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^{1/2} x.\sec^2 x\,dx + 2\int \operatorname{tg}^{5/2} x.\sec^2 x\,dx + \int \operatorname{tg}^{9/2} x.\sec^2 x\,dx$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}^{3/2} x}{3} + \frac{4\operatorname{tg}^{7/2} x}{7} + \frac{2}{11}\operatorname{tg}^{11/2} x + c$$

③ $\int \operatorname{tg}^3 3x.\sec^3 3x\,dx$

Solución

Como el exponente de la $\operatorname{tg} 3x$ es impar, entonces a la integral dada escribiremos así.

$$\int \operatorname{tg}^3 3x.\sec^3 3x\,dx = \int \operatorname{tg}^2 3x.\sec^2 3x.\operatorname{tg} 3x.\sec 3x\,dx$$

$$= \int (\sec^2 3x - 1)\sec^2 3x.\operatorname{tg} 3x.\sec 3x\, dx$$

$$= \int \sec^4 3x.tg3x.\sec 3x\, dx - \int \sec^2 3x.tg3x.\sec 3x\, dx$$

$$= \frac{\sec^5 3x}{15} - \frac{\sec^3 3x}{9} + c$$

④ $\int c\operatorname{tg}^5 x.\cos ec^4 x\ dx$

Solución

Como el exponente de la $\operatorname{cosec} x$ es par, entonces a la integral escribiremos así:

$$\int c\operatorname{tg}^5 x.\cos ec^4 x\ dx = \int c\operatorname{tg}^5 x.\cos ec^2 x.\cos ec^2 x\ dx$$

$$= \int c\operatorname{tg}^5 x(1 + c\operatorname{tg}^2 x)\cos ec^2 x\ dx$$

$$= \int c\operatorname{tg}^5 x.\cos ec^2 x\ dx + \int c\operatorname{tg}^7 x.\cos ec^2 x\ dx$$

$$= -\frac{c\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{c\operatorname{tg}^8 x}{8} + c$$

NOTA. Cuando en las integrales se observa que no se adapta a los casos estudiados, es conveniente transformarlo a estos casos, utilizando las identidades trigonométricas.

Ejemplo.- Calcular las siguientes integrales.

① $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x}$

Solución

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x.\cos^4 x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}\right) dx$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^4 x}+\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}=\int\sec^4 x\,dx+\int\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x.\cos^2 x}dx$$

$$=\int(1+\operatorname{tg}^2 x)\sec^2 x\,dx+\int(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x})dx$$

$$=\int\sec^2 x\,dx+\int\operatorname{tg}^2 x.\sec^2 x\,dx+\int\sec^2 x\,dx+\int\cos ec^2 x\,dx$$

$$=\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\operatorname{tg} x-c\operatorname{tg} x+c=2\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-c\operatorname{tg} x+c$$

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x.\cos^3 x}}$

Solución

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x.\cos^3 x}}=\int\frac{\sec^2 x\,dx}{\sec^2 x\sqrt{\operatorname{sen} x.\cos^3 x}}=\int\frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x.\sec^4 x.\cos^3 x}}$$

$$=\int\frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x.\sec x}}=\int\frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=\int\operatorname{tg}^{-1/2} x.\sec^2 x\,dx=2\sqrt{\operatorname{tg} x}+c$$

(3) $\displaystyle\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^7 2x.\cos x}}$

Solución

$$\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^7 2x.\cos x}}=\int\frac{\cos x\,dx}{4\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\operatorname{sen}^7 x.\cos^8 x}}=\frac{1}{4\sqrt[3]{2}}\int\frac{\sec^5 x.\cos x\,dx}{\sec^5 x\sqrt[3]{\operatorname{sen}^7 x.\cos^8 x}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt[3]{2}}\int\frac{\sec^4 x\,dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^7 x}}=\frac{1}{4\sqrt[3]{2}}\int\frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg}^{7/3} x}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt[3]{2}}\left[\int\operatorname{tg}^{-7/3} x.\sec^2 x\,dx+\int\operatorname{tg}^{-1/3} x.\sec^2 x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{4\sqrt[3]{2}}\left[-\frac{3}{4}\operatorname{tg}^{-4/3} x + \frac{3}{2}\operatorname{tg}^{2/3} x\right] + c$$

$$= \frac{1}{4\sqrt[3]{2}}\left(-\frac{3}{4} c\operatorname{tg}^{4/3} x + \frac{3}{2}\operatorname{tg}^{2/3} x\right) + c$$

1.6.2 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Calcular las siguientes integrales.

1) $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$ Rpta. $\frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + c$

2) $\int \cos^5 x\, dx$ Rpta. $\operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + c$

3) $\int \cos^4 3x\, dx$ Rpta. $\frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 6x}{12} + \frac{\operatorname{sen} 12x}{96} + c$

4) $\int \operatorname{sen}^6 2x\, dx$ Rpta. $\frac{1}{8}\left(\frac{5x}{2} - \operatorname{sen} 4x + \frac{3\operatorname{sen} 8x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 4x}{12}\right) + c$

5) $\int \operatorname{sen}^5 \left(\frac{x}{2}\right) dx$ Rpta. $-2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{4}{3}\cos^3\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{5}\cos^5\left(\frac{x}{2}\right) + c$

6) $\int (\operatorname{sen}^2 3x + \cos 3x)^2 dx$ Rpta. $\frac{7x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 12x}{96} + 2\frac{\operatorname{sen}^3 3x}{9} + c$

7) $\int \cos^6 3x\, dx$ Rpta. $\frac{5x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 6x}{12} - \frac{\operatorname{sen}^3 6x}{144} + \frac{\operatorname{sen} 12x}{64} + c$

8) $\int x\cos^3(x^2) dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 x^2 + c$

9) $\int (\operatorname{sen}^2 x + \cos x)^2 dx$ Rpta. $\frac{7x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + \frac{2\operatorname{sen}^3 x}{3} + c$

10) $\int \operatorname{tg}^6 x\, dx$ Rpta. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + c$

(11) $\int c\operatorname{tg}^5 x\,dx$ **Rpta.** $-\frac{1}{4}c\operatorname{tg}^4 x+\frac{1}{2}c\operatorname{tg}^2 x+\ln|\operatorname{sen} x|+c$

(12) $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$ **Rpta.** $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+c$

(13) $\int c\operatorname{tg}^4(3x)dx$ **Rpta.** $-\frac{1}{9}c\operatorname{tg}^3 3x+\frac{1}{3}c\operatorname{tg}3x+x+c$

(14) $\int c\operatorname{tg}^3 2x\,dx$ **Rpta.** $-\frac{c\operatorname{tg}^2 2x}{4}-\frac{\ln|\operatorname{sen}2x|}{2}+c$

(15) $\int \operatorname{tg}^2(x+1)dx$ **Rpta.** $\operatorname{tg}(x+1)-x+c$

(16) $\int c\operatorname{tg}^5 2x\,dx$ **Rpta.** $-\frac{\cos ec^4 2x}{8}+\frac{c\operatorname{tg}^2 2x}{2}+\frac{\ln|\operatorname{sen}2x|}{2}+c$

(17) $\int c\operatorname{tg}^3(\frac{x}{3})dx$ **Rpta.** $-\frac{3}{2}c\operatorname{tg}^2(\frac{x}{3})-3\ln|\operatorname{sen}\frac{x}{3}|+c$

(18) $\int \operatorname{tg}^5 3x\,dx$ **Rpta.** $\frac{1}{12}\sec^4 3x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2 3x+\frac{1}{3}\ln|\sec 3x|+c$

(19) $\int c\operatorname{tg}^4 2x\,dx$ **Rpta.** $x+\frac{c\operatorname{tg}2x}{2}-\frac{c\operatorname{tg}^3 2x}{6}+c$

(20) $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$ **Rpta.** $\frac{\sec^4 x}{4}-\operatorname{tg}^2 x+\ln|\sec x|+c$

(21) $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$ **Rpta.** $\frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2} x+c$

(22) $\int \sqrt{\cos x}\operatorname{sen}^3 x\,dx$ **Rpta.** $\frac{2}{7}\cos^{7/2} x-\frac{2}{3}\cos^{3/2} x+c$

(23) $\int \sqrt[3]{\cos x}\operatorname{sen}^5 x\,dx$ **Rpta.** $-\frac{3}{4}\cos^{4/3} x+\frac{3}{5}\cos^{10/3} x-\frac{3}{16}\cos^{16/3} x+c$

(24) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x\,dx}{\cos^2 x\ \sqrt[3]{\cos x}}$ Rpta. $\frac{3}{4}\cos^{-4/3} x+\frac{3}{2}\cos^{2/3} x+c$

(25) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^7 5x.\cos^3 5x\ dx$ Rpta. $\frac{\operatorname{sen}^8 5x}{40}-\frac{\operatorname{sen}^{10} 5x}{50}+c$

(26) $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{sen} x}.\cos^5 x\ dx$ Rpta. $2\sqrt{\operatorname{sen} x}(\frac{\operatorname{sen} x}{3}-\frac{2}{7}\operatorname{sen}^3 x+\frac{1}{11}\operatorname{sen}^5 x)+c$

(27) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\cos^2 x\ dx$ Rpta. $-\frac{\cos^7 x}{7}+\frac{2}{5}\cos^5 x-\frac{\cos^3 x}{3}+c$

(28) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\cos^3 x\ dx$ Rpta. $\frac{\operatorname{sen}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{sen}^6 x}{6}+c$

(29) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(\frac{x}{2})\cos^2(\frac{x}{2})dx$ Rpta. $\frac{x}{16}-\frac{\operatorname{sen} x.\cos x}{16}-\frac{\operatorname{sen}^3 x}{24}+c$

(30) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\cos^4 x\ dx$ Rpta. $\frac{1}{128}(3x-\operatorname{sen} 4x+\frac{1}{8}\operatorname{sen} 8x)+c$

(31) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(\frac{x}{2})\cos^7(\frac{x}{2})dx$ Rpta. $\frac{1}{5}\cos^{10}(\frac{x}{2})-\frac{1}{4}\cos^3(\frac{x}{2})+c$

(32) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 3x\cos^5 3x\ dx$ Rpta. $\frac{\cos^8 3x}{24}-\frac{\cos^6 3x}{18}+c$

(33) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}dx$ Rpta. $2\sqrt{\operatorname{sen} x}-\frac{4}{5}\operatorname{sen}^{5/2} x+\frac{2}{9}\operatorname{sen}^{9/2} x+c$

(34) $\displaystyle\int \cos^4 2x\operatorname{sen}^3 2x\ dx$ Rpta. $-\frac{1}{10}\cos^5 2x+\frac{1}{14}\cos^7 2x+c$

(35) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^5 x\ dx$ Rpta. $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}-\frac{2}{5}\operatorname{sen}^5 x+\frac{\operatorname{sen}^7 x}{7}+c$

(36) $\int \operatorname{sen}^5 2x.\cos^3 2x\ dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^6 2x-\frac{1}{16}\operatorname{sen}^8 2x+c$

(37) $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}dx$ Rpta. $\frac{1}{3\cos^3 x}-\sec x+c$

(38) $\int \sec^4 x\sqrt{c\operatorname{tg}^3 x}\,dx$ Rpta. $-2\sqrt{c\operatorname{tg} x}+\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}+c$

(39) $\int \operatorname{tg}^5 x\sqrt{\cos^3 x}\ dx$ Rpta. $\frac{2}{5}\sec^{5/2} x-4\sec^{1/2} x-\frac{2}{3}\cos^{3/2} x+c$

(40) $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx$ Rpta. $\cos ecx-\frac{1}{3}\cos ec^3 x+c$

(41) $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$ Rpta. $\sqrt[3]{\sec x}(\frac{3}{5}\cos^2 x+3)+c$

(42) $\int \frac{\sec^4 x}{\operatorname{tg}^4 x}dx$ Rpta. $-c\operatorname{tg} x-\frac{1}{3}c\operatorname{tg}^3 x+c$

(43) $\int \frac{\operatorname{sen}^2 \pi x}{\cos^6 \pi x}dx$ Rpta. $\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 \pi x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 \pi x\right]+c$

(44) $\int \sqrt{c\operatorname{tg} x\cos^9 x}\,dx$ Rpta. $2\sqrt{\operatorname{sen} x}-\frac{4}{5}\operatorname{sen}^{5/2} x+\frac{2}{9}\operatorname{sen}^{9/2} x+c$

(45) $\int \operatorname{tg}^3 4x.\sec^{9/2} 4x\ dx$ Rpta. $\frac{1}{26}\sec^{13/2} 4x-\frac{\sec^{9/2} 4x}{18}+c$

(46) $\int \operatorname{tg}^5 3x.\sec^{9/2} 4x\ dx$ Rpta. $-\frac{c\operatorname{tg}^6 4x}{18}-\frac{c\operatorname{tg}^8 3x}{8}-\frac{c\operatorname{tg}^{10} 3x}{10}-\frac{c\operatorname{tg}^{12} 3x}{36}+c$

(47) $\int \frac{\operatorname{sen}^5 3x}{\cos 3x}dx$ Rpta. $\frac{1}{3}\ln|\sec 3x|+\frac{\cos^2 3x}{3}-\frac{\cos^4 3x}{12}+c$

(48) $\int x^2 \cos^3 2x^3\,dx$ Rpta. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x^3}{6}-\dfrac{\operatorname{sen}^3 2x^3}{18}+c$

(49) $\int \sec^7 2x.\operatorname{tg} 2x\;dx$ Rpta. $\dfrac{\sec^7 2x}{14}+c$

(50) $\int \operatorname{tg} x\sqrt{\sec x}\;dx$ Rpta. $2\sqrt{\sec x}+c$

(51) $\int \operatorname{tg}^7 x.\sec^4 x\;dx$ Rpta. $\dfrac{\operatorname{tg}^{10} x}{10}+\dfrac{\operatorname{tg}^8 x}{8}+c$

(52) $\int (\dfrac{\sec x}{\operatorname{tg} x})^4\,dx$ Rpta. $-\dfrac{c\operatorname{tg} 3x}{3}-c\operatorname{tg} x+c$

(53) $\int c\operatorname{tg}^3 x.\cos ec^4 x\;dx$ Rpta. $\dfrac{c\operatorname{tg}^4 x}{4}-\dfrac{1}{6}c\operatorname{tg}^6 x+c$

(54) $\int c\operatorname{tg}^3 x.\cos ec^3 x\;dx$ Rpta. $-\dfrac{1}{5}\cos ec^5 x+\dfrac{1}{3}\cos ec^3 x+c$

(55) $\int c\operatorname{tg}^3 x\cos ec^5 x\;dx$ Rpta. $-\dfrac{\cos ec^7 x}{7}+\dfrac{\cos ec^5 x}{5}+c$

(56) $\int \operatorname{tg}^2 2x.\cos^2 2x\;dx$ Rpta. $\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4})+c$

(57) $\int \dfrac{\sec^4 x}{\operatorname{tg}^2 x}\,dx$ Rpta. $-c\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} x+c$

(58) $\int \dfrac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x}\,dx$ Rpta. $\operatorname{tg} x+\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{4}-\dfrac{3x}{2}+c$

(59) $\int \sec^4 2x\;dx$ Rpta. $\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{2}+\dfrac{\operatorname{tg}^3 2x}{6}+c$

(60) $\int \sec^6 x\, dx$ Rpta. $\operatorname{tg} x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+c$

(61) $\int \sec^3 x.\operatorname{tg}^3 x\, dx$ Rpta. $\frac{1}{5}\sec^5 x-\frac{1}{3}\sec^3 x+c$

(62) $\int c\operatorname{tg}^5 x.\operatorname{cosec}^4 x\, dx$ Rpta. $-\frac{c\operatorname{tg}^8 x}{8}-\frac{1}{6}c\operatorname{tg}^6 x+c$

(63) $\int \operatorname{tg}^4 x.\sec^3 x\, dx$

Rpta. $\frac{1}{6}\operatorname{tg} x.\sec^5 x-\frac{7}{24}\operatorname{tg} x.\sec^3 x+\frac{\operatorname{tg} x.\sec x}{16}+\frac{\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|}{16}+c$

(64) $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 x.\cos^5 x}}$ Rpta. $-2\sqrt{c\operatorname{tg} x}+\frac{2}{3}\operatorname{tg} x\sqrt{\operatorname{tg} x}+c$

(65) $\int (1+\cos 3x)^{3/2}\, dx$ Rpta. $2\sqrt{2}[\frac{1}{3}\operatorname{sen}(\frac{3x}{2})-\frac{1}{9}\operatorname{sen}^3(\frac{3x}{2})]+c$

(66) $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$ Rpta. $\frac{3}{5}\cos^{5/3} x+\frac{1}{3\sqrt{\cos x}}+c$

(67) $\int \frac{\operatorname{sen}(x+\pi/4)}{\operatorname{sen} x.\cos x}dx$ Rpta. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\operatorname{tg} x.\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\right|+c$

(68) $\int \frac{\cos^3 x}{1-\operatorname{sen} x}dx$ Rpta. $\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x+c$

(69) $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\operatorname{sen} 2x}}$ Rpta. $\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{tg}^2 x+5)\sqrt{\operatorname{tg} x}+c$

(70) $\int \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^{14} x}}dx$ Rpta. $\frac{3^3}{55}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}(5\operatorname{tg}^2 x+11)+c$

(71) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x.\cos^4 x}$ Rpta. $-\frac{4}{3}(\frac{1+3\operatorname{tg}^2 4x}{\operatorname{tg}^3 4x})+c$

72) $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$ **Rpta.** $\frac{2\sqrt{\cos x}}{5}\left(\cos^2 x-5\right)+c$

73) $\int \operatorname{senh}^3 x\;dx$ **Rpta.** $\frac{1}{3}\cosh x\left(\cosh^2 x-3\right)+c$

74) $\int \operatorname{tgh}^6 x.\sec h^4 x\;dx$ **Rpta.** $\frac{1}{7}\operatorname{tgh}^7 x-\frac{1}{9}\operatorname{tgh}^9 x+c$

75) $\int c\operatorname{tgh}^4 x\;dx$ **Rpta.** $x-c\operatorname{tgh} x-\frac{1}{3}c\operatorname{tgh}^3 x+c$

76) $\int (\cosh^2 ax+\operatorname{senh}^2 ax)dx$ **Rpta.** $\frac{1}{2a}\operatorname{senh}(2ax)+c$

77) $\int \frac{e^x dx}{\cosh x+\operatorname{senh} x}$ **Rpta.** $x+c$

78) $\int \operatorname{tgh}^4 x\;dx$ **Rpta.** $x-\operatorname{tgh} x-\frac{1}{3}\operatorname{tgh}^3 x+c$

79) $\int c\operatorname{tgh}^5 x\;dx$ **Rpta.** $\ln|\operatorname{senh} x|-\frac{1}{2}c\operatorname{tgh}^2 x-\frac{1}{4}c\operatorname{tgh}^4 x+c$

80) $\int \operatorname{senh}^2 x.\cosh^3 x dx$ **Rpta.** $\frac{\operatorname{senh}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{senh}^5 x}{5}+c$

81) $\int \frac{dx}{\operatorname{senh} x.\cosh^2 x}$ **Rpta.** $\ln\left|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right|+\sec hx+c$

82) $\int c\operatorname{tg} 3x.\cos ec^4 3x\;dx$ **Rpta.** $-\frac{\cos ec^4 x}{12}+c$

83) $\int \operatorname{tg}^3 3x.\sec^4 3x\;dx$ **Rpta.** $\frac{\operatorname{tg}^4 3x}{12}+\frac{\operatorname{tg}^6 3x}{18}+c$

(84) $\int \cos^5 3x.\operatorname{sen}^3 3x\, dx$ Rpta. $\frac{\cos^8 3x}{24}-\frac{\cos^6 3x}{18}+c$

(85) $\int (x^2-6x)\operatorname{sen}^2(\frac{x^3}{3}-3x^2)dx$ Rpta. $\frac{1}{2}(\frac{x^3}{3}-3x^2)-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(\frac{2x^3}{3}-6x^2)+c$

1.6.3 OTRAS INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS.-

Se trata de las integrales de la forma:

$$\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\,dx\,,\quad \int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,dx\,,\quad \int \cos(mx)\cos(nx)\,dx$$

Para el cálculo de éste tipo de integrales se usan las fórmulas siguientes:

$$\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(m+n)x+\operatorname{sen}(m-n)x)$$

$$\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)=\frac{1}{2}(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x)$$

$$\cos(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x)$$

Las fórmulas mencionadas se deducen de las identidades:

$$\operatorname{sen}(m+n)x=\operatorname{sen} mx\cos nx+\operatorname{sen} nx\cos mx \qquad \ldots (1)$$

$$\operatorname{sen}(m-n)x=\operatorname{sen} mx\cos nx-\operatorname{sen} nx\cos mx \qquad \ldots (2)$$

$$\cos(m+n)x=\cos mx\cos nx-\operatorname{sen} nx\operatorname{sen} mx \qquad \ldots (3)$$

$$\cos(m-n)x=\cos mx\cos nx+\operatorname{sen} nx\operatorname{sen} mx \qquad \ldots (4)$$

Ahora sumando (1) y (2) se tiene:

$$\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(m+n)x+\operatorname{sen}(m-n)x)$$

Ahora restando (4) y (3) se tiene:

$$\boxed{\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)=\frac{1}{2}(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x)}$$

Ahora sumando (3) y (4) se tiene:

$$\boxed{\cos(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x)}$$

NOTA: En la aplicación de las fórmulas mencionadas se debe tener en cuenta las identidades siguientes.

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\ x\in\mathbb{R} \\ \cos(-x)=\cos x \end{array}}$$

Ejemplos de aplicación.

Calcular las siguientes integrales

① $\int \operatorname{sen}2x.\operatorname{sen}9x\ dx$

Solución

Como: $\operatorname{sen}2x.\operatorname{sen}9x=\frac{1}{2}(\cos 7x-\cos 11x)$, reemplazando en la integral:

$$\int \operatorname{sen}2x.\operatorname{sen}9x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 7x-\cos 11x)\,dx=\frac{1}{2}(\frac{\operatorname{sen}7x}{7}-\frac{\operatorname{sen}11x}{11})+c$$

② $\int \cos 2x.\cos 7x\ dx$

Solución

Como: $\cos 2x.\cos 7x=\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos 9x)$, reemplazando en la integral:

$$\int \cos 2x.\cos 7x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 5x+\cos 9x)\,dx=\frac{1}{2}(\frac{\operatorname{sen}5x}{5}+\frac{\operatorname{sen}9x}{9})+c$$

(3) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 4x.\cos 5x \; dx$

Solución

Como: $\operatorname{sen} 4x.\cos 5x = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(4+5)x + \operatorname{sen}(4-5)x)$

$= \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen} 9x - \operatorname{sen} x)$, reemplazando en la integral:

$$\int \operatorname{sen} 4x.\cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\int(\operatorname{sen} 9x - \operatorname{sen} x)\,dx = \frac{1}{2}(\cos x - \frac{\cos 9x}{9}) + c$$

(4) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 4x.\cos^2 7x \; dx$

Solución

Como: $\operatorname{sen}^3 4x.\cos^2 7x = \operatorname{sen}^2 4x.\cos^2 7x.\operatorname{sen} 4x = \dfrac{1-\cos 8x}{2}.\dfrac{1+\cos 14x}{2}.\operatorname{sen} 4x$

$$= \frac{1}{4}(1 + \cos 14x - \cos 8x - \cos 8x \cos 14x)\operatorname{sen} 4x$$

$$= \frac{1}{4}(\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 4x \cos 14x - \cos 8x \operatorname{sen} 4x - \cos 8x \cos 14x \operatorname{sen} 4x)$$

$$\operatorname{sen}^3 4x \cos^2 7x = \frac{1}{4}(\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 4x \cos 14x - \cos 8x \operatorname{sen} 4x - \cos 8x \cos 14x \operatorname{sen} 4x) \;\ldots(1)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} 4x \cos 14x &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 18x - \operatorname{sen} 10x) \\ \operatorname{sen} 4x \cos 8x &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 12x - \operatorname{sen} 4x) \\ \cos 8x \cos 14x \operatorname{sen} 4x &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 10x - \operatorname{sen} 12x + \operatorname{sen} 26x) \\ &= \frac{1}{4}[\operatorname{sen} 23x - \operatorname{sen} 21x + \operatorname{sen} 7x - \operatorname{sen} 5] \end{aligned}\right\} \;\ldots(2)$$

Ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\operatorname{sen}^3 4x\cos^2 7x=\frac{1}{4}(\operatorname{sen}4x)+\frac{1}{4}(\operatorname{sen}4x-3\operatorname{sen}10x-\operatorname{sen}12x+2\operatorname{sen}18x-\operatorname{sen}26x)$$

$$=\frac{1}{16}(5\operatorname{sen}4x-3\operatorname{sen}10-\operatorname{sen}12x+2\operatorname{sen}8x-\operatorname{sen}26x)\text{ , entonces:}$$

$$\int\operatorname{sen}^3 4x.\cos^2 7x\,dx=\frac{1}{16}\int(5\operatorname{sen}4x-3\operatorname{sen}10x-\operatorname{sen}12x+2\operatorname{sen}18x-\operatorname{sen}26)\,dx+c$$

$$=\frac{1}{16}(\frac{3\cos 10x}{10}+\frac{\cos 12x}{12}+\frac{\cos 26x}{26}-\frac{5\cos 4x}{4}-\frac{\cos 18x}{9})+c$$

5. $\int\operatorname{sen}(3x+6).\cos(5x+10)dx$

Solución

Como: $\operatorname{sen}(3x+6).\cos(5x+10)=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(8x+16)+\operatorname{sen}((3x+6)-(5x+10))\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(8x+16)-\operatorname{sen}(2x+4)\right]\quad\text{entonces}$$

$$\int\operatorname{sen}(3x+6).\cos(5x+10)\,dx=\frac{1}{2}\int\left[\operatorname{sen}(8x+16)-\operatorname{sen}(2x+4)\right]dx$$

$$=-\frac{\cos(8x+16)}{16}+\frac{\cos(2x+4)}{4}+c$$

6. $\int\cos x\cos^2 5x\;dx$

Solución

Como: $\cos x.\cos^2 5x=\frac{1}{2}\cos x(1+\cos 10x)=\frac{1}{2}(\cos x+\cos x.\cos 10x)$

$$=\frac{1}{2}(\cos x+\frac{\cos 9x+\cos 11x}{2})=\frac{1}{4}(2\cos+\cos 9x+\cos 11x)$$

$$\int \cos x \cos^2 5x\, dx = \frac{1}{4}\int (2\cos x + \cos 9x + \cos 11x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}(2\,\text{sen}\, x + \frac{\text{sen}\, 9x}{9} + \frac{\text{sen}\, 11x}{11}) + c$$

(7) $\int \text{sen}(\frac{\pi}{4} - x)\,\text{sen}(\frac{\pi}{4} + x)dx$

Solución

Como: $\text{sen}(\frac{\pi}{4} - x)\,\text{sen}(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos 2x}{2}$

$$\int \text{sen}(\frac{\pi}{4} - x)\,\text{sen}(\frac{\pi}{4} + x)dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{\text{sen}\, 2x}{4} + c$$

(8) $\int \text{sen}\, x.\text{sen}\, 2x.\text{sen}\, 3x\ dx$

Solución

Como: $\text{sen}\, 2x.\text{sen}\, 3x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x)$, entonces

$$\text{sen}\, x.\text{sen}\, 2x.\text{sen}\, 3x = \frac{1}{2}\text{sen}\, x(\cos x + \cos 5x) = \frac{1}{2}(\text{sen}\, x\cos x + \text{sen}\, x\cos 5x)$$

$$= \frac{1}{4}(\text{sen}\, 2x - \text{sen}\, 6x + \text{sen}\, 4x) = \frac{1}{4}(\text{sen}\, 2x + \text{sen}\, 6x - \text{sen}\, 4x)$$

$$\int \text{sen}\, x.\text{sen}\, 2x.\text{sen}\, 3x\, dx = \frac{1}{4}\int (\text{sen}\, 2x - \text{sen}\, 4x + \text{sen}\, 6x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}(-\frac{\cos 6x}{6} + \frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 2x}{2}) + c = -\frac{\cos 2x}{8} + \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 6x}{24} + c$$

1.6.4 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Calcular las siguientes integrales.

(1) $\int \text{sen}\, 8x.\text{sen}\, 3x\ dx$ **Rpta.** $\frac{\text{sen}\, 5x}{10} - \frac{\text{sen}\, 11x}{22} + c$

(2) $\int \operatorname{sen} 3x . \operatorname{sen} 5x \, dx$ Rpta. $\frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 8x}{16} + c$

(3) $\int \operatorname{sen}^3 x . \cos 3x \, dx$ Rpta. $\frac{3\cos 2x}{16} - \frac{3\cos 4x}{32} + \frac{\cos 6x}{48} + c$

(4) $\int \cos 4x . \cos 5x \, dx$ Rpta. $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 9x}{9}) + c$

(5) $\int \cos^2 x . \operatorname{sen}^2 4x \, dx$ Rpta. $\frac{x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 8x}{32} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 6x}{48} - \frac{\operatorname{sen} 10x}{80} + c$

(6) $\int \operatorname{sen}(\frac{x}{2}) . \operatorname{sen}(\frac{3x}{2}) \, dx$ Rpta. $\frac{\operatorname{sen} x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + c$

(7) $\int \operatorname{sen} 5x . \cos x \, dx$ Rpta. $-\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 4x}{8} + c$

(8) $\int \cos x . \cos 5x \, dx$ Rpta. $\frac{\operatorname{sen} 4x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 6x}{12} + c$

(9) $\int \operatorname{sen} 4x . \cos 7x \, dx$ Rpta. $\frac{\cos 3x}{6} - \frac{\cos 11x}{22} + c$

(10) $\int \operatorname{sen}(\frac{x}{2}) . \cos(\frac{3x}{2}) \, dx$ Rpta. $\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} + c$

(11) $\int \cos(\frac{x}{3}) . \cos(\frac{x}{2}) \, dx$ Rpta. $3 \operatorname{sen} \frac{x}{6} + \frac{3}{5} \operatorname{sen} \frac{5x}{6} + c$

(12) $\int \operatorname{sen} 2x . \operatorname{sen} 3x \, dx$ Rpta. $\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 5x}{10} + c$

(13) $\int (\sqrt{\operatorname{sen} 2x} - \cos 2x)^2 \, dx$ Rpta. $\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{2} - \frac{2}{3}(\operatorname{sen} 2x)^{3/2} + c$

(14) $\int \operatorname{sen} 5x . \operatorname{sen} x \, dx$ Rpta. $\frac{\operatorname{sen} 4x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 6x}{12} + c$

(15) $\int \cos 3x.\cos 2x\ dx$ Rpta. $\frac{\operatorname{sen} x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 5x}{10}+c$

(16) $\int \operatorname{sen} 3x.\cos 6x\ dx$ Rpta. $\frac{\cos 3x}{6}-\frac{\cos 9x}{18}+c$

(17) $\int \cos 4x.\cos 2x\ dx$ Rpta. $\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+\frac{\operatorname{sen} 6x}{12}+c$

(18) $\int \cos 30x.\operatorname{sen} 20x\ dx$ Rpta. $\frac{\cos 10x}{20}-\frac{\cos 50x}{100}+c$

(19) $\int \operatorname{sen} 3x.\cos 5x\ dx$ Rpta. $\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 8x}{16}+c$

(20) $\int \operatorname{sen} 2x.\cos 4x\ dx$ Rpta. $\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 6x}{12}+c$

(21) $\int \operatorname{sen}(4x+7).\cos(5x+8)\,dx$ Rpta. $\frac{1}{18}(9\cos(x+1)-\cos(9x+15))+c$

(22) $\int \cos(9x-20).\cos(5x+20)\,dx$ Rpta. $\frac{1}{4}\left[\frac{\operatorname{sen}(4x-40)}{2}+\frac{\operatorname{sen} 14x}{7}\right]+c$

(23) $\int \operatorname{sen} x.\operatorname{sen} 3x.\operatorname{sen} 5x\ dx$ Rpta. $\frac{1}{4}\left[\cos x+\frac{\cos 9x}{9}-\frac{\cos 3x}{3}-\frac{\cos 7x}{7}\right]+c$

(24) $\int \cos x.\cos 3x.\cos 5x\ dx$ Rpta. $\frac{1}{4}\left[\operatorname{sen} x+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}+\frac{\operatorname{sen} 7x}{7}+\frac{\operatorname{sen} 9x}{9}\right]+c$

(25) $\int \operatorname{sen} 10x.\operatorname{sen} 20x.\operatorname{sen} 30x\ dx$ Rpta. $\frac{1}{8}\left[\frac{\cos 60x}{3}-\frac{\cos 40x}{2}-\cos 20x\right]+c$

(26) $\int \cos 10x.\cos 20x.\cos 30x\ dx$ Rpta. $\frac{1}{4}\left[\frac{\operatorname{sen} 20x}{20}+\frac{\operatorname{sen} 40x}{20}+\frac{\operatorname{sen} 60x}{60}\right]+c$

(27) $\int \operatorname{sen} x.\cos 7x.\operatorname{sen} 11x\ dx$ Rpta. $\frac{1}{4}\left[\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}-\frac{\operatorname{sen} 19x}{19}-\frac{\operatorname{sen} 5x}{5}+\frac{\operatorname{sen} 17x}{17}\right]+c$

(28) $\int \cos x.\operatorname{sen} 7x.\cos 11x\, dx$ **Rpta.** $\frac{1}{4}\left[\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\frac{\cos 17x}{17}-\frac{\cos 19x}{19}\right]+c$

(29) $\int \operatorname{sen}(2x+1).\operatorname{sen}(3x+2).\operatorname{sen}(5x+3)\, dx$

Rpta. $\frac{1}{8}\left[\frac{\cos(10x+6)}{5}-\frac{\cos(6x+4)}{3}-\frac{\cos(4x+2)}{2}\right]+c$

(30) $\int \cos(x+3).\cos(3x+5).\cos(5x+7)\, dx$

Rpta. $\frac{1}{4}\left[\frac{\operatorname{sen}(3x+5)}{3}+\frac{\operatorname{sen}(7x+9)}{7}+\frac{\operatorname{sen}(9x+15)}{9}+\operatorname{sen}(x+1)\right]+c$

(31) $\int \operatorname{sen}^3 x.\cos 3x\, dx$ **Rpta.** $\frac{3}{16}\cos 2x-\frac{3}{32}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x+c$

(32) $\int \cos^2 x.\operatorname{sen}^2 4x\, dx$ **Rpta.** $\frac{x}{4}-\frac{\operatorname{sen} 8x}{32}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{8}-\frac{\operatorname{sen} 6x}{48}-\frac{\operatorname{sen} 10x}{80}+c$

(33) $\int \cosh x.\cosh 3x\, dx$ **Rpta.** $\frac{1}{8}\operatorname{senh} 4x+\frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x+c$

(34) $\int \operatorname{senh} 4x.\operatorname{senh} x\, dx$ **Rpta.** $\frac{1}{10}\cosh 5x+\frac{1}{6}\cosh 3x+c$

(35) $\int \operatorname{senh}^2 x.\cosh 5x\, dx$ **Rpta.** $\frac{\operatorname{senh} 7x}{28}+\frac{\operatorname{senh} 3x}{12}-\frac{\operatorname{senh} 5x}{10}+c$

1.6.5 INTEGRACION POR PARTES.-

El método de integración por partes es de mucha utilidad en la práctica, cuyo procedimiento es de la siguiente manera:

Consideremos $u=f(x)$ y $v=g(x)$ dos funciones diferenciales en la variable x.

De la fórmula para la diferencial de un producto de dos funciones se tiene:

$$d(uv) = udv + vdu\text{ , lo que es equivalente}$$

$$udv = d(uv) - vdu\text{ , integrando ambos miembros se tiene:}$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu} \qquad \ldots (*)$$

La ecuación (*) se denomina "Fórmula para la integración por partes".

Ejemplo de aplicación de este método

Calcular las siguientes integrales.

① $\int x^2 \ln x \, dx$

Solución

Comentario: Cuando se tiene un producto de una función logarítmica inclusive afectada de un exponente por una expresión en x, en todos estos casos, se toma así:

$$\text{Haciendo: } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases} \qquad \ldots (1)$$

Ahora (1) reemplazamos en la fórmula de integración por partes:

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x} \quad \text{simplificando}$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + c$$

② $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$

Solución

De acuerdo al comentario del ejemplo anterior se tiene:

Haciendo: $\begin{cases} u = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ v = x \end{cases}$

Ahora aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c$$

(3) $\int x \operatorname{sen} 3x\ dx$

Solución

Comentario: Todas las funciones trigonométricas multiplicados por una expresión en x se integran por partes donde las funciones u y dv se toman así:

Haciendo: $\begin{cases} u = x \\ dv = \operatorname{sen} 3x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{\cos 3x}{3} \end{cases}$

Ahora aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int x\operatorname{sen} 3x\,dx = -\frac{x\cos 3x}{3} - \int -\frac{\cos 3x}{3}\,dx = -\frac{x\cos 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{9} + c$$

(4) $\int (x^2+2x+3)\cos 2x\,dx$

Solución

De acuerdo al comentario del ejemplo (3) se tiene:

Haciendo: $\begin{cases} u = x^2+2x+3 \\ dv = \cos 2x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2(x+1)\,dx \\ v = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2} \end{cases}$

Ahora aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int (x^2+2x+3)\cos 2x = \frac{x^2+2x+3}{2}\operatorname{sen} 2x - \int (x+1)\operatorname{sen} 2x\,dx \quad \ldots (1)$$

nuevamente a la integral $\int (x+1)\operatorname{sen} 2x\,dx$, lo calculamos por partes:

Haciendo: $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = \operatorname{sen} 2x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{cases}$

y aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int (x+1)\operatorname{sen} 2x\,dx = -\frac{x+1}{2}\cos 2x - \int -\frac{\cos 2x}{2}\,dx = -\frac{x+1}{2}\cos 2x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + c \qquad \dots (2)$$

ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int (x^2+2x+3)\cos 2x\,dx = \frac{x^2+2x+3}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{x+1}{2}\cos 2x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + c$$

$$= \frac{2x^2+4x+6}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{x+1}{2}\cos 2x + c$$

(5) $\int xe^{2x}dx$

<u>**Solución**</u>

Comentario: Las funciones exponenciales multiplicadas por una expresión en x se integran por partes y las funciones u y dv se toma así.

Haciendo: $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$

Ahora aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int xe^{2x}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}dx}{2} = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c = \frac{e^{2x}}{4}(2x-1) + c$$

(6) $\int (x^2+3x-1)e^{2x}dx$

Solución

De acuerdo al comentario del ejemplo (5) se tiene:

Haciendo: $\begin{cases} u = x^2 + 3x - 1 \\ dv = e^{2x}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x+3)\,dx \\ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$

Ahora aplicamos la fórmula de integración por partes.

$$\int (x^2+3x-1)e^{2x}\,dx = \frac{x^2+3x-1}{2}e^{2x} - \int \frac{2x+3}{2}e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{x^2+3x-1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x+3)\,e^{2x}\,dx \qquad \ldots (1)$$

Nuevamente a la integral $\int (2x+3)\,e^{2x}\,dx$, lo integramos por partes:

Haciendo: $\begin{cases} u = 2x+3 \\ dv = e^{2x}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$

Ahora aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int (2x+3)\,e^{2x}\,dx = \frac{2x+3}{2}e^{2x} - \int \frac{e^{2x}}{2}2dx = \frac{2x+3}{2}e^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} = (x+1)\,e^{2x} \qquad \ldots (2)$$

Ahora reemplazamos (2) en (1)

$$\int (x^2+3x-1)e^{2x}\,dx = \frac{x^2+3x-1}{2}e^{2x} - \frac{x+1}{2}e^{2x} + c = \frac{x^2+2x-2}{2}e^{2x} + c$$

(7) $\int x \operatorname{arctg} x \; dx$

Solución

Comentario: Todas las funciones trigonométricas inversas multiplicados por una expresión en x, se integran por partes donde las funciones u y dv se toman así.

Haciendo: $\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Ahora aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int x \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{x^2+1} = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{x^2+1})dx$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + c$$

8) $\int x \operatorname{arcsen} x\,dx$

Solución

De acuerdo al comentario del ejemplo (7) se tiene:

Haciendo: $\begin{cases} u = \operatorname{arcsen} x \\ dv = x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Ahora aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int x \operatorname{arc sen} x\,dx = \frac{x^2 \operatorname{arcsen} x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \ldots (1)$$

nuevamente la integral $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Calculamos por partes.

Haciendo: $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

Luego aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} - \int -\sqrt{1-x^2}\,dx = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= -x\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + c = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x - x\sqrt{1-x^2}) + c \quad \dots (2)$$

Ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int x \operatorname{arcsen} x\,dx = \frac{x^2 \operatorname{arcsen} x}{2} - \frac{1}{4}(\operatorname{arcsen} x - x\sqrt{1-x^2}) + c = \frac{2x^2-1}{4}\operatorname{arcsen} x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + c$$

9. $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\ dx$

Solución

Comentario: Las funciones exponenciales multiplicadas por la función seno o coseno se integran por partes y las funciones u y dv se eligen de cualquier forma, así: tenemos para nuestro caso:

Haciendo: $\begin{cases} u = \operatorname{sen} bx \\ dv = e^{ax}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = b\cos bx\ \ dx \\ v = \dfrac{e^{ax}}{a} \end{cases}$

Ahora aplicamos la fórmula de integración por partes

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx \qquad \dots (1)$$

nuevamente a la integral $\int e^{ax}\cos bx\ dx$, lo calculamos por partes.

Haciendo: $\begin{cases} u = \cos bx \\ dv = e^{ax}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -b \operatorname{sen} bx\ \ dx \\ v = \dfrac{e^{ax}}{a} \end{cases}$

Luego aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} - \int -\frac{b}{a}e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx \quad \ldots (2)$$

ahora reemplazamos (2) en (1) es decir:

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}\operatorname{sen} bx}{a} - \frac{b}{a}\left[\frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx\right]$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$$

$$(1+\frac{b^2}{a^2})\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)$$

$$\therefore \quad \int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + c$$

Ejemplos diversos de integración por partes.

(10) $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

Solución

De acuerdo a los comentarios de los ejemplos anteriores.

Haciendo: $\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = \dfrac{x\ dx}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \sqrt{1+x^2} \end{cases}$

Ahora aplicamos la fórmula de integración por partes.

$$\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \int \sqrt{1+x^2}.\frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + c$$

(11) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x\cos x-\operatorname{sen}x)^2}$

Solución

A la integral dada escribiremos así:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x\cos x-\operatorname{sen}x)^2}=\int \frac{x^2\operatorname{sen}x\,dx}{\operatorname{sen}x(x\cos x-\operatorname{sen}x)^2}=\int \frac{x}{\operatorname{sen}x}\frac{x\operatorname{sen}x\,dx}{(x\cos x-\operatorname{sen}x)^2}$$

Haciendo: $\begin{cases} u=\dfrac{x}{\operatorname{sen}x} \\ dv=\dfrac{x\operatorname{sen}x\,dx}{(x\cos x-\operatorname{sen}x)^2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{\operatorname{sen}x-x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx \\ v=\dfrac{1}{x\cos x-\operatorname{sen}x}\end{cases}$

Ahora aplicamos la fórmula de integración por partes.

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x\cos x-\operatorname{sen}x)^2}=\frac{x}{\operatorname{sen}x(x\cos x-\operatorname{sen}x)}-\int \frac{(\operatorname{sen}x-x\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x(x\cos x-\operatorname{sen}x)}dx$$

$$=\frac{x}{\operatorname{sen}x(x\cos x-\operatorname{sen}x)}+\int \cos ec^2 x\,dx$$

$$=\frac{x}{\operatorname{sen}x(x\cos x-\operatorname{sen}x)}-\operatorname{c}\operatorname{tg}x+c$$

(12) $\displaystyle\int \frac{x+\operatorname{sen}x}{1+\cos x}dx$

Solución

Se conoce: $2\cos^2(\frac{x}{2})=1+\cos x$, $\operatorname{sen}x=2\operatorname{sen}(\frac{x}{2}).\cos(\frac{x}{2})$

Entonces a la integral dada escribiremos así:

$$\int \frac{x+\operatorname{sen}x}{1+\cos x}dx=\int \frac{x+2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{x}{2})}dx=\frac{1}{2}\int x\sec^2(\frac{x}{2})dx+\int \operatorname{tg}(\frac{x}{2})dx \quad \ldots (1)$$

Ahora calculamos la integral $\int x\sec^2(\frac{x}{2})dx$; por partes.

Haciendo: $\begin{cases} u = x \\ dv = \sec^2(\frac{x}{2})dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 2\,\mathrm{tg}(\frac{x}{2}) \end{cases}$

Luego aplicando la fórmula de integración por partes.

$$\int x\sec^2(\frac{x}{2})dx = 2x\,\mathrm{tg}(\frac{x}{2}) - 2\int \mathrm{tg}(\frac{x}{2})dx \qquad \ldots (2)$$

Ahora reemplazando (2) en (1)

$$\int \frac{x+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}dx = \frac{1}{2}\left[x\,\mathrm{tg}(\frac{x}{2}) - 2\int \mathrm{tg}(\frac{x}{2})dx\right] + \int \mathrm{tg}(\frac{x}{2})dx + c$$

$$= \frac{x}{2}\,\mathrm{tg}(\frac{x}{2}) - \int \mathrm{tg}(\frac{x}{2})dx + \int \mathrm{tg}(\frac{x}{2})dx + c = \frac{x}{2}\,\mathrm{tg}(\frac{x}{2}) + c$$

(13) $\displaystyle\int \frac{\cos x + x\operatorname{sen} x - 1}{(\operatorname{sen} x - x)^2}dx$

Solución

Como: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, entonces a la integral dada escribiremos así:

$$\int \frac{\cos x + x\operatorname{sen} x - 1}{(\operatorname{sen} x - x)^2}dx = \int \frac{\cos x + x\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{(\operatorname{sen} x - x)^2}dx \qquad \ldots (1)$$

$$= \int -\frac{\cos x(\cos x - 1) - \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - x)}{(\operatorname{sen} x - x)^2}dx$$

$$= -\int \frac{\cos x(\cos x - 1)}{(\operatorname{sen} x - x)^2}dx - \int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(\operatorname{sen} x - x)}$$

Ahora calculamos la integral $\displaystyle\int \frac{\cos x(\cos x - 1)}{(\operatorname{sen} x - x)^2}dx$, por partes:

Haciendo: $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = \dfrac{\cos x - 1}{(\operatorname{sen} x - x)^2}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\operatorname{sen} x\; dx \\ v = -\dfrac{1}{\operatorname{sen} x - x} \end{cases}$

Luego aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int \frac{\cos x(\cos x - 1)}{(\operatorname{sen} x - x)^2}\,dx = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x - x} - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x - x}\,dx \qquad \ldots (2)$$

Ahora reemplazando (2) en (1)

$$\int \frac{\cos x + x\operatorname{sen} x - 1}{(\operatorname{sen} x - x)^2}\,dx = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x - x} + \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x - x}\,dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x - x}\,dx + c = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x - x} + c$$

(14) $\displaystyle\int \sec^3 x\ dx$

Solución

A la integral dada escribiremos así:

$$\int \sec^3 x\,dx = \int \sec^2 x.\sec x\,dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\sec x\,dx \qquad \ldots (1)$$

$$= \int \sec x\,dx + \int \operatorname{tg}^2 x.\sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + \int \operatorname{tg}^2 x.\sec x\,dx$$

ahora calculamos la integral $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x.\sec x\ dx$, por partes.

Haciendo: $\begin{cases} u = \operatorname{tg} x \\ dv = \operatorname{tg} x.\sec x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \sec^2 x\,dx \\ v = \sec x \end{cases}$

Luego aplicamos la fórmula de integración por partes.

$$\int \operatorname{tg}^2 x.\sec x\ dx = \sec x.\operatorname{tg} x - 3\int \sec^3 x\ dx \qquad \ldots (2)$$

Luego reemplazamos (2) en (1) se tiene:

$$\int \sec^3 x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\,dx$$

$$\therefore \quad \int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + \sec x \operatorname{tg} x\right) + c$$

15) $\displaystyle\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$

Solución

De acuerdo a los comentarios de los ejemplos anteriores.

Haciendo: $\begin{cases} u = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv = \dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} \\ v = e^{\operatorname{arctg} x} \end{cases}$

Ahora aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx \qquad \ldots (1)$$

nuevamente integramos $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$, por partes

Haciendo: $\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv = \dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}} \\ v = e^{\operatorname{arctg} x} \end{cases}$

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} + \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx \qquad \ldots (2)$$

luego reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{1/2}} - \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$$

$$\therefore \quad \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{2(1+x^2)^{1/2}}(x-1)+c$$

(16) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{(1-x)^{1/2}}\,dx$

Solución

Sea: $z=\sqrt{x} \implies x=z^2 \implies dx=2z\,dz$

$$\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{(1-x)^{1/2}}\,dx = 2\int \frac{z\operatorname{arcsen} z}{(1-z^2)^{1/2}}\,dz \qquad \ldots (1)$$

ahora aplicamos el criterio de integración por partes:

Haciendo: $\begin{cases} u=\operatorname{arcsen} z \\ dv=\dfrac{z\,dz}{(1-z^2)^{1/2}} \end{cases} \implies \begin{cases} du=-\dfrac{dz}{(1-z^2)^{1/2}} \\ v=-(1-z^2)^{1/2} \end{cases}$

Luego aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int \frac{z\operatorname{arcsen} z}{(1-z^2)^{1/2}}\,dz = -\sqrt{1-z^2}\operatorname{arcsen} z - \int -\sqrt{1-z^2}\,\frac{dz}{(1-z^2)^{1/2}} \qquad \ldots (2)$$

$$= -(1-z^2)^{1/2}\operatorname{arcsen} z + z$$

ahora reemplazamos (2) en (1), es decir:

$$\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{(1-x)^{1/2}}\,dx = 2(-\sqrt{1-z^2}\operatorname{arcsen} z + z)+c = -2\sqrt{1-x}\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+2\sqrt{x}+c$$

(17) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

Solución

Sea: $z=\ln x \implies x=e^z \implies dx=e^z\,dz$

$$\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx = \int e^{z} \operatorname{sen} z\,dz \qquad \ldots (1)$$

Aplicando el criterio de integración por partes.

Haciendo: $\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \\ dv = e^{x}\,dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos z\,dz \\ v = e^{z} \end{cases}$

Mediante la fórmula de integración por partes se tiene:

$$\int e^{z} \operatorname{sen} z\;dz = e^{z} \operatorname{sen} z - \int e^{z} \cos z\;dz \qquad \ldots (2)$$

nuevamente calculamos la integral $\int e^{x} \cos z\;dz$, por partes.

Haciendo: $\begin{cases} u = \cos z \\ dv = e^{z}\,dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\operatorname{sen} z\,dz \\ v = e^{z} \end{cases}$

aplicando la fórmula de integración por partes.

$$\int e^{z} \cos z\;dz = e^{z} \cos z + \int e^{z} \operatorname{sen} z\;dz \qquad \ldots (3)$$

ahora reemplazamos (3) en (2) se tiene:

$$\int e^{z} \operatorname{sen} z\;dz = e^{z} \operatorname{sen} z - e^{z} \cos z - \int e^{z} \operatorname{sen} z\;dz$$

$$\Rightarrow \int e^{z} \operatorname{sen} z\,dz = \frac{e^{z}}{2}(\operatorname{sen} z - \cos z) \qquad \ldots (4)$$

Luego reemplazando (4) en (1) se tiene: $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx = \frac{e^{z}}{2}(\operatorname{sen} z - \cos z) + c$

$$\therefore \int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)) + c$$

(18) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

Solución

Sea: $x = z^2 \Rightarrow dx = 2z\,dz$, entonces: $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int z e^{z}\,dz$, integrando por partes:

Haciendo: $\begin{cases} u = z \\ dv = e^{z}\,dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dz \\ v = e^{z} \end{cases}$

Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2(ze^{z} - \int e^{z}\,dz) + c = 2(ze^{z} - e^{z}) + c = 2e^{z}(z-1) + c = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + c$$

(19) $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$

Solución

Sea: z = arctg x $\Rightarrow \begin{cases} dz = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ x = \operatorname{tg} z \end{cases}$, ahora reemplazando en la integral,

$$\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \int z \operatorname{tg}^2 z\,dz$$, aplicando el criterio de integración por partes.

Haciendo: $\begin{cases} u = z \\ dv = \operatorname{tg}^2 z\,dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dz \\ v = \operatorname{tg} z - z \end{cases}$

Mediante la fórmula de integración por partes se tiene:

$$\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \int z \operatorname{tg}^2 z\,dz = z(\operatorname{tg} z - z) - \int (\operatorname{tg} z - z)\,dz$$

$$= z \operatorname{tg} z - z^2 - \ln|\sec z| + \frac{z^2}{2} + c = x \operatorname{arctg} x - \ln|\sec(\operatorname{arctg} x)| - \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + c$$

(20) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$

Solución

Sea: $z = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow \begin{cases} dz = \dfrac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} \\ x = \operatorname{sen} z \end{cases}$, ahora reemplazamos en la integral dada:

$$\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx = \int \frac{\operatorname{arcsen} x}{(1-x^2)(1-x^2)^{1/2}}\,dx = \int \frac{z\,dz}{1-\operatorname{sen}^2 z} = \int z\sec^2 z\,dz$$

Ahora aplicamos el criterio de integración por partes:

Haciendo: $\begin{cases} u = z \\ dv = \sec^2 z\,dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dz \\ v = \operatorname{tg} z \end{cases}$

Luego aplicamos la fórmula por partes:

$$\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx = z\operatorname{tg} z - \int \operatorname{tg} z\,dz + c = z\operatorname{tg} z - \ln|\sec z| + c = \frac{x \operatorname{arcsen} x}{(1-x^2)^{1/2}} - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + c$$

1.6.6 CASOS ESPECIALES DE INTEGRACIÓN POR PARTES.-

En esta parte consideremos el cálculo de las integrales, mediante ciertas técnicas, llamadas el método de los coeficientes indeterminados y se considera las siguientes integrales.

1^er *Caso*: Para las integrales de la forma: $\boxed{\int P_n(x)e^{ax}\,dx}$

Donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n, para el cálculo de estas integrales se expresa así:

$$\boxed{\int P_n(x)e^{ax}\,dx = Q_n(x)e^{ax} + c} \qquad \text{... (1)}$$

donde $Q_n(x)$ es un polinomio de grado n de coeficientes por calcular, es decir:

$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, $\quad Q_n(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0$

y se trata de calcular los coeficientes de $Q_n(x)$, los que se obtienen derivando la ecuación (1) y después se aplica la identidad de polinomios.

Ejemplo: Calcular la integral: $\int(x^3+5x^2-2)e^{2x}dx$

Solución

De acuerdo al criterio establecido, a la integral dada escribiremos en la forma:

$$\int(x^3+5x^2-2)e^{2x}dx=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)e^{2x}+c \qquad ... (1)$$

Para calcular A, B, C y D derivamos la ecuación (1)

$$(x^3+5x^2-2)e^{2x}=2(Ax^3+Bx^2+Cx+D)e^{2x}+(3Ax^2+2Bx+C)e^{2x}$$

$$(x^3+5x^2-2)e^{2x}=(2Ax^3+(2B+3A)x^2+(2C+2B)x+(2D+C))e^{2x}$$

$$x^3+5x^2-2=2Ax^3+(3A+2B)x^2+(2B+2C)x+C+2D$$

Ahora por identidad de polinomios se tiene:

$$\begin{cases} 2A=1 \\ 3A+2B=5 \\ 2B+2C=0 \\ C+2D=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \;;\; C=-\frac{7}{4} \\ B=\frac{7}{4} \;;\; D=-\frac{1}{8} \end{cases} \qquad ... (2)$$

Luego reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int\left(x^3+5x^2-2\right)e^{2x}dx=\frac{1}{8}\left(4x^3+14x^2-14x+1\right)e^{2x}+c$$

OBSERVACIÓN.- En general se puede probar que:

$$\boxed{\int P(x)e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a}\left[P(x)-\frac{P'(x)}{a}+\frac{P''(x)}{a^2}-\frac{P'''(x)}{a^3}+...\right]}$$

Comprobemos con el ejemplo anterior.

$$\int (x^3+5x^2-2)e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\left[x^3+5x^2-2-\frac{3x^2+10x}{2}+\frac{6x+10}{4}-\frac{6}{8}\right]+c$$

$$=\frac{e^{2x}}{8}\left[4x^3+14x^2-14x-1\right]+c$$

2^{do} *Caso:* Para las integrales de la forma: $\boxed{\int P(x)\operatorname{sen}(ax)\,dx\ ,\quad \int P(x)\cos(ax)\,dx}$

Donde $P(x)$ es un polinomio.

Él cálculo de estas integrales se obtienen mediante las expresiones siguientes:

$$\int P(x)\operatorname{sen}(ax)\,dx = \frac{-\cos(ax)}{a}\left[p(x)-\frac{p''(x)}{a^2}+\frac{p^{iv}(x)}{a^4}-\dots\right]$$

$$+\frac{\operatorname{sen}(ax)}{a}\left[\frac{P'(x)}{a}-\frac{P'''(x)}{a^3}+\frac{P^{v}(x)}{a^5}-\dots\right]$$

$$\int P(x)\cos(ax)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(ax)}{a}\left[p(x)-\frac{p''(x)}{a^2}+\frac{p^{iv}(x)}{a^4}-\dots\right]$$

$$+\frac{\cos(ax)}{a}\left[\frac{P'(x)}{a}-\frac{P'''(x)}{a^3}+\frac{P^{v}(x)}{a^5}-\dots\right]$$

Ejemplo: Calcular la integral $\int (2x^4+2x-1)\cos 2x\,dx$

Desarrollo

De acuerdo al criterio se tiene: $P(x)=2x^4+2x-1 \quad\Rightarrow\quad P'(x)=8x^3+2$

$$P''(x)=24x^2$$

$$P'''(x)=48x$$

$$P^{iv}(x)=48$$

$$\int (2x^4+2x-1)\cos 2x\,dx = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{4}+\frac{P^{iv}(x)}{16}\right]+\frac{\cos 2x}{2}\left[\frac{P'(x)}{2}-\frac{P'''(x)}{8}\right]+c$$

$$=\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\left[2x^4+2x-1-\frac{24x^2}{4}+\frac{48}{16}\right]+\frac{\cos 2x}{2}\left[\frac{8x^3+2}{2}-\frac{48x}{8}\right]+c$$

$$=(2x^4-6x^2+2x+2)\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+(2x^3-3x+\frac{1}{2})\cos 2x+c$$

OBSERVACIÓN.- Los casos especiales de integración por partes analizados y que son de la forma

$\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\operatorname{sen} ax\ dx$, $\int P(x)\cos ax\ dx$, donde $P\ (x)$ es una función polinómica que se puede derivar varias veces hasta anularse y e^{ax} , sen ax, cos ax, puede integrarse varias veces sin dificultades, en estos casos, existe una forma de organizar los cálculos que simplificar el trabajo, este criterio ilustraremos mediante los siguientes ejemplo:

Ejemplo.- Calcular la integral $\int x^5 e^x dx$

Desarrollo

$\int x^5 e^x dx = \int f(x).g(x)dx$, donde: $f(x)=x^5$ y $g(x)=e^x$

$f(x)=x^5$ sus derivadas		$g(x)=e^x$ sus integrales
	+	
$5x^4$	−	e^x
$20x^3$	+	e^x
$60x^2$	−	e^x
120 x	+	e^x
120	−	e^x
0		e^x

$$\int x^5 e^x dx = x^5 e^x - 5x^4 e^x + 20x^3 e^x - 60x^2 e^x + 120xe^x - 120e^x + c$$

Ejemplo.- Calcular la integral $\int (x^3 + x + 5)e^{2x} dx$

Desarrollo

$\int (x^3 + x + 5)e^{2x} dx = \int f(x).g(x)\, dx$, donde: $f(x) = x^3 + x + 5$, $g(x) = e^{2x}$

$f(x) = x^3 + x + 5$		$g(x) = e^{2x}$
	$+$	
$3x^2 + 1$		$\frac{e^{2x}}{2}$
	$-$	
$6x$		$\frac{e^{2x}}{4}$
	$+$	
6		$\frac{e^{2x}}{8}$
	$-$	
0		$\frac{e^{2x}}{16}$

$$\int (x^3 + x + 5)e^{2x} dx = (x^3 + x + 5)\frac{e^{2x}}{2} - (3x^2 + 1)\frac{e^{2x}}{4} + 6x\frac{e^{2x}}{8} - \frac{6e^{2x}}{16} + c$$

Ejemplo.- Calcular la integral $\int x^2 \cos x\, dx$

Desarrollo

$\int x^2 \cos x\, dx = \int f(x).g(x)\, dx$, donde: $f(x) = x^2$ y $g(x) = \cos x$

$f(x)=x^2$		$g(x)=\cos x$
	$+$	
$2x$	$-$	sen x
2	$+$	- cos x
0		- sen x

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\operatorname{sen} x-(2x)(-\cos x)+2(-\operatorname{sen} x)+c$$

$$= x^2\operatorname{sen} x+2x\cos x-2\operatorname{sen} x+c$$

Ejemplo.- Calcula la integral $\int (x^3-x+7)\operatorname{sen} 2x\;dx$

Desarrollo

$$\int f(x).g(x)\;dx=\int (x^3-x+7)\operatorname{sen} 2x\;dx\;,$$

donde: $f(x)=x^3-x+7$ y $g(x)=\operatorname{sen}\,2x$

$f(x)=x^3-x+7$		$g(x)=\operatorname{sen}\,2x$
	$+$	
$3x^2-1$	$-$	$-\dfrac{\cos 2x}{2}$
$6x$	$+$	$-\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{4}$
6	$-$	$\dfrac{\cos 2x}{8}$
0		$\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{16}$

$$\int (x^3-x+7)\operatorname{sen} x\;dx=-(x^3-x+7)\frac{\cos 2x}{2}-(3x^2-1)(-\frac{\operatorname{sen} 2x}{4})+6x(\frac{\cos 2x}{8})-\frac{6\operatorname{sen} 2x}{16}+c$$

$$= -(x^3 - x + 7)\frac{\cos 2x}{2} + (3x^2 - 1)\frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{3x\cos 2x}{4} - \frac{3\operatorname{sen} 2x}{8} + c$$

1.6.7 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Calcular las siguientes integrales:

1. $\int x^n \ln x\, dx$, $n \neq -1$ **Rpta.** $\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x - \frac{1}{n+1}) + c$

2. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$ **Rpta.** $-\frac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6) + c$

3. $\int \frac{\ln^2 x}{x^{5/3}} dx$ **Rpta.** $-\frac{8}{28x^{3/2}}(\frac{9}{4}\ln^2 x + 3\ln x + 2) + c$

4. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx$ **Rpta.** $\operatorname{tg} x \ln(\cos x) + \operatorname{tg} x - x + c$

5. $\int (x^2 - 2x + 3)\ln x\, dx$ **Rpta.** $(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x + c$

6. $\int x^3 \ln^2 x\, dx$ **Rpta.** $\frac{x^4}{4}\ln^2 x - \frac{x^4}{8}\ln x + \frac{x^4}{32} + c$

7. $\int \ln^2 x\, dx$ **Rpta.** $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + c$

8. $\int \frac{x\ln x}{(1-x^2)^{1/2}} dx$ **Rpta.** $\sqrt{1-x^2}\,(1 - \ln x) + \ln(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}) + c$

9. $\int x\ln(\frac{1-x}{1+x})dx$ **Rpta.** $\frac{x^2-1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| - x + c$

10. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ **Rpta.** $-\frac{1+2\ln x}{4x^2} + c$

(11) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$ Rpta. $\ln x(\ln(\ln x)-1)+c$

(12) $\int \ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})dx$ Rpta. $(x+\frac{1}{2})\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x}+c$

(13) $\int \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$ Rpta. $\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x}+2\right|-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\sqrt[3]{x}+c$

(14) $\int (7+x-3x^2)e^{-x}dx$ Rpta. $(3x^2+5x-2)e^{-x}+c$

(15) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$ Rpta. $-\frac{xe^x}{1+x}+e^x+c$

(16) $\int \frac{e^{1/x}}{x^3}dx$ Rpta. $\frac{x-1}{x}e^{1/x}+c$

(17) $\int (2x-3)(x^2-3x-1)^4\ln(x^2-3x-1)dx$

Rpta. $\frac{(x^2-3x-1)^5}{5}(\ln(x^2-3x-1)-\frac{1}{5})+c$

(18) $\int x^2e^{-x}dx$ Rpta. $-e^{-x}(x^2+2x+2)+c$

(19) $\int x^3e^{-x/3}dx$ Rpta. $-3e^{-x/3}(x^3+9x^2+54x+162)+c$

(20) $\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx$ Rpta. $-(x^2+5)e^{-x}+c$

(21) $\int (x^3-3x)e^{6x}dx$ Rpta. $\frac{e^{6x}}{216}(36x^3-18x^2-102x+17)+c$

(22) $\int \frac{3x^2+2x-1}{4e^{3x}}dx$ Rpta. $-\frac{e^{-3x}}{12}(3x^2+4x+\frac{1}{3})+c$

(23) $\int (8x^3+6x^2+2x+5)e^{4x}dx$ Rpta. $e^{4x}(2x^3+\frac{x}{2}+\frac{9}{8})+c$

(24) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\ dx$ Rpta. $x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+c$

(25) $\int x\operatorname{arctg}^2 x\ dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\left[(x^2+1)\operatorname{arctg}^2 x-2x\operatorname{arctg}x+\ln|x^2+1|\right]+c$

(26) $\int \frac{\operatorname{arctg}x}{x^2(1+x^2)}dx$ Rpta. $\ln\left|\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\right|-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x-\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+c$

(27) $\int \frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}dx$ Rpta. $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|-\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}+c$

(28) $\int x^2\operatorname{arctg}3x\ dx$ Rpta. $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}3x-\frac{x^2}{18}+\frac{1}{160}\ln|1+9x^2|+c$

(29) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x dx$ Rpta. $\frac{2xe^x}{x+1}-e^x+c$

(30) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln(\frac{x+1}{x-1})dx$ Rpta. $\sqrt{1-x^2}\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+2\operatorname{arcsen}x+c$

(31) $\int \operatorname{arctg}(\sqrt{x+1})dx$ Rpta. $(x+2)\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}+c$

(32) $\int x\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\ dx$ Rpta. $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+c$

(33) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}dx$ Rpta. $(w^2+1)^2\operatorname{arctg}w-\frac{w}{3}(w^2+3)+c$

donde: $w=\sqrt{\sqrt{x}-1}$

(34) $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2} dx$ Rpta. $\frac{\operatorname{arctg} x}{4} - \frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x^2)} + \frac{x}{4(1+x^2)} + c$

(35) $\int \frac{x^4 - x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2} dx$ Rpta. $x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{7x^2+5}{4(1+x^2)} arc.\operatorname{tg} x + c$

(36) $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ Rpta. $2\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \ln|1+x| + c$

(37) $\int x \sec^2 x \, dx$ Rpta. $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + c$

(38) $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx$ Rpta. $x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + c$

(39) $\int \operatorname{sen} \sqrt[3]{x} \, dx$ Rpta. $3\left[(2-\sqrt[3]{x^2})\cos\sqrt[3]{x} + 2.\sqrt[3]{x}\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}\right] + c$

(40) $\int x \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ Rpta. $\frac{\operatorname{sen} 2x}{8} - \frac{x}{4}\cos 2x + c$

(41) $\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx$ Rpta. $-x^3 \operatorname{sen} x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 6 \operatorname{sen} x + c$

(42) $\int (x^2+5x+6)\cos 2x \, dx$ Rpta. $\frac{2x^2+10x+11}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{2x+5}{4}\cos 2x + c$

(43) $\int x \sec^2 3x \, dx$ Rpta. $\frac{x}{3}\operatorname{tg} 3x - \frac{1}{9}\ln|\sec 3x| + c$

(44) $\int x \cos ec^2(\frac{x}{2}) dx$ Rpta. $-2xc\operatorname{tg}(\frac{x}{2}) + 4\ln\left|\operatorname{sen}(\frac{x}{2})\right| + c$

(45) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$ Rpta. $-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + c$

(46) $\int 9x\,\text{tg}^2 3x\,dx$ Rpta. $3x\,\text{tg}\,3x-\dfrac{9x^2}{2}+\ln|\cos 3x|+c$

(47) $\int \dfrac{x}{\text{sen}^2 x}dx$ Rpta. $-x\,\text{ctg}\,x+\ln|\text{sen}\,x|+c$

(48) $\int \text{sen}\sqrt{2x}\;dx$ Rpta. $-\sqrt{2x}\cos\sqrt{2x}+\text{sen}\sqrt{2x}+c$

(49) $\int \dfrac{x\cos x}{\text{sen}^2 x}dx$ Rpta. $-\dfrac{x}{\text{sen}\,x}+\ln\left|\text{tg}(\dfrac{x}{2})\right|+c$

(50) $\int x\cos 3x\;dx$ Rpta. $\dfrac{x}{3}\text{sen}\,3x+\dfrac{\cos 2x}{9}+c$

(51) $\int x\,\text{sen}^2 x\;dx$ Rpta. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x\,\text{sen}\,2x}{4}-\dfrac{\cos 2x}{8}+c$

(52) $\int 3^x\cos x\;dx$ Rpta. $\dfrac{3^x(\text{sen}\,x+\ln 3.\cos x)}{1+(\ln 3)^2}+c$

(53) $\int \sec^5 x\;dx$ Rpta. $\dfrac{\sec x\,\text{tg}\,x}{8}(2\sec^2 x+3)+\dfrac{3}{8}\ln|\sec x+\text{tg}\,x|+c$

(54) $\int \dfrac{\text{arcsen}\,x}{\sqrt{x+1}}dx$ Rpta. $2\sqrt{x+1}\,\text{arcsen}\,x+4\sqrt{1-x}+c$

(55) $\int (\text{arcsen}\,x)^2\,dx$ Rpta. $x(\text{arcsen}\,x)^2+2\,\text{arcsen}\,x.\sqrt{2-x^2}-2x+c$

(56) $\int \arccos x\;dx$ Rpta. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c$

(57) $\int \dfrac{\text{arcsen}\,x}{x^2}dx$ Rpta. $-\dfrac{\text{arcsen}\,x}{x}+\ln\left|\dfrac{x}{1+(1-x^2)^{1/2}}\right|+c$

$x^{1/2}$

(58) $\int x \operatorname{arcsen}(x^2)dx$ Rpta. $\frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen}(x^2)+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}+c$

(59) $\int 6x^2 \operatorname{arcsen} 2x \, dx$ Rpta. $2x^3 \operatorname{arcsen} 2x+\frac{\sqrt{1-4x^2}}{4}-\frac{(1-4x^2)^{3/2}}{12}+c$

(60) $\int \operatorname{arcsen} 2x \, dx$ Rpta. $x \operatorname{arcsen} 2x+\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2}+c$

(61) $\int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$ Rpta. $\frac{\operatorname{arcsen} x}{(1-x^2)^{1/2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+c$

(62) $\int (\arccos x-\ln x)\,dx$ Rpta. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}-x(\ln x-1)+c$

(63) $\int 4x^3 \operatorname{arcsen}(\frac{1}{x})dx$ Rpta. $x^4 \operatorname{arcsen}(\frac{1}{x})+\frac{x^2+2}{3}\sqrt{x^2-1}+c$

(64) $\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ Rpta. $2\sqrt{x}\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+c$

(65) $\int x^2 \operatorname{arcsen} x \, dx$ Rpta. $\frac{x^3}{3}\operatorname{arcsen} x-\frac{1}{9}(1-x^2)^{3/2}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{1/2}+c$

(66) $\int x\cos^3 x \, dx$ Rpta. $x \operatorname{sen} x-\frac{x}{3}\operatorname{sen}^3 x+\frac{2}{3}\cos x+\frac{\cos^3 x}{9}+c$

(67) $\int e^{-x}\cos 3x \, dx$ Rpta. $\frac{e^{-x}}{10}(3\operatorname{sen} 3x-\cos 3x)+c$

(68) $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{e^x}dx$ Rpta. $\frac{e^{-x}}{2}(\frac{\cos 2x-\operatorname{sen} 2x}{5})+c$

(69) $\int e^x \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x \, dx$ Rpta. $\frac{e^x}{4}(\frac{2\operatorname{sen} 2x+\cos 2x}{5}-\frac{4\operatorname{sen} 4x+\cos 4x}{17})+c$

(70) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ Rpta. $e^{ax}\dfrac{(b\,\text{sen}\,bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+c$

(71) $\int e^{2x}\cos(e^x)dx$ Rpta. $e^x\,\text{sen}\,e^x+\cos e^x+c$

(72) $\int \sec^2(\ln x)\,dx$ Rpta. $x\,\text{sen}^2(\ln x)-\dfrac{1}{5}(x\,\text{sen}(2\ln x)-2x\cos(2\ln x))+c$

(73) $\int x^3e^{-x^2}dx$ Rpta. $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}(x+1)+c$

(74) $\int x\,arc\sec x\,dx$ Rpta. $\dfrac{x^2}{2}\text{arcsec}\,x-\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2}+c$

(75) $\int (\text{arc}\sec x)^2\,dx$ Rpta. $x\,\text{arcsec}^2 x-\dfrac{2}{x^3-x}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+c$

(76) $\int x^2\,\text{arctg}\,x\,dx$ Rpta. $\dfrac{x^2}{2}\text{arctg}\,x-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{1}{6}\ln(1+x^2)+c$

(77) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$ Rpta. $\dfrac{2}{3}x^{3/2}\ln x-\dfrac{4}{9}x^{3/2}+c$

(78) $\int \text{sen}\,x.\ln(1+\text{sen}\,x)\,dx$ Rpta. $-\cos x.\ln(1+\text{sen}\,x)+x+\cos x+c$

(79) Si: $f''(x)=-af(x)$ y $g''(x)=b\,g(x)$, donde a y b son constantes. Encontrar la integral: $\int f(x)\cdot g''(x)dx$. Rpta. $\dfrac{1}{a+b}[f(x).g'(x)-f'(x).g(x)]+c$

(80) $\int \cos(\ln x)\,dx$ Rpta. $\dfrac{x}{2}[\text{sen}(\ln x)+\cos(\ln x)]+c$

(81) $\int (3x+1)\,\text{arctg}\,2x\,dx$ Rpta. $(\dfrac{3x^2}{2}+x+\dfrac{3}{8}\text{arctg}\,2x-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{8}\ln(4x^2+1)+c$

(82) $\int (x^2+5x+1)e^x dx$ Rpta. $e^x(x^2+3x-4)+c$

(83) $\int (x^2+x+1)\operatorname{sen} x\, dx$ Rpta. $(2x+1)\operatorname{sen} x-(x^2+x+1)\cos x+c$

(84) $\int (3x^2+7x+1)e^x dx$ Rpta. $xe^x(3x+1)+c$

(85) $\int (x^2-5x+1)e^{-x} dx$ Rpta. $-e^{-x}(x^2-3x-2)+c$

(86) $\int \frac{x^2+3x+4}{e^x} dx$ Rpta. $-e^{-x}(x^2+5x+9)+c$

(87) $\int (x^2+2x+5)(2\operatorname{sen} x+3\cos x)\, dx$ Rpta. $(3x^2+10x+13)\operatorname{sen} x-(x^2-2x-2)\cos x+c$

(88) $\int x^2 \ln(x^6-1)dx$

Rpta. $\frac{1}{3}\left[(x^3-1)\ln|x^3-1|-(x^3-1)\right]+\frac{1}{3}\left[(x^3+1)\ln|x^3+1|-(x^3+1)\right]+c$

(89) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$

Rpta. $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1-x^2}\ \ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+c$

(90) $\int (2x^4+2x-1)\operatorname{sen} 2x\, dx$ Rpta. $(2x^3-3x+\frac{1}{2})\operatorname{sen} 2x-(x^4-3x^2+x+1)\cos 2x+c$

(91) $\int x^3 e^{2x} dx$

(92) $\int x^2(x^3+1)^{-2}\ln x\, dx$

(93) $\int \operatorname{arcsen}\sqrt{3x}\, dx$

(94) $\int \ln(x^2+2)dx$

(95) $\int (x^2+7x-5)\cos 2x\, dx$

(96) $\int (\ln(x)^x)^2 dx$

(97) $\int e^{2x} \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ (98) $\int e^{-x} \cos 3x \, dx$ (99) $\int x^3 e^{-x^2} \, dx$

(100) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{e^x} dx$ (101) $\int x^2 \operatorname{arcsen} x \, dx$ (102) $\int (\operatorname{arcsen} x)^2 \, dx$

(103) $\int e^{3x} \operatorname{sen} 4x \, dx$ (104) $\int x^2 e^x \operatorname{sen} x \, dx$ (105) $\int \frac{x \ln x \, dx}{(x^2-1)^{3/2}}$

(106) $\int (x^2+2x+1) arctg(x+1) dx$ (107) $\int x^{\frac{1}{2}} arctg(2x^{\frac{1}{2}}(1-x^{\frac{1}{2}}))dx$

(108) $\int 2x(arcsenx)^2 \, dx$ (109) $\int x^2 sen(\arccos(2x))dx$

(110) $\int arcsen\sqrt{\frac{4x-x^2}{4}} dx$ (111) $\int x \, arcsen(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})dx$

(112) $\int (2x+1) arctg(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})dx$

1.6.8 INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA.-

Sea $u = f(x)$ una función de x. En muchos casos es posible calcular una integral efectuando una sustitución trigonométrica, y estas integrales son de la forma:

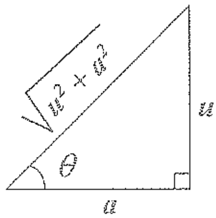
$$\boxed{\int R(u,\sqrt{u^2+a^2})du, \quad \int R(u,\sqrt{a^2-u^2})du, \quad \int R(u,\sqrt{u^2-a^2})du}$$

Donde R es una función racional.

Ahora daremos un criterio para calcular estas integrales, para esto consideremos los siguientes casos:

1er *Caso:* Para la integral de la forma: $\boxed{\int R(u,\sqrt{u^2+a^2})du, \quad a > 0}$

Construimos un triángulo rectángulo.



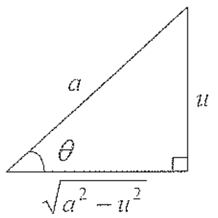
Se toma la función:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{u}{a} \\ u = a\operatorname{tg}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \operatorname{arctg}(\dfrac{u}{a}) \\ du = a\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$$

Las demás funciones se toman de acuerdo al integrando que se tenga.

2^{do} *Caso:* Para la integral de la forma: $\boxed{\int R(u, \sqrt{a^2-u^2})du, \quad a>0}$

Construimos un triángulo rectángulo.



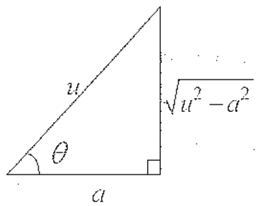
Se toma la función:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{u}{a} \\ u = a\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \operatorname{arcsen}(\dfrac{u}{a}) \\ du = a\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

Las demás funciones se toman de acuerdo al integrando que se tenga.

3^{er} *Caso:* Para la integral de la forma: $\boxed{\int R(u, \sqrt{u^2-a^2})du, \quad a>0}$

Construimos un triángulo rectángulo.



Se toma la función:

$$\begin{cases} \sec\theta = \dfrac{u}{a} \\ u = a\sec\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = arc\sec(\dfrac{u}{a}) \\ du = a\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta \end{cases}$$

Las demás funciones se toman de acuerdo al integrando que se tenga.

OBSERVACIÓN: Se trata de la sustitución trigonométrica del tercer caso $\int R(u, \sqrt{u^2-a^2})du$, se procede del siguiente modo:

a) Se calcula la integral para $u > a$.

b) Se calcula la integral para $u < -a$, luego se hace la sustitución $v = -u$, de donde él calculo de la integral se reduce a la parte (a).

c) Por lo tanto la integral resultante se compone de dos integrales, una para el intervalo $u > a$ y la otra para el intervalo $u < a$ (ejemplo. 3).

Sin embargo, estas integrales pueden resultar iguales y dar una sola expresión para la integral dada (ejemplo. 4).

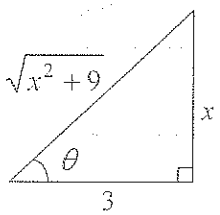
Ejemplo de aplicación de éste criterio.-

Calcular las siguientes integrales:

1) $$\int \frac{x^2 dx}{(9+x^2)^{1/2}}$$

Solución

Aplicando la sustitución del 1^er caso:



Se toma la función: $\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{x}{3} \\ x = 3\operatorname{tg}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \operatorname{arctg}(\dfrac{x}{3}) \\ dx = 3\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$

Además: $\sec\theta = \dfrac{(x^2+9)^{1/2}}{3} \Rightarrow (x^2+9)^{1/2} = 3\sec\theta$

Ahora hacemos las sustituciones:

$$\int \frac{x^2 dx}{(9+x^2)^{1/2}} = \int \frac{9\operatorname{tg}^2\theta . 3\sec^2\theta\, d\theta}{3\sec\theta} = 9\int \operatorname{tg}^2\theta . \sec\theta\, d\theta$$

$$= 9\int (\sec^2\theta - 1)\sec\theta\, d\theta = 9\int (\sec^3\theta - \sec\theta) d\theta$$

$$= 9\left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\theta . \sec\theta + \ln\left|\operatorname{tg}\theta + \sec\theta\right|\right) - \ln\left|\operatorname{tg}\theta + \sec\theta\right|\right] + c$$

$$=\frac{9}{2}\left(\operatorname{tg}\theta.\operatorname{sen}\theta-\ln\left|\operatorname{tg}\theta+\sec\theta\right|\right)+c$$

$$=\frac{9}{2}\left[\frac{x}{3}.\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-\ln\left|\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}\right|\right]+c$$

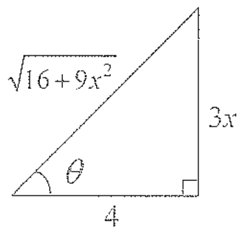
$$=\frac{9}{2}\left[\frac{x^2}{3\sqrt{9+x^2}}-\ln\left|\frac{x+\sqrt{9+x^2}}{3}\right|\right]+c$$

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{16+9x^2}}$

Solución

A la integral dada escribiremos así: $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{16+9x^2}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4^2+(3x)^2}}$

Aplicando la sustitución del 1er caso se tiene:



Se toma la función: $\begin{cases}\operatorname{tg}\theta=\dfrac{3x}{4}\\ x=\dfrac{4\operatorname{tg}\theta}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta=\operatorname{arctg}(\dfrac{3x}{4})\\ dx=\dfrac{4}{3}\sec^2\theta\,d\theta\end{cases}$

Además: $\sec\theta=\dfrac{\sqrt{16+9x^2}}{4}\Rightarrow\sqrt{16+9x^2}=4\sec\theta$

Ahora hacemos las sustituciones:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{16+9x^2}}=\int\frac{\frac{4}{3}\sec^2\theta\,d\theta}{\frac{16}{9}\operatorname{tg}^2\theta.4\sec\theta}=\frac{3}{16}\int\frac{\sec\theta\,d\theta}{\operatorname{tg}^2\theta}$$

$$=\frac{3}{16}\int\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta=\frac{3}{16}\int c\operatorname{tg}\theta.\operatorname{cosec}\theta\,d\theta$$

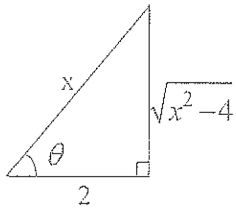
$$=-\frac{3}{16}\operatorname{cosec}\theta+c=-\frac{3}{16}\frac{\sqrt{16+9x^2}}{3x}+c=-\frac{\sqrt{16+9x^2}}{16x}+c$$

3) $\int \dfrac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$

Solución

De acuerdo al 3er caso se considera dos partes.

1ra *Parte.-* Si: $x > 2$, se tiene la sustitución:



Se toma la función: $\begin{cases} \sec\theta = \dfrac{x}{2} \\ x = 2\sec\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = arc\sec(\dfrac{x}{2}) \\ dx = 2\sec\theta.\operatorname{tg}\theta\, d\theta \end{cases}$

Además: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2-4} = 2\operatorname{tg}\theta$

Ahora haciendo la sustitución en la integral:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\sec\theta.\operatorname{tg}\theta}{8\sec^3\theta.2\operatorname{tg}\theta}\, d\theta = \int \frac{\cos^2\theta}{8}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int (1+\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{16}(\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}) + c = \frac{1}{16}(\theta + \operatorname{sen}\theta.\cos\theta) + c$$

$$= \frac{1}{16}(arc\sec(\frac{x}{2}) + \frac{2\sqrt{x^2-4}}{x^2}) + c, \quad \text{si } x > 2$$

2da *Parte.-* Si $x < -2$, se tiene la sustitución $x < -2 \Rightarrow -x > 2$, ahora hacemos el cambio de variable $y = -x$ aquí se cumple $y > 2$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{-dy}{-y^3\sqrt{y^2-4}} = \int \frac{dy}{y^3\sqrt{y^2-4}}$$

$$= \frac{1}{16}(arc\sec(\frac{y}{2}) + \frac{2\sqrt{y^2-4}}{y^2}) + c \qquad \text{de la (1ra. parte)}$$

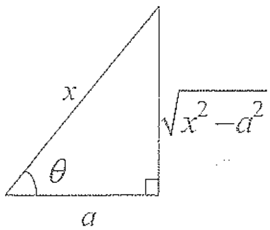
$$= \frac{1}{16}(arc\sec(\frac{-x}{2}) + \frac{2\sqrt{x^2-4}}{x^2}) + c, \quad \text{si } x < -2$$

(4) Demostrar la fórmula: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

Solución

De acuerdo al 3^{er} caso se considera dos partes.

1^{ra} ***Parte.-*** Si $x > a \Rightarrow$ se hace la sustitución:



Se toma la función: $\begin{cases} \sec\theta = \dfrac{x}{a} \\ x = a\sec\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = arc\sec(\dfrac{x}{a}) \\ dx = a\sec\theta.\operatorname{tg}\theta\, d\theta \end{cases}$

Además: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2-a^2} = a\operatorname{tg}\theta$

Ahora sustituimos en la integral dada:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta.\operatorname{tg}\theta}{a\operatorname{tg}\theta}\, d\theta = \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \ln\left|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta\right| + c_1 = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c_1$$

$$= \ln|\,x+\sqrt{x^2-a^2}\,| + c_1 - \ln a = \ln|\,x+\sqrt{x^2-a^2}\,| + c, \quad \text{si } x > a$$

2^{da} ***Parte.-*** Si $x < -a \Rightarrow -x > a$, luego hacemos la sustitución $y = -x$ aquí se cumple $y > a$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{-dy}{\sqrt{y^2-a^2}} = \int -\frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}}$$

$$= -\ln|\,y+\sqrt{y^2-a^2}\,| + c_1 \quad \text{de la (1ra. parte)}$$

$$= -\ln|-x+\sqrt{x^2-a^2}\,| + c_1 = \ln\left|\frac{1}{-x+(x^2-a^2)^{1/2}}\right| + c_1$$

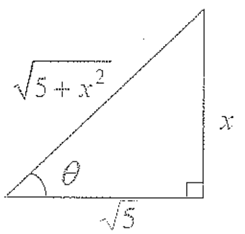
$$= \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c, \quad \text{si } x<-a$$

resumiendo se tiene: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c$

5. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+5}}$

Solución

De acuerdo al criterio del 1er caso se tiene:



Se toma la función: $\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \frac{x}{\sqrt{5}} \\ x = \sqrt{5}\operatorname{tg}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \operatorname{arctg}(\frac{x}{\sqrt{5}}) \\ dx = \sqrt{5}\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$

Además: $\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt{x^2+5} = \sqrt{5}\sec\theta$

Ahora hacemos las sustituciones en la integral:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+5}} = \int \frac{\sqrt{5}\sec^2\theta\, d\theta}{5\operatorname{tg}^2\theta.\sqrt{5}\sec\theta} = \frac{1}{5}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta$$

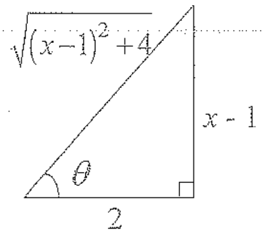
$$= \frac{1}{5}\int c\operatorname{tg}\theta.\cos ec\theta\, d\theta = -\frac{\cos ec\theta}{5}+c = -\frac{\sqrt{x^2+5}}{5x}+c$$

6. $\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}$

Solución

A la integral escribiremos así: $\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}} = \int \frac{dx}{[(x-1)^2+4][(x-1)^2+4]^{1/2}}$

Aplicando el criterio del 1er caso se tiene:



Se toma la función: $\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{x-1}{2} \\ x = 1+2\operatorname{tg}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \operatorname{arctg}(\dfrac{x-1}{2}) \\ dx = 2\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$

Además: $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2+4}}{2} \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+4} = 2\sec\theta$

Ahora hacemos la sustitución en la integral:

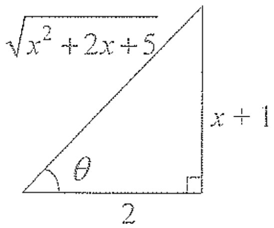
$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)^{3/2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{4\sec^2\theta . 2\sec\theta} = \frac{1}{4}\int \cos\theta\, d\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{4} + c = \frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}} + c$$

7) $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

<u>Solución</u>

A la integral dada escribiremos así: $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}}$

Aplicando el criterio del 1er caso se tiene:



Se toma la función: $\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{x+1}{2} \\ x = -1+2\operatorname{tg}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \operatorname{arctg}(\dfrac{x+1}{2}) \\ dx = 2\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$

Además: $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2+2x+5} = 2\sec\theta$

Ahora hacemos las sustituciones en la integral dada:

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{(-1+2\operatorname{tg}\theta)^3\, 2\sec^2\theta\, d\theta}{2\sec\theta} = \int (-1+2\operatorname{tg}\theta)^3 \sec\theta\, d\theta$$

$$= \int (8\operatorname{tg}^3\theta - 12\operatorname{tg}^2\theta + 6\operatorname{tg}\theta - 1)\sec\theta\, d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\sec^3\theta-6\,\text{tg}\,\theta.\sec\theta+5\ln|\sec\theta+\text{tg}\,\theta|-2\sec\theta+c$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+2x+5)^{3/2}-\frac{3(x+1)}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+5\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}|-\sqrt{x^2+2x+5}+c$$

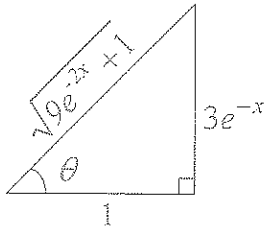
$$=\sqrt{x^2+2x+5}\left(\frac{2x^2-5x-5}{6}\right)+5\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}|+c$$

8) $\displaystyle\int\frac{e^{-x}\,dx}{(9e^{-2x}+1)^{3/2}}$

Solución

A la integral dada escribiremos así: $\displaystyle\int\frac{e^{-x}\,dx}{(9e^{-2x}+1)^{3/2}}=\int\frac{e^{-x}\,dx}{((3e^{-x})^2+1)\sqrt{(3e^{-x})^2+1}}$

Aplicando el criterio del 1er caso se tiene:



Se toma la función: $\begin{cases}\text{tg}\,\theta=3e^{-x}\\ e^{-x}=\dfrac{\text{tg}\,\theta}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta=\text{arctg}(3e^{-x})\\ e^{-x}dx=-\dfrac{\sec^2\theta\,d\theta}{3}\end{cases}$

Además: $\sec\theta=\sqrt{9e^{-2x}+1}\;\Rightarrow\;\sec^2\theta=9e^{-2x}+1$

Ahora hacemos las sustituciones en la integral dada:

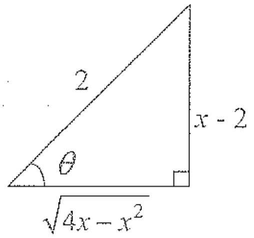
$$\int\frac{e^{-x}\,dx}{(9e^{-2x}+1)^{3/2}}=-\frac{1}{3}\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^2\theta.\sec\theta}=-\frac{1}{3}\int\cos\theta\,d\theta=-\frac{\text{sen}\,\theta}{3}+c=-\frac{e^{-x}}{\sqrt{9e^{-2x}+1}}+c$$

9) $\displaystyle\int\frac{(2x-5)}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

Solución

A la integral dada escribiremos así: $\displaystyle\int\frac{(2x-5)}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx=\int\frac{(2x-5)}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\,dx$

Aplicando el criterio del 2do caso se tiene:



Se toma la función:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{x-2}{2} \\ x = 2+2\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \operatorname{arcsen}(\dfrac{x-2}{2}) \\ dx = 2\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

Además: $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{2} \Rightarrow \sqrt{4x-x^2} = 2\cos\theta$

Ahora hacemos las sustituciones en la integral dada:

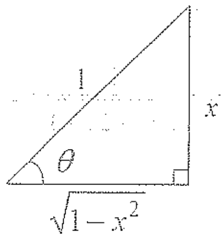
$$\int \frac{(2x-5)}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \int \frac{4\operatorname{sen}\theta - 1}{2\cos\theta}.2\cos\theta\, d\theta = \int (4\operatorname{sen}\theta - 1)\, d\theta = -4\cos\theta - \theta + c$$

$$= -2\sqrt{4x-x^2} - \operatorname{arcsen}(\frac{x-2}{2}) + c = -2\sqrt{4x-x^2} - \operatorname{arcsen}(\frac{x-2}{2}) + c$$

10) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Solución

Aplicando el criterio del 2do caso se tiene:



Se toma la función: $\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = x \\ x = \operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \operatorname{arcsen} x \\ dx = \cos\theta\, d\theta \end{cases}$

Además: $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$

Ahora hacemos la sustitución en la integral dada.

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\operatorname{sen}^2\theta.\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta} = \int \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2\theta)\, d\theta$$

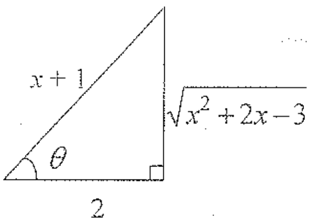
$$= \frac{1}{2}(\theta - \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}) + c = \frac{1}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta.\cos\theta) + c = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen}x - x\sqrt{1-x^2}) + c$$

(11) $\int \frac{(2x-3)}{(x^2+2x-3)^{3/2}} dx$

Solución

A la integral dada escribiremos así: $\int \frac{(2x-3)\,dx}{(x^2+2x-3)^{3/2}} = \int \frac{(2x-3)\,dx}{((x+1)^2-4)\sqrt{(x+1)^2-4}}$

Aplicando el criterio del 3er caso se tiene:



Se toma la función:

$$\begin{cases} \sec\theta = \frac{x+1}{2} \\ x = -1+2\sec\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = arc\sec(\frac{x+1}{2}) \\ dx = 2\sec\theta.\operatorname{tg}\theta\, d\theta \end{cases}$$

Además: $\operatorname{tg}\theta = \frac{(x^2+2x-3)^{1/2}}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2+2x-3} = 2\operatorname{tg}\theta$

Ahora hacemos la sustitución en la integral:

$$\int \frac{(2x-3)\,dx}{(x^2+2x-3)} = \int \frac{(4\sec\theta-5)\,2\sec\theta.\operatorname{tg}\theta\, d\theta}{4\operatorname{tg}^2\theta.2\operatorname{tg}\theta}$$

$$= \int \frac{4\sec^2\theta - 5\sec\theta}{4\operatorname{tg}^2\theta} d\theta = \int (\cos ec^2\theta - \frac{5}{4}c\operatorname{tg}\theta.\cos ec\theta)d\theta$$

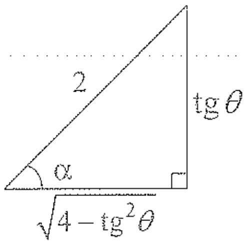
$$= \frac{5}{4}\cos ec\theta - c\operatorname{tg}\theta + c = \frac{5}{4}[\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}] - \frac{2}{\sqrt{x^2+2x-3}} + c$$

(12) $\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(4-\operatorname{tg}^2\theta)^{3/2}}$

Solución

A la integral dada escribiremos así: $\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(4-\operatorname{tg}^2\theta)^{3/2}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(4-\operatorname{tg}^2\theta)\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\theta}}$

Aplicando el criterio del 2do caso se tiene:



Se toma la función:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{2} \\ \operatorname{tg}\theta = 2\operatorname{sen}\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = arc\sec(\dfrac{\operatorname{tg}\theta}{2}) \\ \sec^2\theta\, d\theta = 2\cos\alpha\, d\alpha \end{cases}$$

Además: $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\theta}}{2} \Rightarrow \sqrt{4-\operatorname{tg}^2\theta} = 2\cos\alpha \Rightarrow 4-\operatorname{tg}^2\theta = 4\cos^2\alpha$

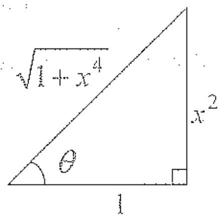
Ahora hacemos la sustitución en la integral:

$$\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(4-\operatorname{tg}^2\theta)^{3/2}} = \int \frac{2\cos\alpha\, d\alpha}{4\cos^2\alpha . 2\cos\alpha} = \frac{1}{4}\int \sec^2\alpha\, d\alpha = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha + c = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\theta}} + c$$

(13) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^4)((1+x^4)^{1/2}-x^2)^{1/2}}$

Solución

Aplicando el criterio del 1er caso se tiene:



Se toma la función: $\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = x^2 \\ x = \sqrt{\operatorname{tg}\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \operatorname{arctg} x^2 \\ dx = \dfrac{\sec^2\theta\, d\theta}{2\sqrt{\operatorname{tg}\theta}} \end{cases}$

Además: $\sec\theta = \sqrt{1+x^4} \Rightarrow \sec^2\theta = 1+x^4$

Ahora hacemos la sustitución en la integral dada:

$$\int \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{\sqrt{(1+x^4)}-x^2}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{2\sqrt{\operatorname{tg}\theta}\sec^2\theta\sqrt{\sec\theta-\operatorname{tg}\theta}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{tg}\theta\sec\theta-\operatorname{tg}^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}^2\theta}} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{\frac{1}{4}-(\operatorname{sen}\theta-\frac{1}{2})^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}) + c = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(2\operatorname{sen}\theta - 1\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^4}} - 1) + c$$

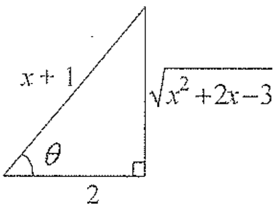
(14) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1}\,dx$

<u>Solución</u>

Completando cuadrados al subradical: $\sqrt{x^2+2x-3} = \sqrt{(x+1)^2-4}$

Entonces la integral dada escribiremos así: $\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}\,dx}{x+1} = \int \frac{\sqrt{(x+1)^2-4}}{x+1}\,dx$

Aplicando el 3^{er} criterio se tiene:



Se toma la función: $\begin{cases} \sec\theta = \frac{x+1}{2} \\ x = -1 + 2\sec\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ dx = 2\sec\theta.\operatorname{tg}\theta\, d\theta \end{cases}$

Además: $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1}$

Ahora hacemos la sustitución en la integral dada:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1}\,dx = \int \operatorname{sen}\theta.2\sec\theta.\operatorname{tg}\theta\, d\theta = 2\int \operatorname{tg}^2\theta\, d\theta$$

$$= 2\int \left(\sec^2\theta - 1\right) d\theta = 2\left(\operatorname{tg}\theta - \theta\right) + c$$

$$= 2(\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{2} - \operatorname{arc}\sec(\frac{x+1}{2})) + c$$

$$= \sqrt{x^2+2x-3} - 2aec\sec(\frac{x+1}{2}) + c$$

1.6.9 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Calcular las siguientes integrales.

1) $\int \frac{x^2dx}{(16-x^2)^{3/2}}$ **Rpta.** $\frac{x}{\sqrt{16-x^2}} - \text{arcsen}(\frac{x}{4}) + c$

2) $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}dx$ **Rpta.** $\frac{\sqrt{(4+x^2)^3}(x^2-6)}{120x^5} + c$

3) $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx$ **Rpta.** $5\ln|\frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}| + \sqrt{25-x^2} + c$

4) $\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^6}dx$ **Rpta.** $-\frac{1}{80}\frac{(16-9x^2)^{5/2}}{x^5} + c$

5) $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$ **Rpta.** $32\,\text{arcsen}\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}(8x-x^3) + c$

6) $\int \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^{3/2}}dx$ **Rpta.** $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \text{arctg}\,x + c$

7) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2x^2+7}}$ **Rpta.** $\frac{\sqrt{2x^2+7}}{6}(x^2+7) + c$

8) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ **Rpta.** $2\,\text{arcsen}\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{4}(x^3+2x) + c$

9) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{21+4x-x^2}}$ **Rpta.** $\frac{33}{2}\text{arcsen}(\frac{x-2}{5}) - \sqrt{21+4x-x^2}\,(\frac{x+6}{2}) + c$

10) $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$ **Rpta.** $\frac{81}{8}\text{arcsen}\frac{x}{3} - \frac{x}{8}(9-2x^2)\sqrt{9-x^2} + c$

(11) $\int \frac{\sec^2 x.\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2+\sec^2 x}}dx$ Rpta. $\frac{\operatorname{tg} x}{2}\sqrt{2+\sec^2 x}-\frac{3}{2}\ln|\operatorname{tg} x+\sqrt{2+\sec^2 x}|+c$

(12) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$ Rpta. $\sqrt{x^2+1}+\ln|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}|+c$

(13) $\int \frac{dx}{(x^2+5)^{3/2}}$ Rpta. $\frac{x}{5\sqrt{x^2+5}}+c$

(14) $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$ Rpta. $\sqrt{x^2-16}-4\operatorname{arc}\sec(\frac{x}{4})+c$

(15) $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$ Rpta. $-\sqrt{9-x^2}+\operatorname{arcsen}(\frac{x}{3})+c$

(16) $\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}dx$ Rpta. $\frac{\sqrt{(x^2-8)^3}}{24x^3}+c$

(17) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}dx$ Rpta. $\sqrt{x^2+2x}+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|+c$

(18) $\int \frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ Rpta. $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\operatorname{arcsen}(\frac{x}{a})+c$

(19) $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$ Rpta. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(x+1)+\frac{\sqrt{x^2+2x}}{2(x+1)^2}+c$

(20) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ Rpta. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+c$

(21) $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$ Rpta. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}})+c$

(22) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$ Rpta. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{3}(8+x^2)+c$

(23) $\int \frac{e^x}{\sqrt{(e^{2x}-2e^x+5)^3}}dx$ Rpta. $\frac{e^x-1}{4\sqrt{e^{2x}-2e^x+5}}+c$

(24) $\int \frac{(25+x^2)^{3/2}}{x^6}dx$ Rpta. $-\frac{(25+x^2)^{5/2}}{125x^5}+c$

(25) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(9-x^2)^7}}$ Rpta. $\frac{x^3}{3(9-x^2)^{3/2}}+\frac{x^5}{405(9-x^2)^{5/2}}+c$

(26) $\int \frac{x^4 dx}{(4-x^2)^{7/2}}$ Rpta. $\frac{x^5}{20(4-x^2)^{5/2}}+c$

(27) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{x^4}$ Rpta. $-\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3x^3}+c$

(28) $\int \frac{(4x+5)\,dx}{(x^2-2x+2)^{3/2}}$ Rpta. $\frac{9(x-1)}{(x^2-2x+2)^{1/2}}-\frac{4}{(x^2-2x+2)^{1/2}}+c$

(29) $\int \frac{(9-x^2)^{1/2}}{x^2}dx$ Rpta. $-\frac{(9-x^2)^{1/2}}{x^2}-\operatorname{arcsen}(\frac{x}{3})+c$

(30) $\int \frac{(2x-3)\,dx}{(x^2+2x-3)^{3/2}}$ Rpta. $\frac{5x-3}{4\left(x^2+2x-3\right)^{1/2}}+c$

(31) $\int \frac{(x^2+3x)dx}{(x-1)(x^2-2x+10)^{1/2}}$

Rpta. $\sqrt{x^2-2x+10}+5\ln|\sqrt{x^2-2x+10}+x+1|+\frac{4}{3}\ln|\frac{\sqrt{x^2-2x+10}-3}{x}|+c$

(32) $\int \frac{(x^2-3)dx}{x(x^4-4)^{1/2}}$ Rpta. $\frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+(x^2-4)^{1/2}\right|-\frac{3}{2}\operatorname{arc\,sec}(\frac{x^2}{2})\right]+c$

(33) $\int \frac{(4x^2+1)dx}{(x-3)(6x-x^2-8)^{1/2}}$

Rpta. $-24\,\text{arcsen}(x-3)+37\ln\left|\frac{1-(6x-x^2-8)^{1/2}}{x-3}\right|+4\left(6x-x^2-8\right)^{1/2}+c$

(34) $\int \frac{8\,\text{sen}\,2x.\text{sen}\,x\,dx}{(20-4\,\text{sen}\,2x-19\,\text{sen}^2 x)^{5/2}}$

Rpta. $\frac{128}{3(\text{tg}^2 x-8\,\text{tg}\,x+20)^{3/2}}+\frac{4\,\text{tg}\,x-16}{3(\text{tg}^2 x-8\,\text{tg}\,x+20)^{1/2}}\left[\frac{5(\text{tg}\,x-4)^2}{\text{tg}^2 x-8\,\text{tg}\,x+20}+12\right]+c$

(35) $\int \frac{x\,dx}{(x^2-2)(x^4-4x^2+5)^{1/2}}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^4-4x^2+5}-1}{x^2-2}\right|+c$

(36) $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ **Rpta.** $\text{arctg}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})+c$

(37) $\int \frac{dx}{(1+x^2)(x^2+1)^{1/2}}$ **Rpta.** $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c$

(38) $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$ **Rpta.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{(1+x^2)^{1/2}+(2x)^{1/2}}{(1+x^2)^{1/2}-(2x)^{1/2}}\right|+c$

(39) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}\left[arc\sec x+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right]+c$

(40) $\int \frac{(x^2+2x)^{1/2}}{x+1}dx$ **Rpta.** $(x^2+2x)^{1/2}-arc\sec(x+1)+c$

(41) $\int \frac{dx}{x^4(x^2+3)^{1/2}}$ **Rpta.** $\frac{(x^2+3)^{1/2}}{9x}-\frac{(x^2+3)^{3/2}}{27x^3}+c$

(42) $\int \frac{(a^2-x^2)^{1/2}}{x^2}dx$ **Rpta.** $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\text{arcsen}(\frac{x}{3})+c$

(43) $\int (x+3)^2(x^2+6x+8)^{1/2}\,dx$ Rpta. $\frac{2}{3}(x+3)\sqrt{(x^2+6x+8)^3}+c$

(44) $\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{3/2}}$ Rpta. $\frac{x-2}{4(4x-x^2)^{1/2}}+c$

(45) $\int \frac{x^2\,dx}{(4-x^2)^{5/2}}$ Rpta. $\frac{x^3}{12(4-x^2)^{3/2}}+c$

(46) $\int \frac{2\,dx}{x(x^4+25)^{1/2}}$ Rpta. $\frac{1}{5}\ln|(x^4+25)^{1/2}-5|-\frac{2}{3}\ln x+c$

(47) $\int \frac{(16-e^{2x})^{1/2}}{e^x}\,dx$ Rpta. $\frac{(16-e^{2x})^{1/2}}{e^x}-\operatorname{arcsen}(\frac{e^x}{4})+c$

(48) $\int \frac{(4x-5)\,dx}{(x^2-2x+2)^{3/2}}$ Rpta. $\frac{9(x-1)}{(x^2-2x+2)^{1/2}}-\frac{4}{(x^2-2x+2)^{1/2}}+c$

(49) $\int \frac{(x^2+a^2)^{1/2}}{x}\,dx$ Rpta. $(x^2+a^2)^{1/2}+\frac{a}{2}\ln\left|\frac{(x^2+a^2)^{1/2}-a}{(x^2+a^2)^{1/2}+a}\right|+c$

(50) $\int \frac{x^2\,dx}{(2x-x^2)^{1/2}}$ Rpta. $\frac{3}{2}\operatorname{arcsen}(x-1)-\frac{x+3}{2}(2x-x^2)^{1/2}+c$

(51) $\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{3/2}}$ Rpta. $-\frac{x-3}{9(4x^2-24x+27)^{1/2}}+c$

(52) $\int \frac{(x^2-4x)^{1/2}}{x^3}\,dx$ Rpta. $\frac{(x^2-4x)^{3/2}}{6x^3}+c$

(53) $\int \frac{(x^2-25)^{3/2}}{x^6}\,dx$ Rpta. $\frac{(x^2-25)^{5/2}}{125x^5}+c$

(54) $\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}$ Rpta. $\frac{x-1}{4(x^2-2x+5)^{1/2}}+c$

(55) $\int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2-2)^{1/2}}$ **Rpta.** $\operatorname{arctg}(\frac{(x^2-2)^{1/2}}{x})+c$

(56) $\int \frac{(4-x^2)^{1/2}}{x^2}dx$ **Rpta.** $-\frac{(4-x^2)^{1/2}}{x}-\operatorname{arcsen}(\frac{x}{2})+c$

(57) $\int x^3(a^2x^2-b^2)^{1/2}dx$ **Rpta.** $\frac{1}{a^4}(a^2x^2-b^2)^{5/2}+\frac{b^2}{3a^4}(a^2x^2-b^2)^{3/2}+c$

(58) $\int \frac{e^t\,dt}{(e^{2t}+8e^t+7)^{3/2}}$ **Rpta.** $-\frac{e^t+4}{4(e^{2t}+8e^t+7)^{1/2}}+c$

(59) $\int \frac{3x\operatorname{arcsen}x}{(1-x^2)^{5/2}}dx$ **Rpta.** $\frac{\operatorname{arcsen}x}{(1-x^2)^{3/2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1-x^2}+\ln\left|\frac{x+1}{(1-x^2)^{1/2}}\right|\right)+c$

(60) $\int \frac{2x^2-4x+4}{(3+2x-x^2)^{1/2}}dx$ **Rpta.** $\operatorname{arcsen}(\frac{x-1}{2})-(x-1)(3+2x-x^2)^{1/2}+c$

(61) $\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ **Rpta.** $-(a^2-x^2)^{3/2}(3x^2+2a^2)\frac{a^3}{15}+c$

(62) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$ **Rpta.** $\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x}+c$

(63) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}x-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+c$

(64) $\int \frac{x^2-3}{x\sqrt{x^4-4}}dx$ **Rpta.** $\frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+\sqrt{x^2-4}\right|-\frac{3}{2}\operatorname{arcsec}\frac{x^2}{2}\right]+c$

(65) $\int \frac{x\,dx}{(x^2-2)\sqrt{x^4-4x^2+5}}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^4-4x^2+5}-1}{x^2-2}\right|+c$

(66) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{-4x^2-12x-5}}$ Rpta. $\frac{1}{8}\left[11 \operatorname{arcsen}\frac{2x+3}{2}+\sqrt{-4x^2-12x-5}\,(3-2x)\right]+c$

(67) $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+8)^{3/2}}$ (68) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ (69) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

(70) $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2-3x+2)^{1/2}}$ (71) $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$ (72) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$

(73) $\int \frac{\sqrt{(16-9x^2)^3}}{x^4}dx$ (74) $\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{3/2}}$ (75) $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx$

(76) $\int a^{2x}\sqrt{a^{4x}-2a^{2x}-15}\,dx$ (77) $\int x^3\sqrt{16-x^2}\,dx$ (78) $\int \frac{\sqrt{9x^2+4}}{x^2}dx$

(79) $\int \frac{x^4 dx}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

1.6.10 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES.-

Consideremos dos funciones polinómicas:

$$P(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1 x+b_0 \,, \quad \text{y} \quad Q(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0$$

una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas, es decir:

$$\boxed{R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}}$$

cuando el grado de la función polinómica $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, a la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se denomina función racional propia, en caso contrario se denomina impropia. Si la función racional es impropia, al dividir el numerador entre el denominador, a la función racional se representa como la suma de una función polinómica y de una función racional propia, es decir:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}}$$

donde el grado $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$; nuestro interés es la integración de las funciones racionales propias, es decir:

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx}$$

para el cálculo de estas integrales consideraremos los siguientes casos:

1^er^ *Caso:* Cuando se tiene integrales de la forma:

$$\boxed{\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx}$$, donde a, b, c son constantes.

Para calcular la presente integral se procede del siguiente modo:

a) Se completa cuadrados en el denominador: $ax^2+bx+c = a(x+\frac{b}{2a})^2 + (c-\frac{b^2}{4a})$

b) Se hace la sustitución $z = x+\frac{b}{a}$, con la cual la integral se convierte en:

$$\boxed{\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{mz+n}{a(z^2+n)} dz = \frac{m}{a}\int \frac{z\,dz}{z^2+n} + \frac{n}{a}\int \frac{dz}{z^2+n}}$$

el cálculo de estas dos integrales se realiza mediante las primeras fórmulas básicas de integración.

2^do^ *Caso:* Cuando en la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, la función polinómica $Q(x)$ se descompone en factores todas lineales y distintos, es decir:

$$Q(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

a la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se expresa como una suma de fracciones simples:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left(\frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}\right)dx$$

donde: $A_1, A_2, ..., A_n$. son constantes que se van ha determinar.

3^{er} *Caso:* Cuando en la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, la función polinómica $Q(x)$ se descompone en factores lineales algunas repetidas, suponiendo que $x - a$, es el factor lineal que se repite p veces, es decir:

$$Q(x) = \underbrace{a_n(x-a)(x-a)\dots(x-a)}_{p-\text{ veces}}(x-\alpha_{p+1})\dots(x-\alpha_n)$$

a la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se expresa como una suma de funciones simples.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left(\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_p}{(x-a)^p} + \frac{A_{p+1}}{x-\alpha_{p+1}} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}\right)dx$$

donde: $A_1, A_2, ..., A_n$, son constantes que se van ha determinar.

4^{to} *Caso:* Cuando en la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, la función polinómica $Q(x)$ se descompone en factores lineales y cuadráticas irreducibles y ninguno se repite, es decir:

$$Q(x) = a_n(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)(x^2+b_3x+c_3)(x-\alpha_4)\dots(x-\alpha_n)$$

a la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se expresa como una suma de funciones simples

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left(\frac{A_1x+B_1}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+b_2x+c_2} + \frac{A_3x+B_3}{x^2+b_3x+c_3} + \frac{A_n}{x-\alpha_n} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}\right)dx$$

donde: $A_1, A_2, ..., A_n$, B_1, B_2, B_3, son constantes que se van ha determinar.

5^{to} *Caso*: Cuando en la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, la función polinómica $Q(x)$ se descompone en factores lineales y cuadráticos repetidos en donde los factores cuadráticos irreducible se repite es decir:

$$Q(x) = a_n(x^2+bx+c)^2(x-\alpha_3)...(x-\alpha_n)$$

a la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se expresa como una suma de fracciones simples.

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left(\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2}+\frac{A_3}{x-\alpha_3}+...+\frac{A_n}{x-\alpha_n}\right)dx}$$

donde: $A_1, A_2, ..., A_n$, B_1, B_2. son constantes que se van ha determinar.

Ejemplos de aplicación de éste criterio.

Calcular las siguientes integrales.

1) $\int \frac{4x^2+9x-1}{x^3+2x^2-x-2}dx$

<u>Solución</u>

Factorizando la función polinómica del denominador:

$Q(x) = x^3+2x^2-x-2 = (x+1)(x-1)(x+2)$ a la integral dada expresaremos así:

$$\int \frac{4x^2+9x+1}{x^3+2x^2-x-2}dx = \int \left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}\right)dx \qquad ...(1)$$

Calculando las constantes A, B y C.

$$\frac{4x^2+9x-1}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2)+B(x+1)(x+2)+C(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

Igualando los numeradores: $4x^2+9x-1 = A(x^2+x-2)+B(x^2+3x+2)+C(x^2-1)$

Ordenando: $4x^2+9x-1 = (A+B+C)x^2+(A+3B)x-2A+2B-C$

Por identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} A+B+C=4 \\ A+3B=9 \\ -2A+2B-C=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=2 \\ C=-1 \end{cases}$ ... (2)

Luego reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int \frac{4x^2+9x-1}{x^3+2x^2-x-2}dx = \int \left(\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= 3\ln|x+1|+2\ln|x-1|-\ln|x+2|+c = \ln\left|\frac{(x+1)^3(x-1)^2}{x+2}\right|+c$$

Observación: Para calcular las constantes de la descomposición de la función racional se ha hecho mediante el método de los coeficientes, también se puede calcular dando valores particulares a la variable x, en este caso se dan valores apropiados a x, y se evalúan ambos miembros, los valores que se asignan a x es conveniente tomar $x = a_i$, donde a_i son raíces de $Q(x)$, o también asignar valores pequeños, tales como: $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, etc.

Ejemplo: En el caso: $\dfrac{4x^2+9x-1}{x^3+2x^2-x-2} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+2}$

Los valores de x se sustituyen en la ecuación:

$$4x^2+9x-1 = A(x-1)(x+2)+B(x+1)(x+2)+C(x+1)(x-1)$$

para: $\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12=6A \\ -6=-2B \\ -3=3C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \\ C=-1 \end{cases}$

2. $$\int \frac{(5x-7)dx}{(x-3)(x^2-x-2)}$$

<u>**Solución**</u>

Como: $Q(x) = (x-3)(x^2-x-2) = (x-3)(x-2)(x-1)$ entonces a la integral dada expresamos así:

$$\int \frac{(5x-7)dx}{(x-3)(x^2-x-2)} = \int (\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1})dx \quad \ldots (1)$$

Ahora calculamos las constantes: A, B y C.

$$\frac{(5x-7)dx}{(x-3)(x^2-x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-2)(x+1)+B(x-3)(x+1)+C(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)(x+1)}$$

Igualando los numeradores se tiene:

$$5x-7 = A(x^2-x-2)+B(x^2-2x-3)+C(x^2-5x+6)$$

Ordenando: $5x-7=(A+B+C)x^2+(-A-2B-5C)x-2A-3B+6C$

Por identidad de polinomios se tiene que: $\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A-2B-5C=5 \\ -2A-3B+6C=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases}$

Luego reemplazando los valores de A, B y C en (1):

$$\int \frac{(5x-7)\,dx}{(x-3)(x^2-x-2)} = \int (\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1})dx$$

$$= 2\ln|x-3| - \ln|x-2| - \ln|x+1| + c = \ln\left|\frac{(x-3)^2}{(x-2)(x+1)}\right| + c$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$

Solución

Como: $Q(x)=6x^3-7x^2-3x=x(2x-3)(3x+1)$ entonces a la integral dada expresamos así:

$$\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x} = \int (\frac{A}{x} + \frac{B}{2x-3} + \frac{C}{3x+1})dx \quad \ldots (1)$$

Ahora calculamos las constantes A, B y C.

$$\frac{1}{6x^3-7x^2-3x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-3}+\frac{C}{3x+1}=\frac{A(2x-3)(3x+1)+Bx(3x+1)+Cx(2x-3)}{x(2x-3)(3x+1)}$$

Igualando los numeradores se tiene: $1=A\left(6x^2-7x-3\right)+B\left(3x^2+x\right)+C\left(2x^2-3x\right)$

Ordenando: $1=(6A+3B+2C)x^2+(-7A+B-3C)x-3A$

Por identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} 6A+3B+2C=0 \\ -7A+B-3C=0 \\ -3A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{3} \\ B=\dfrac{4}{33} \\ C=\dfrac{9}{11} \end{cases}$

Luego reemplazando los valores de A, B y C en (1):

$$\int\frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x}+\frac{2}{33}\int\frac{2\,dx}{2x-3}+\frac{3}{11}\int\frac{3\,dx}{3x+1}$$

$$=\frac{3}{11}\ln|3x+1|+\frac{2}{33}\ln|2x-3|-\frac{1}{3}\ln|x|+c$$

④ $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}$

Solución

Como: $Q(x)=x^4-3x^2+2=(x^2-2)(x^2-1)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+1)(x-1)$, entonces a la integral dada escribiremos así:

$$\int\frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}=\int\left(\frac{A}{(x-\sqrt{2})}+\frac{B}{(x+\sqrt{2})}+\frac{C}{(x+1)}+\frac{D}{(x-1)}\right)dx$$

Ahora calculamos las constantes A, B y C.

$$\frac{x}{x^4-3x^2+2}=\frac{A}{(x-\sqrt{2})}+\frac{B}{(x+\sqrt{2})}+\frac{C}{(x+1)}+\frac{D}{(x-1)}$$

$$= \frac{A(x+\sqrt{2})(x^2-1)+B(x-\sqrt{2})(x^2-1)+C(x^2-2)(x+1)+D(x^2-2)(x-1)}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+1)(x-1)}$$

Igualando los numeradores se tiene:

$$x = A(x+\sqrt{2})(x^2-1)+B(x-\sqrt{2})(x^2-1)+C(x^2-2)(x+1)+D(x^2-2)(x-1)$$

$$x = A(x^3+\sqrt{2}x^2-x-\sqrt{2})+B(x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2})+C(x^3+x^2-2x-2)+D(x^3-x^2-2x+2)$$

$$x=(A+B+C+D)x^3+(\sqrt{2}A-\sqrt{2}B+C-D)x^2+(-A-B-2C-2D)x-\sqrt{2}A-\sqrt{2}B-2C+2D$$

Por identidad de polinomios se tiene:

$$\begin{cases} A+B+C+D=0 \\ \sqrt{2}A-\sqrt{2}B+C-D=0 \\ -A-B-2C-2D=1 \\ -\sqrt{2}A+\sqrt{2}B-2C+2D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=B=\dfrac{1}{2} \\ C=D=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Luego reemplazando los valores de A, B, C y D en (1):

$$\int \frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2} = \frac{1}{2}\left[\int \frac{-dx}{(x+\sqrt{2})}+\int \frac{-dx}{(x-\sqrt{2})}+\int \frac{dx}{(x+1)}+\int \frac{dx}{(x-1)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|x-\sqrt{2}|+\ln|x+\sqrt{2}|-\ln|x-1|-\ln|x+1|\right]+c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2-1}\right|+c$$

(5) $\displaystyle\int \frac{(2x^2+1)dx}{(x+1)^2(x-3)}$

Solución

A la integral dada expresemos en la forma:

$$\int \frac{(2x^2+1)dx}{(x+1)^2(x-3)} = \int \left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-3}\right)dx \qquad \ldots (1)$$

Ahora calculando las constantes A, B y C.

$$\frac{(2x^2+1)}{(x+1)^2(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-3}=\frac{A(x+1)(x-3)+B(x-3)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-3)}$$

Igualando los numeradores se tiene: $2x^2+1=A(x^2-2x-3)+B(x-3)+C(x^2+2x+1)$

Ordenando: $2x^2+1=(A+C)x^2+(-2A+B+2C)x-3A-3B+C$

Ahora por identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} A+C=2 \\ -2A+B+2C=0 \\ -3A-3B+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{13}{16} \\ B=-\dfrac{3}{4} \\ C=\dfrac{19}{16} \end{cases} \quad \ldots (2)$

Luego reemplazando los valores de A, B y C de (2) en (1):

$$\int\frac{(2x^2+1)dx}{(x+1)^2(x-3)}=\frac{13}{16}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{19}{16}\int\frac{dx}{x-3}$$

$$=\frac{13}{16}\ln|x+1|+\frac{3}{4(x+1)}+\frac{19}{16}\ln|x-3|+c$$

6) $\displaystyle\int\frac{x^3-3x+4}{(x-1)^3(x+1)}dx$

<u>Solución</u>

A la integral dada expresemos en la forma:

$$\int\frac{x^3-3x+4}{(x-1)^3(x+1)}dx=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+1}\right)dx$$

Ahora calculando las constantes A, B, C y D.

$$\frac{x^3-3x+4}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+1}$$

$$= \frac{A(x-1)^2(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x+1)+D(x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)}$$

Igualando los numeradores se tiene:

$$x^3-3x+4 = A(x^3-x^2-x+1)+B(x^2-1)+C(x+1)+D(x^3-3x^2+3x-1)$$

$$x^3-3x+4 = (A+D)x^3+(-A+B-3D)x^2+(-A+C+3D)x+A-B+C-D$$

Por la identidad de polinomios se tiene:

$$\begin{cases} A+D=1 \\ -A+B-3D=0 \\ -A+C+3D=-3 \\ A-B+C-D=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{7}{4} \quad ; \quad B=-\frac{1}{2} \\ C=1 \quad ; \quad D=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

Luego reemplazando los valores de A, B, C y D en (1):

$$\int \frac{x^3-3x+4dx}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{7}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 1\int \frac{dx}{(x-1)^3} - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{7}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{3}{4}\ln|x+1| + c$$

7) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-2x-3}{(x+1)^2(x-2)^2}\,dx$

Solución

A la integral dada expresaremos así:

$$\int \frac{x^3+x^2-2x-3}{(x+1)^2(x-2)^2}\,dx = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}\right)dx$$

Ahora calculando las constantes A, B, C y D.

$$\frac{x^3+x^2-2x-3}{(x+1)^2(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{A(x+1)(x-2)^2+B(x-2)^2+C(x-2)(x+1)^2+D(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)^2}$$

Ahora igualando los numeradores se tiene:

$$x^3+x^2-2x-3=A(x+1)(x-2)^2+B(x-2)^2+C(x-2)(x+1)^2+D(x+1)^2$$

$$x^3+x^2-2x-3=(A+C)x^3+(-2A+B+D)x^2+(-4A-3C+2D)x+4A+4B-2C+D$$

Por la identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} A+C=1 \\ -3A+B+D=1 \\ -4B-3C+2D=-2 \\ 4A+4B-2C+D=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{5}{27} \quad ; \quad B=-\dfrac{1}{9} \\ C=\dfrac{32}{27} \quad ; \quad D=\dfrac{5}{9} \end{cases}$

Luego reemplazando los valores de A, B, C y D en (1):

$$\int\frac{x^3+x^2-2x-3}{(x+1)^2(x-2)^2}dx=-\frac{5}{27}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{32}{27}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{5}{9}\int\frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$=-\frac{5}{27}\ln|x+1|+\frac{1}{9(x+1)}+\frac{32}{27}\ln|x-2|+\frac{5}{9(x-2)}+c$$

(8) $\displaystyle\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx$

Solución

A la integral dada expresemos así:

$$\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{x-2}\right)dx \qquad \ldots (1)$$

Ahora calculando las constantes A, B, C y D.

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{x-2}$$

$$=\frac{A(x+1)^2(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x-2)+D(x+1)^3}{(x+1)^3(x-2)}$$

Igualando los numeradores se tiene:

$$x^2+2=A(x^3-3x-2)+B(x^2-x-2)+C(x-2)+D(x^3+3x^2+3x+1)$$

$$x^2+2=(A+D)x^3+(B+3D)x^2+(-2A-B+3D)x-2A-2B-2C+D$$

Por la identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} A+D=0 \\ B+3D=1 \\ -3A-B+3D=0 \\ -2A-2B-2C+D=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{2}{9} \quad ; \quad B=\frac{1}{3} \\ C=-1 \quad ; \quad D=\frac{2}{9} \end{cases}$

Luego reemplazando los valores de A, B, C y D en (1):

$$\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx=-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\int\frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-2}$$

$$=-\frac{2}{9}\ln|x+1|-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{2(x+2)^2}+\frac{2}{9}\ln|x-2|+c$$

$$=\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|-\frac{2x^2+5x-5}{6(x+1)(x+2)^2}+c$$

9) $\displaystyle\int\frac{4x^2+6}{x^3+3x}dx$

Solución

Como: $Q(x)=x^3+3x=x(x^2+3)$ entonces a la integral dada la expresaremos en la forma:

$$\int \frac{4x^2+6}{x^3+3x}dx=\int \left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}\right)dx \qquad \ldots (1)$$

Ahora calculamos las constantes A, B y C.

$$\frac{4x^2+6}{x^3+3x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}=\frac{A(x^2+3)+Bx^2+Cx}{x(x^2+3)}$$

Igualando numeradores se tiene: $4x^2+6=(A+B)x^2+Cx+3A$

Por identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} A+B=4 \\ C=0 \\ 3A=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=2 \\ C=0 \end{cases}$

Luego reemplazando los valores de A, B y C en (1):

$$\int \frac{4x^2+6}{x^3+3x}dx=\int \frac{2}{x}dx+\int \frac{2x}{x^2+3}dx=2\ln|x|+\ln|x^2+3|+c=\ln x^2(x^2+3)+c$$

(10) $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2-2x+1}{x^4+5x^2+4}dx$

Solución

Como: $Q(x)=x^4+5x^2+4=(x^2+4)(x^2+1)$ entonces a la integral dada la expresaremos en la forma:

$$\int \frac{x^3+3x^2-2x+1}{x^4+5x^2+4}dx=\int \left(\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\right)dx \qquad \ldots (1)$$

Ahora calculamos las constantes A, B, C y D.

$$\frac{x^3+3x^2-2x+1}{x^4+5x^2+4}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}=\frac{(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

Igualando numeradores se tiene:

$$x^3+3x^2-2x+1=A(x^3+4x)+B(x^2+4)+C(x^3+x)+D(x^2+1)$$

$$x^3+3x^2-2x+1=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(4A+C)x+4B+D$$

Por identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} A+C=1 \\ B+D=3 \\ 4A+C=-2 \\ 4B+D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \ ; \ B=-\dfrac{2}{3} \\ C=2 \ ; \ D=\dfrac{11}{3} \end{cases}$

Luego reemplazando los valores de A, B, C y D en (1).

$$\int \frac{x^3+3x^2-2x+1}{x^4+5x^2+4}dx=-\int \frac{x\,dx}{x^2+1}-\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+1}+\int \frac{2x\,dx}{x^2+4}+\frac{11}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}x+\ln|x^2+4|+\frac{11}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+c$$

(11) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+3x-4}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx$

Solución

A la integral dada expresaremos en la forma:

$$\int \frac{x^3-2x^2+3x-4}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx=\int \left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}\right)dx \qquad \dots (1)$$

Ahora calculamos las constantes A, B, C y D.

$$\frac{x^3-2x^2+3x-4}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$=\frac{A(x-1)(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$

Igualando numeradores se tiene:

$$x^3-2x^2+3x-4=A(x^3+x^2-2)+B(x^2+2x+2)+C(x^3-2x^2+x)+D(x^2-2x+1)$$

$$=(A+C)x^3+(A+B-2C+D)x^2+(2B+C-2D)x-2A+2B+D$$

Por identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} A+C=1 \\ A+B-2C+D=-2 \\ 2B+C-2D=3 \\ -2A+2B+D=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{18}{25} \quad ; \quad B=-\frac{2}{5} \\ C=\frac{7}{25} \quad ; \quad D=-\frac{44}{25} \end{cases}$

Luego reemplazando los valores de A, B, C y D en (1).

$$\int\frac{x^3-2x^2+3x-4}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx=\frac{18}{25}\int\frac{x\,dx}{x-1}-\frac{2}{5}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{25}\int\frac{7x-44}{x^2+2x+2}dx$$

$$=\frac{18}{25}\ln|x-1|+\frac{2}{5(x-1)}+\frac{7}{50}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx-\frac{54}{25}\int\frac{dx}{x^2+2x+2}+c$$

$$=\frac{18}{25}\ln|x-1|+\frac{2}{5(x-1)}+\frac{7}{50}\ln|x^2+2x+2|-\frac{54}{25}\operatorname{arctg}(x+1)+c$$

(12) $\displaystyle\int\frac{x^2+3x+5}{x^3+8}dx$

<u>Solución</u>

Como: $Q(x)=x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$ entonces a la integral dada escribiremos en la forma:

$$\int\frac{x^2+3x+5}{x^3+8}dx=\int\left(\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}\right)dx \qquad \ldots (1)$$

Ahora calculamos las constantes A, B, C.

$$\frac{x^2+3x+5}{x^3+8}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}=\frac{A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

Igualando los numeradores se tiene:

$$x^2+3x+5=A(x^2-2x+4)+B(x^2+2x)+C(x+2)$$

$$=(A+B)x^2+(-2A+2B+C)x+4A+2C$$

Por identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+2B+C=3 \\ 4A+2C=5 \end{cases} \Rightarrow \left\{ A=\frac{1}{4} \;;\; B=\frac{3}{4} \;;\; C=2 \right.$

Luego reemplazando, los valores de A, B y C en (1).

$$\int \frac{x^2+3x+5}{x^3+8}dx=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2}+\frac{1}{4}\int \frac{3x+8}{x^2-2x+4}dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[\int \frac{dx}{x+2}+\frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}dx+11\int \frac{dx}{(x-1)^2+3}\right]+c$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ln|x+2|+\frac{3}{2}\ln|x^2-2x+4|+\frac{11}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{x-1}{\sqrt{3}})\right]+c$$

(13) $\displaystyle\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$

Solución

A la integral dada expresaremos en la forma:

$$\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx=\int [\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}]dx \qquad \ldots (1)$$

Ahora calculamos las constantes A, B, C y D.

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}=\frac{(Ax+B)(9x^2+2)+Cx+D}{(x^2+2)^2}$$

Igualando los numeradores se tiene:

$$x^3+x-1=(Ax+B)(x^2+2)+Cx+D=A(x^3+2x)+B(x^2+2)+Cx+D$$

Por identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} A=1 & ; \quad 2A+C=1 \\ B=0 & ; \quad 2B+D=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=-1 \\ D=-1 \end{cases}$

Luego reemplazando los valores de A, B, C y D en (1).

$$\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx=\int \frac{x\,dx}{x^2+2}-\int \frac{x+1}{(x^2+2)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+\frac{1}{2(x^2+2)}-\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} \qquad \ldots (2)$$

Calculando la integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta=\dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ x=\sqrt{2}\operatorname{tg}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta=\operatorname{arctg}(\dfrac{x}{\sqrt{2}}) \\ dx=\sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$\sec\theta=\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}\sec\theta=\sqrt{x^2+2} \Rightarrow 2\sec^2\theta=x^2+2$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}=\int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta}{4\sec^4\theta}=\frac{\sqrt{2}}{4}\int \cos^2\theta\, d\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta \qquad \ldots (3)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\int (1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{8}(\theta+\frac{\operatorname{sen}\theta}{2})=\frac{\sqrt{2}}{8}(\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}(\operatorname{arctg}(\frac{x}{\sqrt{2}})+\frac{\sqrt{2}x}{x^2+2})$$

Reemplazando (3) en (2).

$$\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + \frac{2+x}{4(x^2+2)} - \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c$$

(14) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

Solución

A la integral dada expresaremos en la forma:

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int [\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}]dx \qquad \ldots (1)$$

Ahora calculamos las constantes A, B, C, D y E

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x}{x(x^2+1)^2}$$

Igualando los numeradores se tiene:

$$1 = A(x^4+2x^2+1) + B(x^4+x^2) + C(x^3+x) + Dx^2 + Ex$$

$$1 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A$$

Luego por identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 2A+B+D=0 \\ C+E=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \\ D=-1 \\ E=0 \end{cases}$

Por lo tanto reemplazamos los valores de A, B, C, D y E en (1).

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int [\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}]dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2(x^2+1)} + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2}{x^2+1}\right| + \frac{1}{2(x^2+1)} + c$$

(15) $\int \frac{2x^3+3x^2+x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}dx$

Solución

A la integral dada escribiremos en la forma:

$$\int \frac{2x^3+3x^2+x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}dx = \int [\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2x+2)^2}]dx \qquad \ldots (1)$$

Ahora calculamos las constantes A, B, C, D y E.

$$\frac{2x^3+3x^2+x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= \frac{A(x^2+2x+2)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+2x+2)+(Dx+E)(x+1)}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}$$

Igualando los numeradores se tiene:

$$2x^3+3x^2+x-1 = A(x^2+2x+2)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+2x+2)+(Dx+E)(x+1)$$

$$= A(x^4+4x^3+8x^2+8x+4)+B(x^4+3x^3+4x^2+2x)+$$

$$+C(x^3+3x^2+4x+2)+D(x^2+x)+E(x+1)$$

$$2x^3+3x^2+x-1 = (A+B)x^4+(4A+3B+C)x^3+(8A+4B+3C+D)x^2+$$

$$+(8A+2B+4C+D+E)x+4A+2C+E$$

Por identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+3B+C=2 \\ 8A+4B+3C+D=3 \\ 8A+2B+4C+D+E=1 \\ 4A+2C+E=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=3 \\ D=-2 \\ E=-3 \end{cases}$

Luego reemplazando los valores de A, B, C, D y E en (1).

$$\int\frac{2x^3+3x^2+x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}dx=\int[\frac{-1}{x-1}+\frac{x+3}{x^2+2x+2}-\frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2}]dx$$

$$=-\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{(x+1)\,dx}{x^2+2x+2}+2\int\frac{dx}{x^2+2x+2}-\int\frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+2)^2}-\int\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|+2\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}-$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{x+1}{2(x^2+2x+2)}+c$$

$$=-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{x-1}{2(x^2+2x+2)}+c$$

1.6.11 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Calcular las siguientes integrales indefinidas.

① $\displaystyle\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$ Rpta. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+c$

② $\displaystyle\int\frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$ Rpta. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+c$

③ $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^3-7x+6}dx$ Rpta. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{(x-2)^2}{(x-1)^3(x+3)}\right|+c$

④ $\displaystyle\int\frac{4x^3+4x^2-18x+6}{x^4-3x^3-x^2+3x}dx$ Rpta. $2\ln|x|-3\ln|x+1|+\ln|x-1|+4\ln|x-3|+c$

⑤ $\displaystyle\int\frac{dx}{x(a^2-x^2)}$, $a>0$ Rpta. $\frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x^2}{a^2-x^2}\right|+c$

⑥ $\displaystyle\int\frac{2x^2-1}{x^3-x}dx$ Rpta. $\ln(|x|\sqrt{x^2-1})+c$

⑦ $\int \frac{32x\,dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}dx$ Rpta. $\ln|2x-1|-6\ln|2x-3|+5\ln|2x-5|+c$

⑧ $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$ Rpta. $5x+\ln\left|\frac{\sqrt{x}(x-4)^{161/6}}{(x-1)^{7/3}}\right|+c$

⑨ $\int \frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}$ Rpta. $\ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+c$

⑩ $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx$ Rpta. $\ln\left|\frac{(x-2)^{3/10}}{x^{1/6}(x+3)^{2/15}}\right|+c$

⑪ $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$ Rpta. $\frac{x}{4}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^{16}}{(2x+1)^9(2x-1)^7}\right|+c$

⑫ $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$ Rpta. $-\frac{4}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+c$

⑬ $\int \frac{3x-2}{(x+2)(x+1)(x-1)}dx$ Rpta. $-\frac{8}{3}\ln|x+2|+\frac{5}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln|x-1|+c$

⑭ $\int \frac{2x^2+3x-1}{(x+3)(x+2)(x-1)}dx$ Rpta. $2\ln|x+3|-\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{1}{3}|x-1|+c$

⑮ $\int \frac{x^2-x+1}{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}dx$

Rpta. $\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{8}\ln|x+1|+\frac{7}{8}\ln|x-3|-\ln|x-2|+c$

⑯ $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx$ Rpta. $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x+2}\right|+c$

⑰ $\int \frac{x^4+3x^3-5x^2-4x+17}{x^3+x^2-5x+3}dx$ Rpta. $\frac{x^2}{2}+2x-\frac{3}{x-1}-\ln|x^2+2x-3|+c$

(18) $\int \frac{5x^2-11x+5}{x^3-4x^2+5x-2}dx$ Rpta. $\ln(x-1)^2(x-2)^3-\frac{1}{x-1}+c$

(19) $\int \frac{x^2dx}{x^4-5x^2+4}dx$ Rpta. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+c$

(20) $\int \frac{2x^4-2x+1}{2x^5-x^4}dx$ Rpta. $\frac{1}{3x^3}+\ln|2x-1|+c$

(21) $\int \frac{dx}{x^3+3x^2}$ Rpta. $\frac{1}{9}\ln|\frac{x+3}{x}|-\frac{1}{3x}+c$

(22) $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx$ Rpta. $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+\ln(\frac{x}{x+1})^2+c$

(23) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-x+1}dx$ Rpta. $-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{5}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+c$

(24) $\int \frac{x+1}{x^3+4x}dx$ Rpta. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2}{x^2+4}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{x}{2})+c$

(25) $\int \frac{x^3+4x+1}{x^4+x^2+1}dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+c$

(26) $\int \frac{2x^2}{x^4+x^2+1}dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+c$

(27) $\int \frac{-24x^3+30x^2+52x+17}{9x^4-6x^3-11x^2+4x+4}dx$

Rpta. $-\ln\left|(x+2)^{2/3}(x-1)^2\right|-\frac{1}{3(3x+2)}-\frac{3}{x-1}+c$

(28) $\int \frac{x^2-3x-7}{(2x+3)(x+1)^2}dx$ Rpta. $\frac{3}{x+1}+\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+3|+c$

(29) $\int \frac{dx}{x^2(x+1)^2}$ Rpta. $2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + c$

(30) $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$ Rpta. $\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right| + \frac{6}{x+1} + c$

(31) $\int (\frac{x+2}{x-1})^2 \frac{dx}{x}$ Rpta. $4\ln|x| - 3\ln|x-1| - \frac{9}{x-1} + c$

(32) $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$ Rpta. $\frac{4}{x+2} + \ln|x+1| + c$

(33) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$ Rpta. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$

(34) $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$ Rpta. $2\ln\left|\frac{x+4}{x-2}\right| - \frac{5x+12}{x^2+6x+8} + c$

(35) $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}dx$ Rpta. $\frac{3}{2(x-2)^2} + \ln|x-5| + c$

(36) $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx$ Rpta. $\frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{\sqrt{(x-1)(x-2)}}{|x|}\right| + c$

(37) $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$ Rpta. $-\frac{9}{2}(\frac{1}{x-3}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{x+1}) + c$

(38) $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx$ Rpta. $\frac{8}{49(x-5)} - \frac{27}{49(x+2)} + \frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right| + c$

(39) $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$ Rpta. $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + 2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + c$

(40) $\int \frac{x-3}{(x+1)^2(x-2)}dx$ Rpta. $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right| - \frac{4}{3(x-1)} + c$

(41) $\int \frac{2x+3}{(x+2)(x-1)^2}dx$ Rpta. $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{5}{3(x-1)}+c$

(42) $\int \frac{x^3-3x+4}{(x+1)(x-1)^3}dx$ Rpta. $-\frac{3}{4}\ln|x+1|+\frac{7}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x+1)^2}+c$

(43) $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}dx$ Rpta. $\frac{1}{2(x-2)^2}-\frac{1}{3(x-2)^3}+\ln(x-2)+c$

(44) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2}dx$ Rpta. $\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+c$

(45) $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$ Rpta. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{x}(1+\frac{1}{2x})-\frac{1}{2(x-2)}+c$

(46) $\int \frac{x+1}{x^3-2x^2+3x}dx$ Rpta. $\frac{\ln|x|}{3}-\frac{\ln|x^2-2x+3|}{6}+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\frac{x-1}{2})+c$

(47) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$

Rpta. $\frac{1}{52}\ln|x-3|-\frac{1}{20}\ln|x-1|+\frac{1}{65}\ln(x^2+4x+5)+\frac{7}{130}\operatorname{arctg}(x+2)+c$

(48) $\int \frac{x^2+x-2}{x^4+5x^2+4}dx$ Rpta. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+4}\right|-\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+c$

(49) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$ Rpta. $\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5)-\ln(x-1)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{x-1}{2})+c$

(50) $\int \frac{x^5dx}{(x^2+4)^2}$ Rpta. $\frac{x^2}{2}-\frac{8}{x^2+4}-4\ln|x^2+4|+c$

(51) $\int \frac{4x^2+6}{x^3+3x}dx$ Rpta. $\ln(x^2(x^2+3))+c$

(52) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^3}$ Rpta. $\displaystyle\frac{2(x+1)}{(x^2+2x+5)^2}+\frac{3(x+1)}{4(x^2+2x+5)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(\frac{x+1}{2})+c$

(53) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^4+x^2+1)^2}$

Rpta. $\displaystyle\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x^4+x^2+1|+\frac{5\sqrt{3}}{18}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x^2+1))+\frac{1-x^2}{6(x^4+x^2+1)}+c$

(54) $\displaystyle\int \frac{6x^3dx}{(x^2+1)^2}$ Rpta. $\displaystyle 3\ln|x^2+1|-\frac{3x^2}{x^2+1}+c$

(55) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+5x+8}{x(x^2+4)^2}$ Rpta. $\displaystyle\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2}{x^2+4}\right|+\frac{9}{16}\operatorname{arctg}(\frac{x}{2})+\frac{x}{8(x^2+4)}+c$

(56) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^3+1)^2}$ Rpta. $\displaystyle\ln|x|-\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+\frac{1}{3(x^3+1)}+c$

(57) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$ Rpta. $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}})+c$

(58) $\displaystyle\int \frac{3x^4-4x^3+7x^2-3x+11}{(x^2+x+1)(x^3-x^2-x-2)}dx$

Rpta. $\displaystyle\ln|x-2|+\ln|x^2+x+1|-\frac{4x+5}{3(x^2+x+1)}-\frac{38}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+c$

(59) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$ Rpta. $\displaystyle\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+c$

(60) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^6-10x^3+9}$ $\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-9}$ $(x^3-9)(x^3-1)$ Rpta. $\displaystyle\frac{1}{24}\ln\left|\frac{x^3-9}{x^3-1}\right|+c$

(61) $\displaystyle\int \frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^3+1)}dx$ Rpta. $\displaystyle\ln\left|\frac{x^3-x^2+x}{(x+1)^2}\right|-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+c$

(62) $\int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\ln|x^4-1|-\frac{1}{4}\ln|x^8+x^4-1|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x^4+1-\sqrt{5}}{2x^4+1+\sqrt{5}}\right|+c$

(63) $\int \frac{x^5 dx}{x^3-1}$ Rpta. $\frac{1}{3}(x^3-\ln|x^3-1|)+c$

(64) $\int \frac{x^3+x^2-5x+15}{(x^2+5)(x^2+2x+3)}dx$

Rpta. $\ln\sqrt{x^2+2x+3}+\frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{x+1}{\sqrt{2}})-\sqrt{5}\operatorname{arctg}(\frac{x}{\sqrt{5}})+c$

(65) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$ Rpta. $\frac{2-x}{4(x^2+2)}-\ln\sqrt{x^2+2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{x}{\sqrt{2}})+c$

(66) $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx$ Rpta. $\frac{3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)}+\ln(\frac{(x-1)^2}{x^2+1})+\operatorname{arctg}x+c$

(67) $\int \frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}$ Rpta. $\ln(\frac{x-1}{x})-\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})-\frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}+c$

(68) $\int \frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)}dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}x+c$

(69) $\int \frac{x^3+3x^2-2x+1}{x^4+5x^2+4}dx$ Rpta. $\ln|x^2+4|+\frac{11}{6}\operatorname{arctg}(\frac{x}{2})-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}x+c$

(70) $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2(x^2+4)}dx$ Rpta. $-\frac{4}{25}\ln|x-1|-\frac{2}{5(x-1)}+\frac{2}{25}\ln|x^2+4|+\frac{19}{50}\operatorname{arctg}x+c$

(71) $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-27}dx$ Rpta. $\frac{14}{27}\ln|x-3|+\frac{13}{54}\ln|x^2+3x+9|+\frac{7}{3\sqrt{27}}\operatorname{arctg}(\frac{2x+3}{\sqrt{27}})+c$

(72) $\int \frac{dx}{x^3+1}$ Rpta. $\frac{1}{6}\ln(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1})+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+c$

(73) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$ Rpta. $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+3)^3}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{x-1}{2})+c$

(74) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$ Rpta. $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\operatorname{arctg}x+c$

(75) $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$ Rpta. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$

(76) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$ Rpta. $\frac{1}{4}\ln(\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)})-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$

(77) $\int \frac{2x^2-x+2}{x^5+2x^3+x}dx$ Rpta. $\ln(\frac{x^2}{x^2+1})-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$

(78) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}dx$ Rpta. $\ln\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2(x^2+1)}+c$

(79) $\int \frac{dx}{x(4+x^2)(1+x^2)}$ Rpta. $\frac{1}{16}\ln x-\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-\frac{1}{24(x^2+4)}+c$

(80) $\int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}dx$ Rpta. $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arctg}(\frac{x-3}{2})+c$

(81) $\int \frac{(x+1)^4}{(x^2+2x+2)^3}dx$ Rpta. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2}+c$

(82) $\int \frac{dx}{x^4+1}$ Rpta. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{2}x}{1+x^2})+c$

(83) $\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}dx$ Rpta. $\frac{1}{21}\left[8\ln|x^3+8|-\ln|x^3+1|\right]+c$

(84) $\int \frac{4x^3+8x^2-12}{(x^2+4)^2}dx$ Rpta. $2\ln\left|x^2+4\right|+\frac{5}{4}\operatorname{arctg}(\frac{x}{2})+\frac{16-11x}{2(x^2+4)}+c$

(85) $\int \frac{x^4+1}{(x^2+4)^3}dx$ Rpta. $\frac{51}{256}\operatorname{arctg}(\frac{x}{2}) - \frac{77x}{128(x^2+4)} + \frac{17x}{16(x^2+2)^2} + c$

(86) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$ Rpta. $\frac{2-x}{4(x^2+2)} + \frac{\ln(x^2+2)}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c$

(87) $\int \frac{2x\ dx}{(1+x)(1+x^2)^2}$ Rpta. $\frac{x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|1+x^2| + c$

(88) $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-x}dx$ Rpta. $\ln\frac{(x-1)^3}{x^3}(x+1) + c$

(89) $\int \frac{1+2x-x^2}{(1+x)^2(1+x^2)}$ Rpta. $\ln\left|\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\right| + \frac{1}{1+x} + \operatorname{arctg} x + c$

(90) $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$ Rpta. $\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} + c$

(91) $\int \frac{x^3+2}{x^3(x^3+8)}dx$ Rpta. $-\frac{1}{8x^2} + \frac{3}{16}\ln|x+2| - \frac{3}{32}\ln|x^2+2x+4| + \frac{\sqrt{3}}{16}\operatorname{arctg}(\frac{x+1}{\sqrt{3}}) + c$

(92) $\int \frac{2x^3-4}{(x^2+1)(x+1)^2}dx$ Rpta. $\frac{3}{x+1} + \ln|x^2+1| - \operatorname{arctg} x + c$

(93) $\int \frac{4x^2+2x+8}{x^5+4x^3+4x}dx$ Rpta. $\ln(\frac{x^3}{x^2+2}) + \frac{\sqrt{2}}{8}[\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}x}{x^2+2}] + c$

(94) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2(x^4+1)^2}$

Rpta. $\ln|x| - \frac{1}{16}\ln|x^4+1| - \frac{3}{8}\ln|x^2+1| - \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x^2 + \frac{1-x^2}{8(x^4+1)(x^2+1)} + c$

(95) $\int \frac{3\ dx}{x(x^8+2x^4+2)^2}$

Rpta. $\frac{3}{4}\ln|x|-\frac{3}{32}\ln\left|x^8+2x^4+2\right|-\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x^4+1)-\frac{3x^4}{16(x^8+2x^4+2)}+c$

(96) $\int\frac{dx}{x(x^4-1)}$ **Rpta.** $\frac{1}{4}\ln\left|x^4-1\right|-\ln|x|+c$

(97) $\int\frac{dx}{x(x^3-1)(x^6+4)}$ **Rpta.** $\frac{1}{12}\ln\left|x^6+1\right|-\ln|x|+\frac{1}{6}\ln\left|x^3-1\right|-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(x^3\right)+c$

(98) $\int\frac{e^{2x}\,dx}{e^{3x}+4e^x-5}$

Rpta. $\frac{1}{7}\ln\left|e^x-1\right|-\frac{1}{14}\ln\left|e^{2x}+e^x+5\right|+\frac{11\sqrt{19}}{133}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{19}}{19}(2e^x+1))+c$

(99) $\int\frac{x^4-4x^2-14x}{x^2-2x-8}dx$ **Rpta.** $\frac{x^3}{3}+x^2+8x+\frac{68}{3}\ln|x-4|-\frac{14}{3}\ln|x+2|+c$

(100) $\int\frac{2x^2dx}{x^4+x^2+1}dx$ **Rpta.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+c$

(101) $\int\frac{x^3+4x+1}{x^4+x^2+1}dx$ **Rpta.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+c$

(102) $\int\frac{dx}{x^8+x^6}$ **Rpta.** $-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+c$

(103) $\int\frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}$ **Rpta.** $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})-\frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}+c$

(104) $\int\frac{c\operatorname{tg}x\,dx}{(\operatorname{sen}^7x+1)}$ **Rpta.** $\ln|\operatorname{sen}x|-\frac{1}{7}\ln\left|\operatorname{sen}^7x+1\right|+\frac{1}{7(\operatorname{sen}^7x+1)}+c$

(105) $\int\frac{dx}{x(x^9+1)^3}$ **Rpta.** $\ln|x|-\frac{1}{9}\ln\left|x^9+1\right|+\frac{1}{9(x^9+1)}+\frac{1}{18(x^9+1)^2}+c$

(106) $\int \frac{dx}{x^{12}(x^{11}+1)}$ Rpta. $\frac{1}{11}\ln\left|x^{11}+1\right|-\frac{1}{11x^{11}}-\ln|x|+c$

(107) $\int \frac{5x-8}{x^3+4x^2+4x}dx$ Rpta. $2\ln\frac{x-2}{x}-\frac{1}{x-2}+c$

(108) $\int \frac{dx}{(1+x^3)^2}$ Rpta. $\frac{x}{3(1+x^2)}+\frac{1}{9}\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right|+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+c$

(109) $\int \frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}dx$ Rpta. $\ln\left[(x-1)^2(x+2)^3\right]-\frac{1}{x+2}+c$

(110) $\int \frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2}dx$

Rpta. $\frac{x-4}{10(x^2-4x+5)}+\frac{1}{25}\ln\left|\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right|-\frac{3}{50}\operatorname{arctg}(x-2)+c$

(111) $\int \frac{6x^3-18x}{(x^2-1)(x^2-4)}dx$ Rpta. $2\ln\left|x^2-1\right|+\ln\left|x^2-4\right|+c$

(112) $\int \frac{dx}{x^5-x^2}$ Rpta. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{1}{x}+c$

(113) $\int \frac{x^2+x-10}{(2x-3)(x^2+4)}dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+4}{2x-3}\right|+\operatorname{arctg}(\frac{x}{2})+c$

(114) $\int \frac{x\,dx}{x^4-x^2-1}$ Rpta. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x^2-1-\sqrt{5}}{2x^2-1+\sqrt{5}}\right|+c$

(115) $\int \frac{2x^2-1}{x^3-1}dx$

(116) $\int \frac{x^4-9x^2+16x+4}{x^3-3x^2+x+5}dx$

(117) $\int \frac{x^2+5}{x^2(x^2+8)}dx$

(118) $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2(x^2+4)}dx$

(119) $\int \frac{4x^2+2x+8}{x^5+4x^3+4x}dx$

(120) $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-x}dx$

(121) $\displaystyle\int \frac{2x^3-4}{(x^2+1)(x+1)^2}dx$ (122) $\displaystyle\int \frac{2x^3+3x^2+x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx$ (123) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$

(124) $\displaystyle\int \frac{4x^2+3x+1}{4x^3+4x^2+4x+4}dx$ (125) $\displaystyle\int \frac{4x^2-12x+9}{-4x^3+21x^2-21x+4}dx$

(126) $\displaystyle\int \frac{620x\,dx}{(-6x^3-5x^2-6x+5)(x^2+1)}$ (127) $\displaystyle\int \frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{(x+1)(x^2+4)^2}dx$

(128) $\displaystyle\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+3x-4}{(x^2+4)^3}dx$

1.6.12 MÉTODO DE HERMITE-OSTROGRADSKI.-

Cálculo de la integral de la forma: $\boxed{I=\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}dx,\quad n=1,2,3\ldots}$

Donde: x^2+bx+c es una expresión cuadrática irreducible.

Para el cálculo de estas integrales se debe escribir en la forma:

$$\boxed{\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}dx=\frac{P(x)}{(x^2+bx+c)^{n-1}}+\int \frac{Cx+D}{x^2+bx+c}dx}$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado < 2(n – 1) = grado de $(x^2+bx+c)^{n-1}$ y los coeficientes de $P(x)$ así como C y D se hallan derivando ambos miembros y se aplica el método de los casos de 2.9. Además la integral del segundo miembro se calcula de acuerdo al 1er caso de 2.9.

Ahora veremos el método de Hermite-Ostrogradski si en la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, la función polinómica $Q(x)$ se descompone en factores de multiplicidad, es decir:

$$\boxed{Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}(x^2+b_sx+c_s)^{\beta_s}}$$

Entonces a la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ se expresa en la forma siguiente:

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{f(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{g(x)}{Q_2(x)}dx} \quad \ldots (\alpha)$$

donde: $Q_1(x)$ es el máximo común divisor de los polinomios $Q(x)$ y de su derivada $Q'(x)$ y $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$, además $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios con coeficientes indeterminados, cuyos grados son menores en una unidad que los polinomios $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$ respectivamente.

Los coeficientes indeterminados de los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ se calculan derivando la ecuación (α).

Ejemplo. Calcular las integrales siguientes:

1. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$

<u>**Solución**</u>

Como: $Q(x) = (x+1)^2(x^2+1)^2 \Rightarrow Q'(x) = 2(x+1)(x^2+1)(3x^2+2x+1)$

Además: $Q_1(x)$ = máximo común divisor de $Q(x)$ y $Q'(x)$ es: $Q_1(x) = (x+1)(x^2+1)$

Además: $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)} = \frac{(x+1)^2(x^2+1)^2}{(x+1)(x^2+1)} = (x+1)(x^2+1)$

Como: $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{f(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{g(x)}{Q_2(x)}dx$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x+1)(x^2+1)} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{(x+1)(x^2+1)}dx \quad \ldots (\alpha)$$

Derivando y agrupando la ecuación (α) se tiene:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\left[Dx^5+(-A+D+E)x^4+(-2B+D+E+F)x^3+\right.$$

$$\left.+(A-B-3C+D+E+F)x^2+(2A-2C+E+F)x+B-C+F\right]\div\left[(x+1)^2(x^2+1)^2\right]$$

Por identidad de polinomios se tiene $\begin{cases} D=0 \\ -A+D+E=0 \\ -2B+D+E+F=0 \\ A-B-3C+D+E+F=0 \\ 2A-2C+E+F=0 \\ B-C+F=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{4} & : & B=\frac{1}{4} \\ C=0 & : & D=0 \\ E=-\frac{1}{4} & : & F=\frac{3}{4} \end{cases}$

Ahora reemplazando estos valores en (α):

$$\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}=\frac{-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}+0}{(x+1)(x^2+1)}+\int\frac{0-\frac{x}{4}+\frac{3}{4}}{(x+1)(x^2+1)}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{x^2-x}{(x+1)(x^2+1)}\right)-\frac{1}{4}\int\frac{x-3}{(x+1)(x^2+1)}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{x^2-x}{(x+1)(x^2+1)}\right)-\frac{1}{4}\left[\int\frac{-2\,dx}{x+1}+\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-\int\frac{dx}{x^2+1}\right]$$

$$=-\frac{x^2-x}{4(x+1)(x^2+1)}-\frac{1}{4}\left[-2\ln|x+1|+\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x\right]+c$$

$$=-\frac{x^2-x}{4(x+1)(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+c$$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}$

Solución

Sea: $Q(x)=(x^3-1)^2 \Rightarrow Q'(x)=6x^2(x^3-1)$

Luego el máximo común divisor de $Q(x)$ y $Q'(x)$ es $Q_1(x)$, es decir:

$Q_1(x)=m.c.d.\left(Q(x),Q'(x)\right)=x^3-1$, además: $Q_2(x)=\dfrac{Q(x)}{Q_1(x)}=\dfrac{(x^3-1)^2}{x^3-1}=x^3-1$

Como: $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{f(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{g(x)}{Q_2(x)}dx$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1}+\int\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}dx \qquad \ldots(\alpha)$$

Derivando la ecuación se tiene:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2}=\frac{(x^3-1)(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+C)3x^2}{(x^3-1)^2}+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}$$

Eliminando denominadores se tiene:

$$1=(x^3-1)(2Ax+B)-3x^2(Ax^2+Bx+C)+(Dx^2+Ex+F)(x^3-1)$$

$$1=Dx^5+(-A+E)x^4+(-2B+F)x^3+(-3C-D)x^2+(2A-E)x-B-F$$

Por identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} D=0 \\ -A+E=0 \\ -2B+F=0 \\ -3C-D=0 \\ 2A-E=0 \\ B-F=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \ ; \ B=-\frac{1}{3} \\ C=0 \ ; \ D=0 \\ E=0 \ ; \ F=-\frac{2}{3} \end{cases}$

Ahora reemplazando estos valores en la ecuación (α)

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{-x}{3(x^3-1)}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^3-1} \qquad \ldots(1)$$

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})\ \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{-x}{3(x^3-1)}+\frac{1}{9}\ln(\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2})+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+c$$

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^4}$

Solución

Sea: $Q(x)=(x^2+1)^4 \quad\Rightarrow\quad Q'(x)=8x(x^2+1)^3$

Calculamos $Q_1(x)$ $Q_1(x)$ que es el máximo común divisor de $Q(x)$ y $Q'(x)$ es decir.

$Q_1(x)=m.c.d.\ (Q(x),Q'(x))=(x^2+1)^3$, además: $Q_2(x)=\dfrac{Q(x)}{Q_1(x)}=\dfrac{(x^2+1)^4}{(x^2+1)^3}=x^2+1$

Como: $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^4}=\frac{f(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{g(x)}{Q_2(x)}dx$

$$\Rightarrow\quad\int\frac{dx}{(x^2+1)^4}=\frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x^2+1)^3}+\int\frac{Hx+E}{x^2+1}dx \qquad \ldots(\alpha)$$

Ahora derivamos la ecuación (α) y luego agrupamos término a término para poder aplicar la identidad de polinomios.

$$1=Hx^7+(-A+G)x^6+(-2B+3H)x^5+(5A-3C+3G)x^4+(4B-4D+3H)x^3+$$

$$+(3C-5E+3G)x^2+(2D-6F+H)x+E+G$$

Por identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} H=0 \\ -A+G=0 \\ -2B+3H=0 \\ 5A-3C+3G=0 \\ 4B-4D+3H=0 \\ 3C-5E+3G=0 \\ 2D-6F+H=0 \\ E+G=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{5}{16} \quad ; \quad B=0 \\ C=\frac{5}{6} \quad ; \quad D=0 \\ E=\frac{11}{16} \quad ; \quad F=0 \\ G=\frac{5}{16} \quad ; \quad H=0 \end{cases}$

Ahora reemplazamos estos valores en (α).

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{\frac{5}{16}x^5+\frac{5}{6}x^3+\frac{11}{16}x}{(x^2+1)^3}+\frac{5}{16}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{15x^5+40x^3+33x}{48(x^2+1)^3}+\frac{5}{16}\operatorname{arctg} x + c$$

1.6.13 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1. $\displaystyle\int \frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

   Rpta. $\dfrac{x}{x^2+x+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}})-2\ln(x^2+x+1)+\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+2x+c$

2. $\displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$ **Rpta.** $\dfrac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg} x+c$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$ **Rpta.** $\dfrac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\dfrac{5}{16}\operatorname{arctg} x+c$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$ **Rpta.** $\dfrac{3}{8}\operatorname{arctg} x-\dfrac{x}{4(x^4-1)}-\dfrac{3}{16}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+c$

5. $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$ **Rpta.** $x-\dfrac{x-3}{x^2-2x+2}+2\ln(x^2-2x+2)+\operatorname{arctg}(x-1)+c$

(6) $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$ Rpta. $\frac{1}{3}(2\ln|\frac{x^3+1}{x^3}|-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^3+1})+c$

(7) $\int \frac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}dx$ Rpta. $-6\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{12x^2-5x-1}{2(x^3-x^2)}+c$

(8) $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}dx$ Rpta. $\frac{1}{x^2(x^2+1)}+\ln\sqrt{x^2+1}+c$

(9) $\int \frac{(x^2-1)^2\,dx}{(x+1)(1+x^2)^3}$ Rpta. $\frac{1}{2}(\frac{x+1}{(1+x^2)^2})+\frac{1}{4}\frac{x-2}{x^2-1}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+c$

(10) $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$ Rpta. $\frac{2}{3}\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{3(x^3+1)}+c$

(11) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}$ Rpta. $\frac{1}{648}\left[\operatorname{arctg}(\frac{x+1}{3})+\frac{3(x+1)}{x^2+2x+10}+\frac{18(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}\right]+c$

(12) $\int \frac{x^5-x^4-26x^2-24x-25}{(x^2+4x+5)^2(x^2+4)^2}dx$

Rpta. $-\frac{x}{8(x^2+4)}-\frac{2x+5}{2(x^2+4x+5)}-\frac{1}{16}\operatorname{arctg}(\frac{x}{2})-\operatorname{arctg}(x+2)-c$

(13) $\int \frac{x+2}{(x^2+2x+2)^3}dx$ Rpta. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{3}{8}(\frac{x+1}{x^2+2x+2})+\frac{x}{4(x^2+2x+2)^2}+c$

(14) $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}dx$ Rpta. $-\frac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2}-\frac{57}{8}\operatorname{arctg}x+c$

(15) $\int \frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}dx$ Rpta. $\frac{3-7x-2x^2}{2(x^3-x^2-x+1)}+\ln\frac{|x-1|}{(x+1)^2}+c$

(16) $\int \frac{9\,dx}{5x^2(3-2x^2)^3}$ Rpta. $\left[-\frac{x^4}{2}+\frac{5x^2}{4}-\frac{3}{5}\right].\frac{1}{x(3-2x^2)^2}+\frac{1}{8\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{3}+x\sqrt{2}}{\sqrt{3}-x\sqrt{2}}\right|+c$

(17) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$ Rpta. $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\ln\sqrt{x^2+2}-1\frac{2}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{x}{\sqrt{2}})+c$

(18) $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx$ Rpta. $\frac{3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)}+\ln|\frac{(x-1)^2}{x^2+1}|+\operatorname{arctg}x+c$

(19) $\int \frac{x^3-2x^2+4}{(x^2-1)^3}dx$ Rpta. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{x}(1+\frac{1}{2x})-\frac{1}{2(x-2)}+c$

(20) $\int \frac{3x^2+1}{(x^2+1)^3}dx$ Rpta. $-\frac{x}{(x^2-1)^2}+c$

(21) $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$ Rpta. $2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+c$

(22) $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$ Rpta. $\frac{1}{4}\left[\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}+\operatorname{arctg}x-\frac{7}{(x-1)^2}\right]+c$

(23) $\int \frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2}$ Rpta. $\frac{x-4}{10(x^2-4x+5)}+\frac{1}{25}\ln\left|\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right|$

(24) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$ Rpta. $\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{64}\operatorname{arctg}x+c$

(25) $\int \frac{x\,dx}{(x^2-x+1)^3}$ Rpta. $\frac{1}{6}\left[\frac{x-2}{(x^2-x+1)^2}\right]+\frac{1}{6}\left[\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right]+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+c$

(26) $\int \frac{x^6+13x^4-x^3+14x^2-x+6}{(1-x)^3(1+x^2)^2}dx$ Rpta. $\frac{4x^3+5x-1}{(1-x)^2(1+x^2)}+\ln|1-x|+2\operatorname{arctg}x+c$

(27) $\int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}dx$ Rpta. $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arctg}(\frac{x-3}{2})+c$

(28) $\displaystyle\int \frac{2x^2+24}{(x^2-4x+8)^2}dx$ **Rpta.** $\dfrac{3x-10}{x^2-4x+8}+\dfrac{5}{2}\operatorname{arctg}(\dfrac{x-2}{2})+c$

(29) $\displaystyle\int \frac{x^9\,dx}{(x^4-1)^2}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{2x^6-3x^2}{x^4-1}+\dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right]+c$

(30) $\displaystyle\int \frac{3x^4+11x^3+10x^2+2x-16}{(x^3+6x^2+10x+8)(x^2+2x+2)}dx$

Rpta. $\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}+\ln\left[(x+4)^2\sqrt{x^2+2x+2}\right]-5\operatorname{arctg}(x+1)+c$

1.6.14 INTEGRALES DE FUNCIONES RACIONALES DE SENO Y COSENO.-

Las integrales racionales de seno y coseno son de la forma:

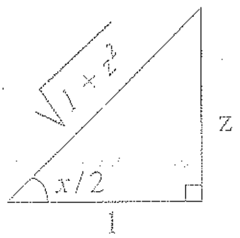
$$\boxed{\int R(\operatorname{sen}x,\cos x)\,dx} \qquad \ldots(\alpha)$$

donde R es una función racional.

Para el cálculo de este tipo de integrales, se debe de transformar en integrales de funciones racionales de una sola variable z, mediante la sustitución siguiente:

$$\boxed{z=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}} \qquad \ldots(1)$$

Ahora mediante un triángulo rectángulo, obtenemos las relaciones.



Tomando la función seno y coseno.

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}},\quad \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \qquad \ldots(2)$$

Como: $\operatorname{sen}x=2\operatorname{sen}(\frac{x}{2}).\cos(\frac{x}{2})$ $\qquad\ldots(3)$

Ahora reemplazando (2) en (3): $\boxed{\operatorname{sen}x=\dfrac{2z}{1+z^2}}$ $\qquad\ldots(4)$

Además como: $\boxed{\cos x = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}$ ... (5)

Luego reemplazando (2) en (5): $\boxed{\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}}$ ... (6)

Como: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} z$, de donde: $\boxed{dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}}$ ... (7)

por lo tanto al sustituir (4), (6), (7) en (α) se obtiene una integral de una función racional en z.

OBSERVACIÓN.- En el cálculo de las integrales de las funciones de seno y coseno, que se realiza mediante la sustitución $z = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$, en muchos casos se presentan cálculo complicados, por lo tanto en dichos casos se puede hacer otra sustitución de manera que se simplifique el desarrollo de la integral $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$, para esto consideremos los siguientes casos:

1^er^ *Caso:* Si la función R(sen x, cos x) es una función impar respecto a sen x, es decir:

si $\boxed{R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)}$

en este caso se hace la sustitución $t = \cos x$.

2^do^ *Caso:* Si la función R(sen x, cos x) es una función impar respecto a cos x, es decir:

si $\boxed{R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)}$

en este caso se hace la sustitución $t = \operatorname{sen} x$.

3^er^ *Caso:* Si la función R(sen x, cos x) es una función par respecto a sen x y cos x, es decir:

si $\boxed{R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)}$

en este caso se hace la sustitución $t = \operatorname{tg} x$.

Ejemplos de aplicación de éste criterio.

Calcular las siguientes integrales.

(1) $\int \frac{dx}{5-4\operatorname{sen} x+3\cos x}$

Solución

Del criterio que se ha establecido se tiene: $\operatorname{sen} x=\frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$, $dx=\frac{2\ dz}{1+z^2}$

Ahora reemplazando en la integral dada se tiene:

$$\int \frac{dx}{5-4\operatorname{sen} x+3\cos x}=\int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{5-\frac{8z}{1+z^2}+\frac{3-3z^2}{1+z^2}}=\int \frac{dz}{(z-2)^2}=-\frac{1}{z-2}+c$$

(2) $\int \frac{1-\operatorname{sen} x+\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}dx$

Solución

Al integrando expresamos en la forma:

$\frac{1-\operatorname{sen} x+\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}=-1+\frac{2}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}$, ahora reemplazamos en la integral dada

$$\int \frac{1-\operatorname{sen} x+\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}dx=\int(-1+\frac{2}{1+\operatorname{sen} x-\cos x})dx=-x+2\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x-\cos x} \quad \ldots (1)$$

Como: $\operatorname{sen} x=\frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$, $dx=\frac{2\ dz}{1+z^2}$

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}=\int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}-\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int \frac{dz}{z^2+z}$$

$$= \int (\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1})dz = \ln\left|\frac{z}{z+1}\right| = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right| \qquad \ldots (2)$$

Luego reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int \frac{1-\operatorname{sen} x+\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}dx = -x+2\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|+c$$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-\operatorname{sen} x)(3-\operatorname{sen} x)}$

Solución

Sea: $z = \operatorname{sen} x$, entonces hacemos la descomposición

$$\frac{1}{(2-\operatorname{sen} x)(3-\operatorname{sen} x)} = \frac{1}{(2-z)(3-z)} = \frac{A}{2-z}+\frac{B}{3-z} = \frac{A(3-z)+B(2+z)}{(2-z)(3-z)} \qquad \ldots (1)$$

Igualando los numeradores se tiene: $1 = (-A-B)z + 3A + 2B$

Por identidad se tiene: $\begin{cases} -A-B=0 \\ 3A+2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases} \qquad \ldots (2)$

Ahora reemplazando (2) en (1) se tiene: $\dfrac{1}{(2-\operatorname{sen} x)(3-\operatorname{sen} x)} = \dfrac{1}{2-\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{3-\operatorname{sen} x}$

$$\int \frac{dx}{(2-\operatorname{sen} x)(3-\operatorname{sen} x)} = \int \frac{dx}{2-\operatorname{sen} x} - \int \frac{dx}{3-\operatorname{sen} x} \qquad \ldots (3)$$

Ahora calculamos cada una de las integrales:

$$\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{2-\frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z^2-z+1} = \int \frac{dz}{(z-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2z-1}{\sqrt{3}})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}(x/2)-1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \ldots (4)$$

$$\int \frac{dx}{3-\operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{3-\frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{2\,dz}{3z^2-2z+3} = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{z^2-\frac{2}{3}z+1} = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{(z-\frac{1}{3})^2+\frac{8}{9}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{z-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3z-1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-1}{2\sqrt{2}}\right) \qquad \ldots (5)$$

Reemplazando (4) y (5) en (3) se tiene:

$$\int \frac{dx}{(2-\operatorname{sen} x)(3-\operatorname{sen} x)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-1}{2\sqrt{2}}\right) + c$$

4 $\displaystyle\int \frac{dx}{3\operatorname{sen}^2 x + 5\cos^2 x}$

Solución

Multiplicando numerador y denominador por $\sec^2 x$

$$\int \frac{dx}{3\operatorname{sen}^2 x+5\cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sec^2 x(3\operatorname{sen}^2 x+5\cos^2 x)} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{3\operatorname{tg}^2 x+5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}\sec^2 x\,dx}{(\sqrt{3}\operatorname{tg} x)^2+(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}\right) + c$$

5 $\displaystyle\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\operatorname{sen}^2 x}$

Solución

$$\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{dx}{4(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)-3\cos^2 x+5\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{dx}{9\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x\,dx}{9\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{3\sec^2 x\,dx}{(3\operatorname{tg} x)^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x) + c$$

(6) $\int \frac{dx}{1+\text{sen}^2 x}$

Solución

$$\int \frac{dx}{1+\text{sen}^2 x} = \int \frac{dx}{\text{sen}^2 x+\cos^2 x+\text{sen}^2 x} = \int \frac{dx}{2\,\text{sen}^2 x+\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}\sec^2 x\,dx}{(\sqrt{2}\,\text{tg}\,x)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,\text{tg}\,x)+c$$

(7) $\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x+3\,\text{sen}\,x\cos x-\cos^2 x}$

Solución

Multiplicando numerador y denominador por $\sec^2 x$

$$\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sec^2 x(\text{sen}^2 x+3\,\text{sen}\,x\cos x-\cos^2 x)} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\text{tg}^2 x+3\,\text{tg}\,x-1} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\text{tg}^2 x+3\,\text{tg}\,x+\frac{9}{4}-\frac{13}{9}}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x\,dx}{(\text{tg}\,x+\frac{3}{2})^2-(\frac{\sqrt{13}}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{\text{tg}\,x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}}{\text{tg}\,x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}}\right|+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{2\,\text{tg}\,x+3-\sqrt{13}}{2\,\text{tg}\,x+3+\sqrt{3}}\right|+c$$

(8) $\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x-5\,\text{sen}\,x.\cos x}$

Solución

Multiplicando numerador y denominador por $\sec^2 x$

$$\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x-5\,\text{sen}\,x\cos x} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sec^2 x(\text{sen}^2 x-5\,\text{sen}\,x\cos x)} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\text{tg}^2 x-5\,\text{tg}\,x}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{(\operatorname{tg} - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - 5}{\operatorname{tg} x}\right| + c$$

⑨ $\int \frac{dx}{1 + sen\,x}$

Solución

Multiplicando por la conjugada del denominador se tiene

$$\int \frac{dx}{1+senx} = \int \frac{1-sen\,x}{(1+sen\,x)(1-sen\,x)}dx = \int \frac{1-sen\,x}{1-sen^2 x}dx = \int \frac{1-sen\,x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{sen\,x}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x\,dx - \int tg\,x \sec x\,dx = \operatorname{tg} x - \sec x + c$$

$$\therefore \int \frac{dx}{1+sen\,x} = tg\,x - \sec x + c$$

⑩ $\int \frac{dx}{1 - sen\,x}$

Solución

Multiplicando por la conjugada del denominador se tiene

$$\int \frac{dx}{1-senx} = \int \frac{1+sen\,x}{(1-sen\,x)(1+sen\,x)}dx = \int \frac{1+sen\,x}{1-sen^2 x}dx = \int \frac{1+sen\,x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{sen\,x}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x\,dx + \int tg\,x \sec x\,dx = \operatorname{tg} x + \sec x + c$$

$$\therefore \int \frac{dx}{1-sen\,x} = tg\,x + \sec x + c$$

⑪ $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$

Solución

Multiplicando por la conjugada del denominador se tiene:

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)} dx = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos x}{sen^2 x} dx$$

$$= \int \frac{dx}{sen^2 x} - \int \frac{\cos x}{sen^2 x} dx = \int \cos ec^2 x \; dx - \int ctg\, x \cos ec\, x \, dx$$

$= -$ ctg x + cosec x + c

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{1+\cos x} = -ctg\, x + \cos ec\, x + c$$

NOTA.- Otra manera de calcular esta integral es aplicando el ángulo mitad: $1+\cos 2A = 2\cos^2 A$ para nuestro caso es: $1+\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \int \sec^2 \frac{x}{2} . \frac{dx}{2} = tg \frac{x}{2} + c$$

NOTA.- $-ctg\, x + \cos ec\, x = -\frac{\cos x}{sen\, x} + \frac{1}{sen\, x} = \frac{1-\cos x}{sen\, x}$

$$= \frac{2 sen^2 \frac{x}{2}}{2 sen \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{sen \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = tg \frac{x}{2}$$

(12) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

Solución

Multiplicando por la conjugada del denominador se tiene:

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{1+\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} dx = \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} dx = \int \frac{1+\cos x}{sen^2 x} dx$$

$$= \int \frac{dx}{sen^2 x} + \int \frac{\cos x}{sen^2 x} dx = \int \cos ec^2 x \, dx + \int ctg\, x \cos ec\, x \, dx$$

$= -$ ctg x $-$ cosec x + c

1.6.15 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Calcular las integrales indefinidas siguientes:

① $\int \frac{dx}{2\operatorname{sen} x - 3\cos x - 5}$ **Rpta.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-1}{\sqrt{3}}\right)+c$

② $\int \frac{dx}{4\operatorname{sen} x + 3\cos x}$ **Rpta.** $-\frac{2}{5}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-9}{3\operatorname{tg}(\frac{x}{2})+1}\right|+c$

③ $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$ **Rpta.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})+2}{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-2}\right|+c$

④ $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ **Rpta.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-1-\sqrt{2}}\right|+c$

⑤ $\int \frac{2-\operatorname{sen} x}{2+\cos x}dx$ **Rpta.** $\ln|2+\cos x|+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}(\frac{x}{2})\right)+c$

⑥ $\int \frac{dx}{a\cos x + b\operatorname{sen} x}$ **Rpta.** $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x+\operatorname{arctg}(\frac{a}{b})}{2}\right)\right|+c$

⑦ $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x - \cos x}$ **Rpta.** $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}\right|+c$

⑧ $\int \frac{dx}{5+4\operatorname{sen} x}$ **Rpta.** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left|\frac{5\operatorname{tg}(\frac{x}{2})+4}{3}\right|+c$

⑨ $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{2-\operatorname{sen} x}$ **Rpta.** $-x+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-1}{\sqrt{3}}\right)+c$

(10) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$ **Rpta.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{\sqrt{3}})+c$

(11) $\int \frac{dx}{\cos x+2\operatorname{sen} x+3}$ **Rpta.** $\operatorname{arctg}(1+\operatorname{tg}(\frac{x}{2}))+c$

(12) $\int \frac{dx}{8-4\operatorname{sen} x+7\cos x}$ **Rpta.** $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-5}{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-3}\right|+c$

(13) $\int \frac{1-\cos x}{1+\operatorname{sen} x}dx$ **Rpta.** $-\frac{2}{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})+1}-\ln|1+\operatorname{sen} x|+c$

(14) $\int \frac{dx}{4\operatorname{sen} x-3\cos x}$ **Rpta.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-1}{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})+3}\right|+c$

(15) $\int \frac{8\,dx}{3\cos 2x+1}$ **Rpta.** $\sqrt{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+\sqrt{2}}{\operatorname{tg} x-\sqrt{2}}\right|+c$

(16) $\int \frac{\cos x\;dx}{1+2\cos x}$ **Rpta.** $\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{\sqrt{3}+\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}\right|+c$

(17) $\int \frac{dx}{2\operatorname{sen} x+2\cos x+3}$ **Rpta.** $2\operatorname{arctg}(2+\operatorname{tg}(\frac{x}{2}))+c$

(18) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$ **Rpta.** $\ln\left|1+\operatorname{tg}(\frac{x}{2})\right|+c$

(19) $\int \frac{dx}{3\cos x+\operatorname{sen} x+1}$ **Rpta.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})+1}{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-1}\right|+c$

(20) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+b^2-2ab\cos x}$ Rpta. $\displaystyle\frac{2}{a^2-b^2}\operatorname{arctg}\left[\frac{a+b}{2-b}\operatorname{tg}(\frac{x}{2})\right]+c$

(21) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x-5\operatorname{sen} x.\cos x}$ Rpta. $\displaystyle\frac{1}{5}\ln|1-5c\operatorname{tg} x|+c$

(22) $\displaystyle\int \frac{\cos x\ dx}{\operatorname{sen}^2 x-6\operatorname{sen} x+5}$ Rpta. $\displaystyle\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{sen} x-5}{\operatorname{sen} x+1}\right|+c$

(23) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x+2\operatorname{sen} x\cos x+2\operatorname{sen}^2 x}$ Rpta. $\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x+1)+c$

(24) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+3\operatorname{sen} x\cos x-\cos^2 x}$ Rpta. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg} x+3+\sqrt{13}}\right|+c$

(25) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x\ dx}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}$ Rpta. $\operatorname{arctg}(2\operatorname{sen}^2 x-1)+c$

(26) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{sen}^2 x}$ Rpta. $\displaystyle-\frac{1}{2}\left[c\operatorname{tg} x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}})\right]+c$

(27) $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}dx$ Rpta. $-\ln|\cos x-\operatorname{sen} x|+c$

(28) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} 2x}$ Rpta. $\displaystyle\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x+\sec x|-\frac{1}{2}\operatorname{cosec} x+c$

(29) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}$ Rpta. $\displaystyle-\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}+c$

(30) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x+1)\operatorname{sen}^2 x}$ Rpta. $\ln|1+c\operatorname{tg} x|-c\operatorname{tg} x+c$

(31) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen}^4 x}$ Rpta. $\displaystyle\frac{\operatorname{tg} x}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)+c$

(32) $\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4c\operatorname{tg} x}$ Rpta. $\frac{4x}{25}-\frac{3}{25}\ln|\operatorname{tg} x+2|+\frac{2}{5(\operatorname{tg} x+2)}-\frac{3}{25}\ln|\cos x|+c$

(33) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x.\cos 2x}$ Rpta. $\ln\left|\frac{c.\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos 2x}}\right|+c$

(34) $\int \frac{\operatorname{sen} x\ dx}{\cos x(1+\cos^2 x)}$ Rpta. $\frac{1}{2}\ln\left|1+\sec^2 x\right|+c$

(35) $\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x+2\sec x)^2}$ Rpta. $\frac{\cos 2x-15}{15(4+\operatorname{sen} 2x)}+\frac{4}{15\sqrt{15}}\operatorname{arcsen}(\frac{4\operatorname{sen} 2x}{4+\operatorname{sen} 2x})+c$

(36) $\int \frac{dx}{a^2\operatorname{sen}^2 x+b^2\cos^2 x}$ Rpta. $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}(\frac{a\operatorname{tg} x}{b})+c$

(37) $\int \frac{dx}{4\operatorname{sen} x+3\cos x+5}$ Rpta. $-\frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})+2}+c$

(38) $\int \frac{\sec x\ dx}{2\operatorname{tg} x+\sec x-1}$ Rpta. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})+2}\right|+c$

(39) $\int \frac{dx}{3+5\operatorname{sen} x+3\cos x}$ Rpta. $\frac{1}{5}\ln\left|5\operatorname{tg}(\frac{x}{2})+3\right|+c$

(40) $\int \frac{dx}{a^2\operatorname{sen}^2 x-b^2\cos^2 x}$ Rpta. $\frac{1}{ab}\ln\left|\frac{a\operatorname{sen} x-b\cos x}{a\operatorname{sen} x+b\cos x}\right|+c$

(41) $\int \frac{dx}{\cos x(\cos^2 x+4\operatorname{sen} x-5)}$ Rpta. $\ln\left|(1-\operatorname{sen} x)^{1/2}(1+\operatorname{sen} x)^{-1/8}(2-\operatorname{sen} x)^{-1/9}\right|+c$

(42) $\int \frac{c\operatorname{tg} x.\cos x+c\operatorname{tg} x+1+\cos x}{c\operatorname{tg} x+c\operatorname{tg} x.\cos x+\operatorname{cosec} x+c\operatorname{tg} x}dx$ Rpta. $\ln\left|\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})\right|+x-\operatorname{tg}(\frac{x}{2})+c$

(43) $\int \frac{\operatorname{sen} x.\cos^2 x\, dx}{1+a^2\cos^2 x}$ **Rpta.** $-\frac{\cos x}{a^2}-\frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}(a\cos x)+c$

(44) $\int \frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}dx$ **Rpta.** $\frac{x}{2}+\operatorname{arctg}(\frac{1+a}{1-a})\operatorname{tg}(\frac{x}{2})+c$

(45) $\int \frac{2+3\cos x}{\cos x(1+4\cos x)}dx$ **Rpta.** $2\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|-\sqrt{\frac{5}{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5}-\sqrt{3}\operatorname{tg}(x/2)}\right|+c$

(46) $\int \frac{2\operatorname{sen} x-\cos x}{3\operatorname{sen}^2 x+4\cos^2 x}dx$ **Rpta.** $-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{\cos x}{\sqrt{3}})-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{sen} x}{2-\operatorname{sen} x}\right|+c$

(47) $\int \frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x-4\operatorname{sen} x\cos x+5\cos^2 x}dx$

Rpta. $\frac{3}{5}\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x-2\cos x)+\frac{1}{10\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+2\operatorname{sen} x+\cos x}{\sqrt{6}-2\operatorname{sen} x-\cos x}\right|+c$

(48) $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x-4\operatorname{sen} x\cos x+3\cos^2 x}{\operatorname{sen} x+\cos x}dx$

Rpta. $-\operatorname{sen} x+3\cos x+2\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})\right|+c$

(49) $\int \frac{\operatorname{sen} x+2\cos x-3}{\operatorname{sen} x-2\cos x+3}dx$

Rpta. $-\frac{3x}{5}+\frac{4}{5}\ln|\operatorname{sen} x-2\cos x+3|-\frac{6}{5}\operatorname{arctg}(\frac{5\operatorname{tg}(\frac{x}{2})+1}{2})+c$

(50) $\int \frac{2\operatorname{sen} x+\cos x}{3\operatorname{sen} x+4\cos x-2}dx$

Rpta. $\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\operatorname{sen} x+4\cos x-2|+\frac{4}{5\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}(2\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-1)}{\sqrt{7}-\sqrt{4}(2\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-1)}\right|+c$

51) $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\,dx}{1-\operatorname{tg} x}$

52) $\int \frac{3\operatorname{sen} x+2\cos x}{2\operatorname{sen} x+3\cos x}dx$

53) $\int \frac{\operatorname{sen} 5x+\operatorname{sen} x}{1+2\cos 2x}dx$

54) $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x+1)\operatorname{sen}^2 x}$

55) $\int \frac{dx}{3\operatorname{sen}^2 x+5\cos^2 x}$

56) $\int \sqrt{\frac{\sec x-\operatorname{tg} x}{\sec x+\operatorname{tg} x}}dx$

57) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 2x.\cos^4 2x}$

58) $\int \frac{\cos x+\operatorname{sen} x}{\cos 2\pi-\operatorname{sen} 2x}dx$

59) $\int \frac{dx}{13-5\cos x}$

60) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}$

61) $\int \frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{5+2\operatorname{sen} x}dx$

62) $\int \frac{\operatorname{cosec} x}{3+4\operatorname{tg} x}dx$

63) $\int \frac{sen^2 2x(1-\cos 2x)}{(sen^4 x-\cos^4 x)^2}dx$

64) $\int \frac{2\,dx}{(senx+2)(\cos x+3)}$

65) $\int \frac{sen^2 2x\,dx}{(4sen^4 x+3sen^2 2x+8\cos^4 x)(2+\cos 2x)}$

1.6.16 INTEGRALES DE ALGUNAS FUNCIONES IRRACIONALES.-

Las integrales de las funciones elementales que no son racionales, representa gran dificultad en calcularlas, incluso cuando una función elemental que es la integral de una función dada, realmente existe. En esta sección trataremos de ver criterios para algunas integrales irracionales.

1ro *Integrales de la forma:* $\boxed{\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}$

El cálculo de estas integrales se realiza completando cuadrados en el trinomio ax^2+bx+c, es decir:

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2})+c-\frac{b^2}{4a}=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$\Rightarrow \int \frac{(Ax+B)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\sqrt{a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}}}$$

Luego se hace la sustitución $z = x + \frac{b}{2a}$ y se aplica las fórmulas básicas de integración.

Ejemplo. Calcular la integral $\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$

Solución

Completando cuadrados se tiene: $4-2x-x^2 = 5-(x^2+2x+1) = 5-(x+1)^2$

$$\Rightarrow \int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} = \int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{5-(x+1)^2}} \qquad \ldots (1)$$

Sea: $z = x+1 \Rightarrow x = z-1 \Rightarrow dx = dz$

Ahora sustituyendo en la ecuación (1)

$$\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} = \int \frac{(z-1+2)\,dz}{\sqrt{5-z^2}} = \int \frac{(z+1)\,dz}{\sqrt{5-z^2}} = \int \frac{z\,dz}{\sqrt{5-z^2}} + \int \frac{dz}{\sqrt{5-z^2}}$$

$$= -\sqrt{5-z^2} + \operatorname{arcsen}\left(\frac{z}{\sqrt{5}}\right) + c = -\sqrt{4-2x-x^2} + \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + c$$

2^{do} *Integrales de la forma:* $\boxed{\int R\left[x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right] dx}$

donde: a, b, c, d son constantes y n es un número natural y además $ad-bc \neq 0$.

Para calcular estas integrales se debe transformar en integrales de funciones racionales en z, mediante la sustitución.

$z = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$; despejando x se tiene $x = \frac{b-dz^n}{cz^n-a}$ de donde: $dx = \frac{nz^{n-1}(ad-bc)}{(cz^n-a)^2}dz$

Ejemplo. Calcular la integral. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$

<u>Solución</u>

De acuerdo al criterio establecido: $z^3=\frac{1-x}{1+x}$ de donde al despejar x se tiene:

$x=\frac{1-z^3}{1+z^3} \Rightarrow dx=-\frac{6z^2dz}{(1+z^3)^2}$. Ahora reemplazando en la integral dada:

$$\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}=\int z.\frac{1+z^3}{1-z^3}\left[\frac{-6z^2dz}{(1+z^3)^2}\right]=-6\int\frac{z^3dz}{(1-z^3)(1+z^3)}=6\int\frac{z^3dz}{(z^3-1)(z^3+1)}$$

$$=6\int\left[\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}+\frac{Cz+D}{z^2+z+1}+\frac{Ez+F}{z^2-z+1}\right]dz$$

$$=\frac{6}{6}\int\left[\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}-\frac{z+2}{z^2+z+1}-\frac{z-2}{z^2-z+1}\right]dz$$

$$=\ln|z-1|+\ln|z+1|-\frac{1}{2}\ln|z^2+z+1|-\frac{1}{2}\ln|z^2-z+1|-$$

$$-\sqrt{3}\operatorname{arctg}(\frac{2z-1}{\sqrt{3}})+\sqrt{3}\operatorname{arctg}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}})+c$$

$$=\ln|z^2-1|-\frac{1}{2}\ln|(z^2+z+1)(z^2-z+1)|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{2z^2+1})+c$$

3ro ***Integrales de la forma:*** $\boxed{\int R\left[x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{p_1/q_1},(\frac{ax+b}{cx+d})^{p_2/q_2},...,(\frac{ax+b}{cx+d})^{p_k/q_k}\right]dx}$

donde a, b, c, d son constantes y además $ad-bc\neq 0$; $p_1,p_2,...,p_k$, $q_1,q_2,...,q_k$ son números enteros, siendo R una función racional.

Para calcular estas integrales, se debe de transformar en una integral de una función racional en z, mediante la sustitución $z^n=\frac{ax+b}{cx+d}$, donde n es el mínimo común múltiplo de los números $q_1,q_2,...,q_k$.

Ejemplo. Calcular la integral indefinida. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$

Solución

Sea: $z^6 = 1+x \implies \begin{cases} z^2 = \sqrt[3]{1+x} \\ z^3 = \sqrt{1+x} \end{cases}$, entonces: $x = z^6 - 1 \implies dx = 6z^5\,dz$

$$\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx = \int \frac{(z^6-1)^2+z^3}{z^2}6z^5\,dz = 6\int z^3(z^{12}-2z^6+1+z^3)dz$$

$$= 6\int (z^{15}-2z^9+z^6+z^3)dz = 6\left[\frac{z^{16}}{16}-\frac{z^{10}}{5}+\frac{z^7}{7}+\frac{z^4}{4}\right]+c$$

$$= 6z^4\left[\frac{z^{12}}{10}-\frac{z^6}{5}+\frac{z^3}{7}+\frac{1}{4}\right]+c$$

$$= 6\sqrt[3]{(x+1)^2}\left(\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{1+x}{5}+\frac{\sqrt{1+x}}{7}+\frac{1}{4}\right)+c$$

4^{to} *Integrales de la forma:* $\boxed{\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}$

donde: $P_n(x)$ es un polinomio de grado n. Para calcular estas integrales, a la integral expresaremos en la forma:

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad \ldots (1)$$

donde: $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, con coeficientes indeterminados y λ es un número real.

Los coeficientes de $Q_{n-1}(x)$ y el número λ se encuentran derivando la ecuación (1).

Ejemplo. Calcular la integral indefinida. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$

Solución

A la integral dada expresaremos en la forma:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}=(Ax+B)\sqrt{x^2-x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} \quad \ldots (1)$$

Ahora derivando la ecuación (1) se tiene:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}=A\sqrt{x^2-x+1}+\frac{(Ax+B)(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Multiplicando a esta ecuación por $\sqrt{x^2-x+1}$ tenemos:

$$2x^2=2A(x^2-x+1)+(Ax+B)(2x-1)+2\lambda$$

Agrupando: $2x^2=4Ax^2+(2B-3A)x+2A+2\lambda-B$

Por identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} 4A=2 \\ 2B-3A=0 \\ 2A+2\lambda-B=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \quad ; \quad B=\frac{3}{4} \\ \lambda=-\frac{1}{8}\end{cases}$

Reemplazando estos valores en (1) se tiene:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}=(\frac{x}{2}+\frac{3}{4})\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$=\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{8}\ln|2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}|+c$$

5^to^ Integrales de la forma: $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}}$

Para calcular estas integrales se debe de transformar en integrales de la forma del 4^to^ Caso valiéndose de la sustitución $t=\dfrac{1}{x-\alpha} \implies x-\alpha=\dfrac{1}{t}$

Ejemplo.- Calcular la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3+3x^2+3x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}$

<u>**Solución**</u>

A la integral dada expresaremos así:

$$\int \frac{dx}{(x^3+3x^2+3x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}=\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{(x+1)^2-4}} \qquad \ldots (1)$$

Sea: $t=\dfrac{1}{x+1} \implies x+1=\dfrac{1}{t} \implies dx=-\dfrac{dt}{t^2}$ reemplazando en la ecuación (1) se tiene:

$$\int \frac{dx}{(x^3+3x^2+3x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}=\int \frac{-\dfrac{dt}{t^2}}{\dfrac{1}{t^3}\sqrt{\dfrac{1}{t^2}-4}}=-\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-4t^2}} \qquad \ldots (2)$$

Calculamos la integral $\displaystyle\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-4t^2}}$ aplicando el caso anterior

$$\int \frac{t^2\,dx}{\sqrt{1-4t^2}}=(At+B)\sqrt{1-4t^2}+\lambda\int \frac{dt}{\sqrt{1-4t^2}} \qquad \ldots (3)$$

Derivando la ecuación (3) se tiene: $\dfrac{t^2}{\sqrt{1-4t^2}}=A\sqrt{1-4t^2}-\dfrac{4t(At+B)}{\sqrt{1-4t^2}}+\dfrac{\lambda}{\sqrt{1-4t^2}}$

Multiplicando a esta ecuación por $\sqrt{1-4t^2}$ tenemos: $t^2=A(1-t^2)-4t(At+B)+\lambda$

Agrupando $t^2 = -8At^2 - 4Bt + A + \lambda$, por identidad: $\begin{cases} -8A = 1 \\ -4B = 0 \\ A + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{8} \quad ; \quad B = 0 \\ \lambda = \frac{1}{8} \end{cases}$

Reemplazando estos valores en (3) se tiene:

$$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-4t^2}} = -\frac{t}{8}\sqrt{1-4t^2} + \frac{1}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{1-4t^2}} = -\frac{t}{8}\sqrt{1-4t^2} + \frac{1}{16}\operatorname{arcsen}(2t) \qquad \ldots (4)$$

Ahora reemplazando (4) en (2) se tiene:

$$\int \frac{dx}{(x^3+3x^2+3x+1)\sqrt{x^2+2x-3}} = \frac{t}{8}\sqrt{1-4t^2} - \frac{1}{16}\operatorname{arcsen}(2t) + c$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{8(x+1)^2} - \frac{1}{16}\operatorname{arcsen}(\frac{2}{x+1}) + c$$

6to Integrales de la forma: $\boxed{\int x^m (a+bx^n)^p\,dx}$ $\ldots (\alpha)$

donde m, n y p son números racionales.

Para calcular estas integrales se aplica las condiciones de "CHEBICHEV" y mediante este criterio a la integral de la ecuación (α) se puede expresar como una combinación finita de funciones elementales solamente en los tres casos siguientes:

i) Cuando p es un número entero.

ii) Cuando $\frac{m+1}{n}$, es un número entero, en este caso se hace la sustitución $z^s = a + bx^n$, donde s es el divisor de la fracción p.

iii) Cuando $\frac{m+1}{n} + P$, es un número entero, en este caso se hace la sustitución $z^s = ax^{-n} + b$, donde s es el divisor de la fracción P.

Ejemplo: Calcular la integral indefinida: $\int x^3(1+2x^2)^{-3/2}\,dx$

Solución

Aplicando el criterio de CHEBICHEV.

$\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2$ es un número entero, entonces

Sea: $z^2=1+2x^2 \Rightarrow x^2=\frac{z^2-1}{2}, \quad x\,dx=\frac{z\,dz}{2}$

$$\int x^3(1+2x^2)^{-3/2}dx=\int x^2(1+2x^2)^{-3/2}x\,dx=\int \frac{z^2-1}{2}(z^2)^{-3/2}\frac{z\,dz}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\int (z^2-1)z^{-3}z\,dz=\frac{1}{4}\int (1-z^{-2})dz=\frac{1}{4}(z+\frac{1}{z})+c$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{z^2+1}{z})+c=\frac{1}{2}(\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}})+c$$

Ejemplo. Calcular la integral indefinida: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$

Solución

A la integral dada escribiremos así:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}=\int x^{-3/2}(1+x^{3/4})^{-1/3}dx \qquad \ldots (1)$$

Ahora aplicando el criterio de CHEBICHEV

$\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{4}}=-\frac{2}{3}$ no es número entero

$\frac{m+1}{n}+P=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=-1$ es un número entero

Luego: $z^3=x^{-3/4}+1 \Rightarrow x^{3/4}=\frac{1}{Z^3-1}$

$$x=\frac{1}{(z^3-1)^{4/3}} \Rightarrow dx=-4x^2(z^3-1)^{-7/3}dz \qquad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}=\int\left[(z^3-1)^{-4/3}\right]^{-3/2}(1+\frac{1}{z^3-1})^{-1/3}(-4z^2)(z^3-1)^{-7/3}dz$$

$$=-4\int z\,dz=-2z^2+c=-2\sqrt[3]{(x^{-3/4}+1)^2}+c$$

7mo *Integrales de la forma:* $\boxed{\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx}$

donde a, b, c son números reales.

La función $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ se denomina irracionalidad cuadrática.

Cuando el trinomio ax^2+bx+c tiene raíces x_1, x_2 entonces $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ en este caso se hace la sustitución.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$$

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$$

Ahora elevando al cuadrado se tiene: $a(x-x_2)=t^2(x-x_1)$, de donde: $\boxed{x=\frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2}}$

Al momento de hacer las sustituciones se tiene la integral de una función racional.

Cuando el trinomio ax^2+bx+c no tiene raíces reales y $a>0$ la integral se transforma de una función racional haciendo la sustitución de Euler.

$\boxed{t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}}$, de donde: $ax^2+bx+c=t^2-2t\sqrt{ax}+ax^2 \Rightarrow \boxed{x=\dfrac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}}$

Luego se tiene: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}=t-\dfrac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}\sqrt{a}$

por lo tanto se tiene una función racional de t

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int R_1(t)\,dt$$

OBSERVACIÓN.- Si $a<0$ y $c>0$ $(ax^2+bx+c\geq 0)$ se puede hacer la sustitución.

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}}$$

Ejemplo. Calcular la integral indefinida: $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x\sqrt{1+x^2}}$

Solución

Sea: $\sqrt{1+x^2}=t+x$, de donde al elevar al cuadrado se tiene:

$$1+x^2=t^2+2tx+x^2 \Rightarrow x=\frac{1-t^2}{2t}$$

Luego: $\sqrt{1+x^2}=t+\dfrac{1-t^2}{2t}=\dfrac{t^2+1}{2t}$, como: $x=\dfrac{1-t^2}{2t} \Rightarrow dx=-\dfrac{t^2+1}{2t^2}dt$

Ahora reemplazando en la integral dada:

$$\int\frac{dx}{1+x\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{-(t^2+1)dt}{1+\frac{1-t^2}{2t}\cdot\frac{1+t^2}{2t}}\cdot\frac{1}{2t^2}=-2\int\frac{(t^2+1)dt}{4t^2+1-t^4}=2\int\frac{(t^2+1)dt}{t^4-4t^2-1}$$

Factorizando el denominador se tiene:

$$\int \frac{dx}{1+x\sqrt{1+x^2}} = 2\int \frac{(t^2+1)dt}{t^4-4t^2-1} = \int \frac{(t^2+1)dt}{(t^2-2-\sqrt{5})(t^2-2+\sqrt{5})}$$

$$= 2\int \left[\frac{At+B}{t^2-2-\sqrt{5}} + \frac{Ct+D}{t^2-2+\sqrt{2}}\right] dt \qquad \ldots (1)$$

Ahora calculamos los valores de A, B, C y D.

$$\frac{t^2+1}{t^4-4t^2-1} = \frac{At+B}{t^2-2-\sqrt{5}} + \frac{Ct+D}{t^2-2+\sqrt{5}} = \frac{(At+B)(t^2-2+\sqrt{5})+(Ct+D)(t^2-2-\sqrt{5})}{(t^2-2-\sqrt{5})(t^2-2+\sqrt{5})}$$

$$t^2+1 = A(t^3-2t+\sqrt{5}t)+B(t^2-2+\sqrt{5})+C(t^3-2t-\sqrt{5}t)+D(t^2-2-\sqrt{5})$$

$$t^2+1 = (A+C)t^3+Dt^2+((-2+\sqrt{5})A-(2+\sqrt{5})C)t+(\sqrt{5}-2)B-(2+\sqrt{5})D$$

Por identidad polinómica: $\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=1 \\ (-2+\sqrt{5})A-(2+\sqrt{5})C=0 \\ (\sqrt{5}-2)B-(2+\sqrt{5})D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ C=0 \\ D=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}} \end{cases} \qquad \ldots (2)$

$$\int \frac{dx}{1+x\sqrt{1+x^2}} = 2\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\int \frac{dt}{t^2-2-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\int \frac{dt}{t^2-2+\sqrt{5}}\right]$$

$$= 2\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{5}}}\ln\left|\frac{t-2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}}\right| + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}.\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}-2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{\sqrt{5}-2}}\right)\right]+c$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{2+\sqrt{5}}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-x-\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt{1+x^2}-x+\sqrt{2+\sqrt{5}}}\right| + \frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}\sqrt{\sqrt{5}-2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{\sqrt{5}-2}}\right)+c$$

Ejemplo: Calcular la integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$

Solución

Como el trinomio $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$, entonces se hace la sustitución:

$$\sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{(x+1)(x+2)}=t(x+1)$$

$$\sqrt{(x+1)(x+2)}=t(x+1) \Rightarrow x+2=t^2(x+1)\text{, de donde}$$

$$x=\frac{2-t^2}{t^2-1} \Rightarrow dx=\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt\text{, ahora reemplazando en la integral dada.}$$

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx=\int \frac{\frac{2-t^2}{t^2-1}-\frac{t}{t^2-1}}{\frac{2-t^2}{t^2-1}+\frac{t}{t^2-1}}\left(\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\right)dt$$

donde: $\sqrt{x^2+3x+2}=t\left(\frac{2-t^2}{t^2-1}+1\right)=\frac{t}{t^2-1}$

$$=-2\int \frac{2-t-t^2}{2+t-t^2}\frac{t\,dt}{(t^2-1)^2}=-2\int \frac{t^2+t-2}{t^2-t-2}.\frac{t}{(t^2-1)^2}dt$$

$$=-2\int \frac{t(t+2)\,dt}{(t-2)(t-)(t+1)^2}=-2\int \frac{(t^2+2t)dt}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}$$

$$=-2\int \left(\frac{A}{t-2}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{(t+1)^2}+\frac{E}{(t+1)^3}\right)dt \qquad \ldots (1)$$

Ahora calculamos las constantes A, B, C, D y E.

$$\frac{t^2+2t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}=\frac{A}{t-2}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{(t+1)^2}+\frac{E}{(t+1)^3}$$

$$t^2+2t=A(t-1)(t+1)^3+B(t-2)(t+1)^3+C(t-2)(t-1)(t+1)^2+$$

$$+D(t-2)(t-1)(t+1)+E(t+2)(t-1)$$

$$t^2+2t=A(t^4+2t^3-2t-1)+B(t^4+t^3-3t^2-5t-2)+C(t^4-t^3-3t^2+t+2)+$$

$$+D(t^3-2t^2-t+2)+E(t^2-3t+2)$$

$$t^2+2t=(A+B+C)t^4+(2A+B-C+D)^3+(-3B-3C-3D+E)t^2+$$

$$+(A-5B+C-D-3E)t-A-2B+2C+2D+2E$$

Por identidad de polinomios de tiene:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 2A+B-C+D=0 \\ -2A-3B-3C-2D+E=1 \\ A-5B+C-D-3E=2 \\ -A-2B+2C+2D+2E=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{8}{27} \\ B=-\dfrac{3}{8} \\ C=\dfrac{17}{216} \\ D=-\dfrac{5}{36} \\ E=-\dfrac{1}{6} \end{cases} \quad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx=\int \left[\frac{16}{27(t-2)}-\frac{6}{8(t-1)}+\frac{34}{46(t+1)}-\frac{10}{36(t+1)^2}-\frac{2}{6(t+1)^3}\right]dt+c$$

$$=\frac{16}{27}\ln|t-2|-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{17}{108}\ln|t+1|+\frac{5}{18(t+1)}+\frac{1}{6(t+1)^2}+c$$

donde: $t=\dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$

Ejemplo.- Calcular la integral $\int \sqrt{x^2+x+1-\sqrt{2x^3+x^2+2x}}\,dx$

<u>**Solución**</u>

Aplicando la propiedad de los radicales

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}-\sqrt{\frac{A-C}{2}}\ ,\quad \text{si}\quad C=\sqrt{A^2-B}$$

$$\int\sqrt{x^2+x-1-\sqrt{2x^3+x^2+2x}}\,dx=\int\left(\sqrt{\frac{A+C}{2}}-\sqrt{\frac{A-C}{2}}\right)dx \qquad \ldots (1)$$

Donde $A=x^2+x+1$ y $B=2x^2+x^2+2x$

$$A^2-B=(x^2+x+1)^2-(2x^3+x^2+2x)=(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)-(2x^3+x^2+2x)$$

$$=x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$$

$$C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{(x^2+1)^2}=x^2+1$$

Luego $A=x^2+x+1$ y $C=x^2+1$ $\qquad \ldots (2)$

Ahora reemplazamos (2) en (1), es decir:

$$\int\sqrt{x^2+x+1-\sqrt{2x^3+x^2+2x}}\,dx=\int\left(\sqrt{\frac{x^2+x+1+x^2+1}{2}}-\sqrt{\frac{(x^2+x+1)-(x^2+1)}{2}}\right)dx$$

$$=\int\left(\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+1}-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)dx=\underbrace{\int\sqrt{(x+\frac{1}{4})^2+(\frac{\sqrt{15}}{4})^2}\,dx}_{\text{fórmula básica}}-\frac{\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{x+\frac{1}{4}}{2}\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+1}+\frac{15}{32}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+1}\right|-\frac{\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{4x+1}{8}\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+1}+\frac{15}{32}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+1}\right|-\frac{\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$$

8vo *Integrales de la forma:* $\boxed{\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})dx}$

Para calcular estas integrales se debe de transformar en integrales de la forma del 7mo. Caso, mediante la sustitución $t^2=ax+b$.

Ejemplo.- Calcular la integral indefinida: $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$

Solución

Sea: $z^2 = x \Rightarrow dx = 2z\,dz$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} = 2\int \frac{z\,dz}{1+z+\sqrt{1+z^2}} \qquad \dots (1)$$

Aplicando el criterio del 7^{mo} caso se tiene: $\sqrt{1+z^2} = z+t \Rightarrow 1+z^2 = z^2+2zt+t^2$

de donde $z = \frac{1-t^2}{2t} \Rightarrow dz = -\frac{t^2+1}{2t^2}dt$

$$\sqrt{1+z^2} = z+t = \frac{1-t^2}{2t}+t = \frac{t^2+1}{2t}$$

ahora reemplazando en (1) se tiene:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} = 2\int \frac{-\frac{t^2+1}{2t^2}\cdot\frac{1-t^2}{2t}}{1+\frac{1-t^2}{2t}+\frac{t^2+1}{2t}}dt = -2\int \frac{\frac{1-t^4}{4t^3}}{\frac{2t+1-t^2+t^2+1}{2t}}dt = -\int \frac{1-t^4}{t^2(2t+2)}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t^4-1}{t^2(t+1)}dt = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+1)(t-1)}{t^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^3-t^2+t-1}{t^2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int (t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2})dt = \frac{1}{2}[\frac{t^2}{2}-t+\ln t+\frac{1}{t}]+c \qquad \dots (2)$$

Como: $z^2 = x \Rightarrow z = \sqrt{x}$, luego: $\sqrt{1+z^2} = z+t \Rightarrow t = \sqrt{1+z^2}-z = \sqrt{1+x}-\sqrt{x}$

que al reemplazar en (2) se tiene:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}[\frac{1+2x-2\sqrt{x(x+1)}}{2}-\sqrt{1+x}+\sqrt{x}+\ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})+\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}]$$

$$= \frac{2x+1-2\sqrt{x(x+1)}}{4} + \sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) + c$$

1.6.17 FÓRMULAS DE REDUCCIÓN.-

Cuando en una integral I_n que depende de un número entero n, es posible hallar una fórmula en términos de otra integral de la misma forma en donde el número entero aparece aumentado o disminuido, a dichas expresiones se denominan fórmulas de reducción o de recurrencia o recursivas.

Ejemplo.- Deducir las fórmulas de reducción de las siguientes integrales.

1) $$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a}\left(\frac{x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}\right) + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} I_{n-1}, \quad n \neq 1$$

Solución

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^n}dx - \int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} \qquad \ldots (1)$$

Calculando la integral $\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}$ por partes

Haciendo: $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{-1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} \end{cases}$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} = -\frac{x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} \qquad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{x}{a^2(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}-$$

$$-\frac{1}{a^2(2n-2)}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$=\frac{x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}+\left[\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2(2n-2)}\right]\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$=\frac{x}{a^2(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{a^2(2n-2)}I_{n-1}$$

(2) $$I_n=\int \operatorname{sen}^n x\,dx=-\frac{\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

<u>**Solución**</u>

$$I_n=\int \operatorname{sen}^n x\,dx=\int \operatorname{sen}^{n-1}x\operatorname{sen}x\,dx$$

Haciendo: $\begin{cases} u=\operatorname{sen}^{n-1}x \\ dv=\operatorname{sen}x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=(n-1)\operatorname{sen}^{n-2}x\cos x\,dx \\ v=-\cos x \end{cases}$

$$I_n=\int \operatorname{sen}^n x\,dx=-\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x+(n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

$$=-\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x+(n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x(1-\operatorname{sen}^2 x)dx$$

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx=-\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x+(n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx-(n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx$$

$$(1+(n-1))\int \operatorname{sen}^n x\,dx=-\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x+(n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

$$I_n=\int \operatorname{sen}^n x\,dx=-\frac{\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

(3) $$I_n = \int x^n e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}$$

Solución

$$I_n = \int x^n e^{-x}\,dx \quad \text{integrando por partes haciendo: } \begin{cases} u = x^n \\ dv = e^{-x}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1}\,dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I_n = \int x^n e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1} e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}$$

(4) $$\int \text{sen}^m x \cos^n x\,dx = \frac{\text{sen}^{m+1} x \cos x^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \text{sen}^m x \cos^{n-2} x\,dx$$

donde m y n son números enteros tales que $m + n \neq 0$

Solución

$$\text{Haciendo: } \begin{cases} u = \cos^{n-1} x \\ dv = \text{sen}^m x \cos x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -(n-1)\cos^{n-2} x \,\text{sen}\, x\,dx \\ v = \dfrac{\text{sen}^{m+1} x}{m+1} \end{cases}$$

$$\int \text{sen}^m x \cos^n x\,dx = \frac{\text{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \text{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx$$

$$= \frac{\text{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \text{sen}^m x(1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\,dx$$

$$\int \text{sen}^m x \cos^n x\,dx = \frac{\text{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \text{sen}^m x \cos^{n-2} x\,dx - \frac{n-1}{m+1}\int \text{sen}^m x \cos^n x\,dx$$

$$(1+\frac{n-1}{m+1})\int \text{sen}^m x \cos^n x\,dx = \frac{\text{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \text{sen}^m x \cos^{n-2} x\,dx$$

$$\therefore \quad \int \text{sen}^m x \cos^n x\,dx = \frac{\text{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \text{sen}^m x \cos^{n-2} x\,dx$$

1.6.18 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Calcular las siguientes integrales.

① $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$ Rpta. $2\,\text{arctg}\sqrt{1+x}+c$

② $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}dx$ Rpta. $x+4\sqrt{1+x}+4\ln(\sqrt{1+x}-1)+c$

③ $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$ Rpta. $\ln|\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}|+c$

④ $\displaystyle\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$ Rpta. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\,\text{arctg}(\frac{x-2}{2})+c$

⑤ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ Rpta. $x+\frac{6x^{5/6}}{5}+\frac{3x^{2/3}}{2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+c$

⑥ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$ Rpta. $3\sqrt[3]{x}+3\ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right|+c$

⑦ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ Rpta. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|1+\sqrt[4]{x}\right|+c$

⑧ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$ Rpta. $\frac{6}{5}\left[\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln|\sqrt[12]{x^5}-1|\right]+c$

⑨ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}-\sqrt[4]{3x-2}}$ Rpta. $\frac{2}{3}(3x-2)^{1/2}+\frac{4}{3}(3x-2)^{1/4}+\frac{4}{3}\ln\left|(3x-4)^{1/4}-1\right|+c$

⑩ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ Rpta. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+c$

⑪ $\displaystyle\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ Rpta. $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt{(e^x+1)^3}+c$

(12) $\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}}\,dx$ Rpta. $-x+\frac{4}{3}(\sqrt{3x+2}-\ln(1+\sqrt{3x+2}))+c$

(13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}$ Rpta. $2\sqrt{x+1}-4\sqrt[4]{x+1}+4\ln\left|1+\sqrt[4]{1+x}\right|+c$

(14) $\int \sqrt{2+\sqrt{x}}\,dx$ Rpta. $\frac{4}{15}(2+\sqrt{x})(3x+2\sqrt{x}-8)+c$

(15) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

Rpta. $6t-3t^2-2t^3+\frac{3}{2}t^4+\frac{6}{5}t^5-\frac{6}{7}t^7+3\ln\left(1+t^2\right)-6\operatorname{arctg} t+c$, donde: $t=\sqrt[6]{x+1}$

(16) $\int \frac{2+x}{\sqrt{4-2x-x^2}}\,dx$ Rpta. $\operatorname{arcsen}(\frac{x+1}{\sqrt{5}})-\sqrt{4-2x-x^2}+c$

(17) $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Rpta. $\frac{8+4x^2-3x^4}{15}\sqrt{1-x^2}+c$

(18) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$ Rpta. $-\frac{x+3}{2}\sqrt{8+2x-x^2}+\operatorname{arcsen}(\frac{x-1}{2})+c$

(19) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$ Rpta. $-\frac{x+3}{2}\sqrt{8+2x-x^2}+\frac{11}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{x-1}{3})+c$

(20) $\int \frac{x^2-2x+5}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ Rpta. $\frac{19}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}-\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}+2\sqrt{9-x^2}+c$

(21) $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+13}}\,dx$

Rpta. $(\frac{x^2-14x}{3}+37)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2\sqrt{x^2+4x+3}\right|+c$

(22) $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$ Rpta. $x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}|+c$

(23) $\int \frac{3x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ Rpta. $(x^2-5x+20)\sqrt{x^2+4x+5}-15\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}|+c$

(24) $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$ Rpta. $-\frac{3x-19}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+14\,\text{arcsen}(\frac{x+1}{2})+c$

(25) $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$ Rpta. $(\frac{x^2}{3}-\frac{5x}{6}+\frac{1}{6})\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+c$

(26) $\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\,dx$

Rpta. $(x^2+5x+20)\sqrt{x^2-4x-7}+112\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x-7}|+c$

(27) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}$ Rpta. $-\text{arcsen}(\frac{1-x}{2x})+c$

(28) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}}$ Rpta. $-\frac{1}{2}\text{arcsen}(\frac{2}{x-1})+c$

(29) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+4}}$ Rpta. $\frac{1}{32}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}-2}\right|-\frac{\sqrt{x^2+4}}{8x^2}+c$

(30) $\int \frac{3\,dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$ Rpta. $\frac{1}{2}\text{arcsec}(\frac{2x}{3})+c$

(31) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{16+x^2}}$ Rpta. $\frac{x^2-8}{96x^3}\sqrt{x^2+16}+c$

(32) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$ Rpta. $\frac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1}+c$

(33) $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$

Rpta. $\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}-\frac{11}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{5}+\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|+c$

(34) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+x^{3/4}}}$ Rpta. $-2\sqrt[3]{(x^{-3/4}+1)^2}+c$

(35) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ Rpta. $\frac{1}{6}\ln(\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2})-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2u+1}{\sqrt{3}})+c$

donde: $u=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$

(36) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ Rpta. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}[\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}]+c$

(37) $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx$ Rpta. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2}\right|-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4}+c$

(38) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^{1/4}}\,dx}{x}$ Rpta. $\frac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+x^{1/4}}+c$

(39) $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx$ Rpta. $\frac{u}{2(u^3+1)}-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}}\right|-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2u-1}{\sqrt{3}})+c$

(40) $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$ Rpta. $\frac{1}{3}\sqrt{(\frac{1+x^4}{x^4})^3}-\frac{1}{10}\sqrt{(\frac{1+x^4}{x^4})^5}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}+c$

(41) $\int \frac{dx}{x^6(65-x^6)^{1/6}}$ Rpta. $-\frac{1}{325}(\frac{65-x^2}{x^6})^{5/6}+c$

(42) $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^3}dx$ Rpta. $\frac{1}{6}\ln x-\frac{1}{6}\ln\left|\sqrt{x^2+9}+3\right|-\frac{\sqrt{x^2+9}}{2x^2}+c$

(43) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx$ Rpta. $6u+2\ln\left|\frac{u-1}{\sqrt{u^2+u+1}}\right|-2\,\text{arctg}(\frac{2u+1}{\sqrt{3}})+c$

donde: $u=(1+\sqrt{x})^{1/3}$

(44) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx$

Rpta. $-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}(\frac{2\sqrt{1+x^3}+x}{\sqrt{3}x})-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(1+x^3)^{1/3}+x}{(1+x^3)^{1/3}+x(1+x^3)^{1/3}+x^2}\right|+c$

(45) $\int \sqrt[3]{1+x^{1/4}}\,dx$ Rpta. $12\left[\frac{u^{13/3}}{13}-\frac{3u^{10/3}}{10}+\frac{3u^{7/3}}{7}-\frac{u^{4/3}}{4}\right]+c$

donde: $u=1+x^{1/4}$

(46) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$ Rpta. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{3x^3}(2x^2-1)+c$

(47) $\int \frac{dx}{x^n(1+x^n)^{1/n}}$, $n\geq 2$ Rpta. $-\frac{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}}}{(n-1)x^{n-1}}+c$

(48) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$ Rpta. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{t-1}{\sqrt{t^2+t+1}}\right|+\frac{\sqrt{3}}{5}\text{arctg}(\frac{1+2t}{\sqrt{3}})+c$

donde: $t=\sqrt[3]{1+x^5}$

(49) $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$ Rpta. $\frac{1}{2}\text{arcsen}\left|\frac{x-3}{(x-1)\sqrt{5}}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|+c$

(50) $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$ Rpta. $-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|+c$

(51) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$ Rpta. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^4+1}-1}{\sqrt[4]{x^4+1}+1}\right|-\frac{1}{2}\text{arctg}\sqrt[4]{1+x^4}+c$

(52) $\int \frac{\sqrt{3x+5}}{x}dx$ Rpta. $2\sqrt{3x+5}+\sqrt{5}\ln\left|\frac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{5}}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{5}}\right|+c$

(53) $\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$ Rpta. $-\frac{3}{8}(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}})^4+c$

(54) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$ Rpta. $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\,\text{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+c$

(55) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$ Rpta. $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+c$

(56) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

Rpta. $\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}-\frac{3}{4}(x+1)^{4/3}+\frac{6}{7}(x+1)^{7/6}-(x+1)+\frac{6}{5}(x+1)^{5/6}-\frac{3}{2}(x+1)^{2/3}+c$

(57) $\int \frac{dx}{(2x+1)^{3/2}-(2x+1)^{1/2}}$ Rpta. $\frac{3}{2}(2x+1)^{1/3}+3(2x+1)^{1/6}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+c$

(58) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$ Rpta. $-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right|+c$

(59) $\int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ Rpta. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-5\,\text{arctg}\sqrt[6]{x}+c$

(60) $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$ Rpta. $\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})^3}\right|-\frac{2}{2\sqrt{7}}\text{arctg}(\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}})+c$

(61) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}}}$ Rpta. $\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+c$

(62) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$ Rpta. $\frac{6}{5}x^{5/6}-4x^{1/2}+18x^{1/6}+\frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}-21\,\text{arctg}\sqrt[6]{x}+c$

(63) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$ **Rpta.** $\frac{1}{5}\ln|\frac{t-1}{\sqrt{t^2+t+1}}|+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}(\frac{1+2t}{\sqrt{3}})+c$

donde: $t=\sqrt[3]{1+x^5}$

(64) $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$ **Rpta.** $\frac{3t}{2(t^3+1)}-\frac{1}{4}\ln(\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1})-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}(\frac{2t-1}{\sqrt{3}})+c$

donde: $t=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$

(65) $\int \sqrt{x}(1+\sqrt{x})^4\,dx$ **Rpta.** $\frac{2x}{3}\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{36x^2}{13}\sqrt[6]{x}+\frac{8x^2}{5}\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\ \sqrt[6]{x^5}+c$

(66) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$

Rpta. $-\frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})}-\frac{3}{2}\ln|2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}|+2|\ln x-\sqrt{x^2-x+1}|+c$

(67) $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$ **Rpta.** $\sqrt{\frac{x}{x+2}}+c$

(68) $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\,dx$

Rpta. $-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+c$

(69) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$ **Rpta.** $\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|+c$

(70) $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$ **Rpta.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}x-\sqrt{x^2-1}}\right|+c$

(71) $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{1+x^2}dx$ Rpta. $\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|-\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x})+c$

(72) $\int \frac{\sqrt{1+x}+4x}{\sqrt[3]{1+x}}dx$ Rpta. $\frac{12}{5}(1+x)^{10}+\frac{6}{7}(1+x)^7-8(1+x)^4+c$

(73) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+x^{4/5}}$ Rpta. $2x^{1/2}-\frac{10}{3}x^{1/10}+10x^{1/10}-10\operatorname{arctg}x^{1/10}+c$

(74) $\int \frac{x^{1/7}+x^{1/2}}{x^{8/7}+x^{15/14}}dx$ Rpta. $7x^{1/7}-14x^{1/14}+28\ln(x^{1/14}+1)+c$

(75) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ Rpta. $\frac{4}{5}x^{5/4}-\frac{4}{3}x^{3/4}+2x^{1/2}+4x^{1/4}-2\ln(1+\sqrt{3})-4\operatorname{arctg}(\frac{x}{2})+c$

(76) $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{(\sqrt[3]{x}+1)^2}$ Rpta. $\frac{3}{2}x^{2/3}-6x^{1/3}+\frac{3}{x^{1/3}+1}+9\ln|x^{1/3}+1|+c$

(77) $\int \frac{\sqrt{1+x^{1/3}}}{x^{2/3}}dx$ Rpta. $2(1+\sqrt[3]{x})^{3/2}+c$

(78) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})}$ Rpta. $3\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})+c$

(79) $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)^{1/2}}{\sqrt[3]{x}}dx$ Rpta. $\frac{6}{5}(x^{1/3}+1)^{5/2}-2(x^{1/3}+1)^{3/2}+c$

(80) $\int \frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}dx$ Rpta. $\frac{2(4+3\sqrt[3]{x})(2-\sqrt[3]{x})^{3/2}}{5}+c$

(81) $\int \frac{(x-2)^{2/3}dx}{(x-2)^{3/3}+3}$ Rpta. $(x-2)-9\sqrt[3]{x-2}+9\sqrt{3}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{3}})+c$

(82) $\int \sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^2}$ Rpta. $\frac{8}{77}(7\sqrt{x}-4)(1+\sqrt{x})^{7/4}+c$

(83) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$ Rpta. $\arcsen(\frac{x-1}{x\sqrt{2}})+c$

(84) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$ Rpta. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\frac{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1}|+c$

(85) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$ Rpta. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\frac{1}{4}+\frac{2+\sqrt{2+x-x^2}}{x\sqrt{2}}|+c$

(86) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$ Rpta. $\frac{1}{2}\arccos(\frac{2-x}{x\sqrt{2}})+c$

(87) $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ Rpta. $(\frac{x^2}{3}+\frac{x}{6}+\frac{7}{6})\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+c$

(88) $\int \frac{5x+3}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx$ Rpta. $-5\sqrt{5+4x-x^2}+13\arcsen(\frac{x-2}{3})+c$

(89) $\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}}dx$ Rpta. $-(\frac{x}{2}+5)\sqrt{-x^2+4x}+13\arcsen(\frac{x-2}{2})+c$

(90) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$ Rpta. $\frac{6}{5}x^{5/6}-4x^{1/2}+18x^{1/6}+\frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}-21\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+c$

(91) $\int \frac{dx}{(2x+5)\sqrt{2x-3}+8x-12}$ Rpta. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(1+\frac{1}{2}\sqrt{2x-3})+c$

(92) $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+1}}$ Rpta. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsen(\frac{\sqrt{3}}{x-2})+c$

(93) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$ Rpta. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+c$

(94) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{5x^2-8x+4}}$ Rpta. $-\dfrac{\sqrt{5x^2-8x+4}\,(4-3x)}{2(x-1)^2}+\ln\left|\dfrac{\sqrt{5x^2-8x+4}+x}{x-1}\right|+c$

(95) $\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-9}{x+9}}\,dx$ Rpta. $-\ln|x+9|-\dfrac{4}{3}\operatorname{arctg}(\dfrac{3x-12}{2x+18})+c$

(96) $\displaystyle\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$ Rpta. $\ln\left|\dfrac{x+2-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2}\right|+c$

(97) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+x-6}}$ Rpta. $-\dfrac{1}{4}\operatorname{arcsen}(\dfrac{11-3x}{5x-5})+\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\operatorname{arcsen}(\dfrac{11-x}{5x+5})+c$

(98) $\displaystyle\int\frac{x^2-3x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx+\int\sqrt{x^2+4}\,dx$

Rpta. $\ln\left[\dfrac{\sqrt{x}\,(x+2)^{2/3}}{x+1}\right]+\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+4}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+c$

(99) $\displaystyle\int\frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+8}\,dx+\int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$

(100) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$

(101) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

(102) $\displaystyle\int\frac{e^x}{x}\left[\ln e+\ln x.\ln e^x\right]dx$

(103) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{ctgh}(\ln x)}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$

(104) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}x.\cos^5 x\,dx}{(\cos^2 x+\cos^3 x+\operatorname{sen}x)^{3/2}}$

(105) $\displaystyle\int\frac{x^2+(x\operatorname{ctg}x)^2}{(\operatorname{ctg}x+x\operatorname{cosec}^2 x)^2}\,dx$

(106) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

(107) $\displaystyle\int x^{1/3}(2+\sqrt[3]{x^2})^{1/4}\,dx$

(108) $\displaystyle\int\sqrt[4]{1+e^{-4x}}\,dx$

109. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^7(1+x^7)^{1/7}}$

110. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$

111. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\operatorname{sen} x\,(x\cos x-\operatorname{sen} x)^2}-\int x\operatorname{cosec} x\,dx$

112. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x+\operatorname{sen}^2 x}+\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$

113. $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx+\int \frac{(2+\sqrt[3]{x})\,dx}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}$

114. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} 2x.\ln(\operatorname{tg} x)}-\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}\,dx$

115. $\displaystyle\int \frac{sen\,2x\,dx}{\sqrt{3-5\cos x}}$

116. $\displaystyle\int \frac{1+x^{\frac{1}{2}}}{(x+4)^{\frac{5}{2}}}\,dx$

117. $\displaystyle\int \frac{sen^2 x.sen\,2x}{\sqrt[3]{3+\cos^2 x}}\,dx$

118. $\displaystyle\int \Big[\frac{arctg\sqrt{\frac{x^7-4}{4}}}{x^2(x^7-4)}\Big]^{\frac{1}{2}}\,dx$

119. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)\,arctg\sqrt{\frac{x}{1-x}}}}$

120. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x-x^2-1}}$

121. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5\sqrt{9x^2-1}}$

122. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^3\sqrt{16x^4-1}}\,dx$

123. $\displaystyle\int \frac{arctg(4x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{x^2\sqrt{4x^2-1}}\,dx$

124. $\displaystyle\int \frac{(x^6-1)\,dx}{x\sqrt{x^4-4x^6-x^{12}-4}}$

125. $\displaystyle\int \Big(\frac{-2}{(sen\,x+\cos x)^2}+\frac{2}{\sqrt{9+16x-4x^2}}\Big)\,dx$

(126) $$\int \frac{4\ dx}{[9x(1+x)^2-(\sqrt{x}(1+x)\,arcsen\sqrt{\frac{x}{1+x}})^2]^{\frac{1}{2}}}$$

(127) $$\int \frac{(x-x^7)^{\frac{1}{7}}}{x^2}\,dx$$

(128) $$\int \frac{-24\sqrt[5]{x-x^{2}}}{5x^6}\,dx$$

(129) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{3x^2-2x-1}}$$

(130) $$\int (x^{\frac{1}{3}}+4x^{-\frac{1}{6}})^{\frac{3}{2}}\,dx$$

(131) $$\int \frac{dx}{x+x^{-1}+\sqrt{x^2-x^{-2}}}$$

(132) $$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-1}}$$

(133) $$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt{4+x}-2}{2x+2\sqrt{x^2+4x}}\,dx$$

(134) $$\int \frac{dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})\sqrt[6]{x^5}}$$

(135) $$\int \frac{2x\ dx}{(x-3)\sqrt{5x-6-x^2}}$$

(136) $$\int \frac{x(1-x^2)dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$$

(137) $$\int \frac{(x^4-1)dx}{x^2\sqrt{x^4-x^2+1}}$$

(138) $$\int \frac{(x^8-x)^{\frac{1}{8}}}{x^9}\,dx$$

(139) $$\int (\frac{x^2+3}{x})^{\frac{7}{6}}(\frac{2x^3-3}{x^2})dx$$

(140) $$\int \frac{x+1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

(141) $$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\sqrt{(x+4)^5}}\,dx$$

(142) $$\int \frac{-dx}{x\sqrt{5x^2+4x-1}}$$

(143) $$\int \frac{x+1}{x^3\sqrt{3x^2-4}}\,dx$$

(144) $$\int \frac{dx}{x^{\frac{9}{2}}\sqrt[4]{4x^2-1}}$$

(145) $$\int [\frac{1}{[2-(x-2)^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{(9+x^2)^2}]dx$$

(146) $\int \frac{x+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}{2x+7+2\sqrt{(x+3)(x+4)}}dx$

(147) $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$

1.6.19 EJERCICIOS DESARROLLADOS DIVERSOS.-

Calcular las siguientes integrales:

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$

Desarrollo

Sea: $z=\sqrt{x} \Rightarrow x=z^2 \Rightarrow dx=2z\,dz$, reemplazando en la integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}=\int \frac{2z\,dz}{\sqrt{z+1}} \qquad \dots (1)$$

Sea: $w=\sqrt{z+1} \Rightarrow z=w^2-1 \Rightarrow dz=2w\,dw$, reemplazando en (1):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}=2\int \frac{(w^2-1)2w\,dw}{w}=4\int (w^2-1)dw$$

$$=4(\frac{w^3}{3}-w)+c=\frac{4}{3}w(w^2-3)+c=\frac{4}{3}\sqrt{z+1}(z+1-3)+c=\frac{4}{3}\sqrt{\sqrt{x}+1}(\sqrt{x}-2)+c$$

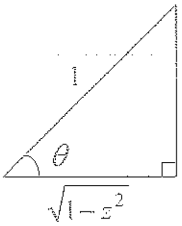
(2) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$

Desarrollo

Sea: $z^2=x \Rightarrow dx=2z\,dz$, reemplazando en la integral dada:

$$\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx=\int \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}2z\,dz=2\int z\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}dz=2\int z\frac{(1-z)}{\sqrt{1-z^2}}dz=2\left[\int \frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}-\int \frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx=2\left[-\sqrt{1-z^2}-\int \frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^2}}\right] \qquad \dots (1)$$



Sea: $\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = z \\ z = \operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \operatorname{arcsen} z \\ dz = \cos\theta\, d\theta \end{cases}$

Además: $\cos\theta = \sqrt{1-z^2}$

$$\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{\operatorname{sen}^2\theta \cos\theta\, d\theta}{\cos\theta} = \int \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} z - z\sqrt{1-z^2}) \qquad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx = -2\sqrt{1-z^2} - \operatorname{arcsen} z + z\sqrt{1-z^2} + c$$

$$= (-2+z)\sqrt{1-z^2} - \operatorname{arcsen} z + c = (\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x} - \operatorname{arcsen}\sqrt{x} + c$$

(3) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$

<u>Desarrollo</u>

Sea: $z^3 = \dfrac{1-x}{1+x}$, despejando $x = \dfrac{1-z^3}{1+z^3} \Rightarrow dx = -\dfrac{6z^2 dz}{(1+z^3)^2}$

$$\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int z.\frac{1+z^3}{1-z^3}\left(\frac{-6z^2}{(1+z^3)^2}\right)dz = -6\int \frac{Z^3 dz}{(1-z^3)(1+z^3)} = 6\int \frac{z^3 dz}{(z^3-1)(z^3+1)}$$

$$= 6\int \left[\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{Cz+D}{z^2+z+1} + \frac{Ez+F}{z^2-z+1}\right]dz$$

Calculando los valores de A, B, C, D, E, F se tiene:

$$= \int \left[\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} - \frac{z+2}{z^2+z+1} - \frac{z-2}{z^2-z+1}\right]dz$$

$$= \ln|z-1| + \ln|z+1| - \frac{1}{2}\ln|z^2+z+1| - \frac{1}{2}\ln|z^2-z+1| -$$

$$-\sqrt{3}\,\text{arctg}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}) + \sqrt{3}\,\text{arctg}(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}) + c$$

$$= \ln|z^2-1| - \frac{1}{2}\ln|(z^2+z+1)(z^2+z+1)| - \sqrt{3}(\text{arctg}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}) - \text{arctg}(\frac{2z-1}{\sqrt{3}})) + c$$

donde: $z = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$

④ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

<u>Desarrollo</u>

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0(1+x^4)^{-1/4}\,dx$, ahora aplicamos la condición de CHEBICHEV:

$\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{0+1}{4} = \dfrac{1}{4}$ no es un número entero.

$\dfrac{m+1}{n} + p = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = 0$ es un número entero.

Sea: $z^4 = x^{-4} + 1 \quad \Rightarrow \quad x^4 = (z^4-1)^{-1} = \dfrac{1}{z^4-1}$

$x = (z^4-1)^{-1/4} \quad \Rightarrow \quad dx = -z^3(z^3-1)^{-5/4}\,dz$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int (1+\frac{1}{z^4-1})^{-1/4}(-z^3(z^4-1)^{-5/4})dz$$

$$= -\int z^{-1}(z^4-1)^{1/4} z^3 (z^4-1)^{-5/4}\,dz$$

$$= -\int \frac{z^2}{z^4-1}\,dz = -\int \left[\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{Cz+D}{z^2+1}\right]dz \qquad \dots (1)$$

$$\frac{z^2}{z^4-1}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}+\frac{Cz+D}{z^2+1}=\frac{A(z+1)(z^2+1)+B(z-1)(z^2+1)+(Cz+D)(z^2-1)}{(z-1)(z+1)(z^2+1)}$$

$$z^2=A(z^2+z^2+z+1)+B(z^3-z^2+z-1)+C(z^3-z)+D(z^2-1)$$

$$z^2=(A+B+C)z^3+(A-B+D)z^2+(A+B-C)z+A-B-D$$

Por identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=1 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{4} \quad ; \quad B=-\dfrac{1}{4} \\ C=0 \quad ; \quad D=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ... (2)

Ahora reemplazando estos valores de (2) en (1)

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\left[\frac{1}{4(z-1)}-\frac{1}{4(z+1)}+\frac{1}{2(z^2+1)}\right]dz$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|z-1|+\frac{1}{4}\ln|z+1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+c=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+c$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt[4]{x^{-4}+1})+c$$

5. $\displaystyle\int\frac{(x-x^3)^{1/3}dx}{x^4}$

<u>Desarrollo</u>

Sea: $x=\dfrac{1}{z} \Rightarrow dx=-\dfrac{dz}{z^2}$, reemplazando:

$$\int\frac{(x-x^3)^{1/3}dx}{x^4}=\int\frac{(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^3})^{1/3}}{\frac{1}{z^4}}(-\frac{dz}{z^2})=-\int z^2(\frac{z^2-1}{z^3})^{1/3}dz$$

$$=-\int\frac{z^2(z^2-1)^{1/3}}{z}dz=-\int z(z^2-1)^{1/3}dz$$

$u=z^2-1$

$du=2z\,dz$

$=-\frac{1}{2}\int u^{1/3}du$

$=-\frac{1}{2}\frac{u^{4/3}}{4/3}+C$

$=-\frac{3}{8}(z^2-1)^{4/3}+C$

$$= -\frac{3}{8}(z^2-1)^{4/3}+c = -\frac{3}{8}(\frac{1}{x^2}-1)^{4/3}+c$$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^5-1}}$

Desarrollo

Sea: $z^2 = x^5 - 1 \Rightarrow 2z\,dz = 5x^4\,dx$, reemplazando en la integral dada:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^5-1}} = \frac{1}{5}\int \frac{5x^4\,dx}{x^5\sqrt{x^5-1}} = \frac{1}{5}\int \frac{2z\,dz}{(z^2+1)z}$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{2}{5}\operatorname{arctg} z + c = \frac{2}{5}\operatorname{arctg}(x^5-1)^{1/2}+c$$

7) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}$

Desarrollo

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{1 - \frac{2\operatorname{sen}^2 2x}{4}} = \int \frac{2\operatorname{sen} 2x\,dx}{2 - \operatorname{sen}^2 2x} = 2\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{1 + (1 - \operatorname{sen}^2 2x)} = 2\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{1 + \cos^2 2x}$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen} 2x\,2dx}{1 + (\cos 2x)^2} = -\operatorname{arctg}(\cos 2x) + c$$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2-1)(\ln x^2 - \ln(x^2-1))}$

Desarrollo

Sea: $u = \ln x^2 - \ln(x^2-1) \Rightarrow du = (\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2-1})dx = -\frac{2\,dx}{x(x^2-1)}$,

de donde: $\displaystyle\frac{dx}{x(x^2-1)} = -\frac{du}{2}$

$$\int \frac{dx}{x(x^2-1)(\ln x^2 - \ln(x^2-1))} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\ln u + c = -\frac{1}{2}\ln(\ln x^2 - \ln(x^2-1)) + c$$

9) $\displaystyle\int \frac{(x-\alpha)^p (x-\beta)^{-p}}{(x-\alpha)(x-\beta)}dx\,,\ p>0,\ \alpha \neq \beta$

<u>Desarrollo</u>

$$\int \frac{(x-\alpha)^p (x-\beta)^{-p}}{(x-\alpha)(x-\beta)}dx = \int \frac{(x-\alpha)^{p-1}}{(x-\beta)^{p+1}}dx = \int \left[\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right]^{p-1} \frac{dx}{(x-\beta)^2}$$

Sea: $z = \dfrac{x-\alpha}{x-\beta} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dz}{\alpha-\beta} = \dfrac{dx}{(x-\beta)^2}$

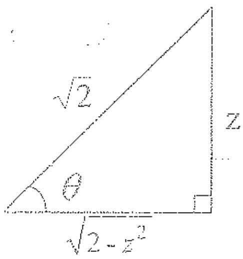
$$\int \frac{(x-\beta)^p (x-\beta)^{-p}}{(x-\alpha)(x-\beta)}dx = \frac{1}{\alpha-\beta}\int z^{p-1}dz = \frac{z^p}{p(\alpha-\beta)} + c = \frac{1}{p(\alpha-\beta)}\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^p + c$$

10) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx$

<u>Desarrollo</u>

Sea: $z^2 = x \quad \Rightarrow \quad dx = 2z\,dz$, reemplazando en la integral dada:

$$\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx = \int \frac{z(2z\,dz)}{\sqrt{2-z^2}} = 2\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{2-z^2}} \qquad \ldots (1)$$



Sea: $\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{z}{\sqrt{2}} \\ Z = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{z}{\sqrt{2}}\right) \\ dz = \sqrt{2}\cos\theta\,d\theta \end{cases}$

Además: $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2-z^2}}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2-z^2} = \sqrt{2}\cos\theta$

$$\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{2-z^2}} = \int \frac{2\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{2}\cos\theta} = \int 2\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$= \int (1-\cos 2\theta)\,d\theta = \theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{arcsen}(\frac{z}{\sqrt{2}}) - \frac{z\sqrt{2-z^2}}{2} \quad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx = \operatorname{arcsen}(\frac{z}{\sqrt{2}}) - z\sqrt{2-z^2} = 2\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{x}\sqrt{2-x} + c$$

(11) $\displaystyle\int \frac{(1+e^{2x})^{1/2} e^x\,dx}{(1+e^{2x})(\sqrt{4+4e^{2x}}-1)}$

Desarrollo

$$\int \frac{(1+e^{2x})^{1/2} e^x\,dx}{(1+e^{2x})(\sqrt{4+4e^{2x}}-1)} = \int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1+e^{2x}}\,(2\sqrt{1+e^{2x}}-1)}$$

Sea: $z^2 = 1+e^{2x} \Rightarrow e^{2x} = z^2-1 \Rightarrow e^x = \sqrt{z^2-1} \Rightarrow e^x\,dx = \dfrac{z\,dz}{\sqrt{z^2-1}}$

$$\int \frac{(1+e^{2x})^{1/2} e^x\,dx}{(1+e^{2x})(\sqrt{4+4e^{2x}}-1)} = \int \frac{z\,dz}{z\sqrt{z^2-1}\,(2z-1)} = \int \frac{dz}{(2z-1)\sqrt{z^2-1}} \quad \ldots (1)$$

Sea: $t = \dfrac{1}{2z-1} \Rightarrow 2z-1 = \dfrac{1}{t} \Rightarrow z = \dfrac{1+t}{2t} \Rightarrow dz = -\dfrac{dt}{2t^2}$

Ahora reemplazando en la ecuación (1) se tiene:

$$\int \frac{(1+e^{2x})^{1/2} e^x\,dx}{(1+e^{2x})(\sqrt{4+4e^{2x}}-1)} =$$

$$\int \frac{dz}{(2z-1)(z^2-1)^{1/2}} = \int \frac{-\dfrac{dt}{2t^2}}{\dfrac{1}{t}\sqrt{(\dfrac{1+t}{2t})^2-1}} = -\int \frac{\dfrac{dt}{2t^2}}{\dfrac{\sqrt{1+2t-3t^2}}{2t^2}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-3t^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\left[\dfrac{10}{27} - (t-\dfrac{1}{3})^2\right]^{1/2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{3\sqrt{3}t-\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right)+c$$

Como: $t = \dfrac{1}{2z-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}-1}$, entonces:

$$\int \frac{(1+e^{2x})^{1/2}e^{x}\,dx}{(1+e^{2x})(\sqrt{4+4e^{2x}}-1)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\left[\frac{2\sqrt{3}(2-\sqrt{1+e^{2x}})}{\sqrt{10}(2\sqrt{1+e^{2x}}-1)}\right]+c$$

12) $\displaystyle\int e^{\operatorname{arcsen} x}\,dx$

Desarrollo

Sea: $z = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow dz = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{dx}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 z}} = \dfrac{dx}{\cos z}$

$z = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow x = \operatorname{sen} z$

Como: $dz = \dfrac{dx}{\cos z} \Rightarrow dx = \cos z\,dz$, reemplazando tenemos:

$$\int e^{\operatorname{arcsen} x}\,dx = \int e^{z}\cos z\,dz \qquad \ldots (1)$$

Integrando por partes: $\begin{cases} u = e^{z} \\ dv = \cos z\,dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^{z}\,dz \\ v = \operatorname{sen} z \end{cases}$

$$\int e^{z}\cos z\,dz = e^{z}\operatorname{sen} z - \int e^{z}\operatorname{sen} z\,dz$$

Haciendo: $\begin{cases} u = e^{z} \\ dv = \operatorname{sen} z\,dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^{z}\,dz \\ v = -\cos z \end{cases}$

$$\int e^{z}\cos z\,dz = e^{z}\operatorname{sen} z + e^{z}\cos z - \int e^{z}\cos z\,dz$$

$$\therefore \quad \int e^{z}\cos z\ dz = \frac{e^{z}(\operatorname{sen} z+\cos z)}{2} \qquad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int e^{\operatorname{arcsen} x}dx = e^{z}\frac{(\operatorname{sen} z+\cos z)}{2}+c = e^{\operatorname{arcsen} x}\frac{(x+\sqrt{1-x^{2}})}{2}+c$$

(13) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)\sqrt{(x-2)(x+3)}}$

Solución

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$1 = (A + B)x + A - B$, por identidad se tiene: $\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \end{cases} ; \quad B=-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)\sqrt{(x-2)(x+3)}} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x+3)}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x-2)(x+3)}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x-2)(x+3)}}\right] \qquad \ldots (1)$$

Calculando la integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x-2)(x+3)}}$

Sea: $z = \dfrac{1}{x-1} \Rightarrow x-1 = \dfrac{1}{z} \Rightarrow dx = -\dfrac{dz}{z^{2}}$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x-2)(x+3)}} = \int \frac{-\frac{dz}{z^{2}}}{\frac{1}{z}\sqrt{(\frac{1}{z}-1)(\frac{1}{z}+4)}} = -\int \frac{\frac{dz}{z^{2}}}{\frac{\sqrt{(1-z)(1+4z)}}{z^{2}}}$$

$$= -\int \frac{dz}{\sqrt{1+3z-4z^2}} \text{, completando cuadrados:}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{25}{64}-(z-\frac{3}{8})^2}} = -\frac{1}{2}\text{arcsen}\left[\frac{z-\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}}\right]+c$$

$$= -\frac{1}{2}\text{arcsen}(\frac{8z-3}{5})+c_1 = -\frac{1}{2}\text{arcsen}(\frac{11-3x}{5(x-1)})+c_1 \qquad \text{... (2)}$$

Ahora calculando la integral: $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x-2)(x+3)}}$

Sea: $t = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x+1 = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x-2)(x+3)}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t}-3)(\frac{1}{t}+2)}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{\sqrt{(1-3t)(1+2t)}}{t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t-6t^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{25}{144}-(t+\frac{1}{12})^2}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\text{arcsen}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}}\right)+c_2$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}}\text{arcsen}(\frac{12t+1}{5})+c_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}\text{arcsen}(\frac{x+13}{5(x+1)})+c_2 \qquad \text{... (3)}$$

Luego reemplazando (2), (3) en (1)

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)\sqrt{(x-2)(x+3)}} = -\frac{1}{4}\text{arcsen}\,\frac{1}{5}(\frac{11-3x}{x-1})+\frac{1}{2\sqrt{6}}\text{arcsen}\,\frac{1}{5}(\frac{x+13}{x+1})$$

(14) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{(x\cos x-\text{sen}\,x)^2}$

Solución

A la integral dada lo expresaremos en la forma:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x\cos x-\operatorname{sen}x)^2}=\int \frac{x}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{x\operatorname{sen}x\,dx}{(x\cos x-\operatorname{sen}x)^2}\,,\quad \text{integrando por partes}$$

Haciendo: $\begin{cases} u=\dfrac{x}{\operatorname{sen}x} \\ dv=\dfrac{x\operatorname{sen}x\,dx}{(x\cos x-\operatorname{sen}x)^2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{\operatorname{sen}x-x\cos x}{(\operatorname{sen}x)^2}dx \\ v=\dfrac{1}{x\cos x-\operatorname{sen}x}\end{cases}$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x\cos x-\operatorname{sen}x)^2}=\frac{x}{\operatorname{sen}x(x\cos x-\operatorname{sen}x)}-\int\frac{\operatorname{sen}x-x\cos x}{\operatorname{sen}^2x(x\cos x-\operatorname{sen}x)}dx$$

$$=\frac{x}{\operatorname{sen}x(x\cos x-\operatorname{sen}x)}+\int \operatorname{cosec}^2x\,dx$$

$$=\frac{x}{\operatorname{sen}x(x\cos x-\operatorname{sen}x)}-\operatorname{ctg}x+c$$

15) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x^2-1}{1+x^2}}\,\frac{dx}{x}$

Solución

A la integral dada expresaremos así: $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\,\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\,\frac{2x\,dx}{x^2}$ ... (1)

Sea: $z=x^2 \Rightarrow dz=2x\,dx$, reemplazando: $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\,\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\,\frac{dz}{z}$ ... (2)

Sea $w^2=\dfrac{z-1}{z+1} \Rightarrow z=-\dfrac{w^2+1}{w^2-1} \Rightarrow dz=\dfrac{4w\,dw}{(w^2-1)^2}$

$$\int\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\,\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\int w\left[-\frac{w^2-1}{w^2+1}\right]\frac{4w\,dw}{(w^2-1)^2}=2\int\frac{w^2\,dw}{(w^2+1)(w^2-1)}$$

$$= -2\int\left[\frac{A}{w-1}+\frac{B}{w+1}+\frac{Cw+D}{w^2+1}\right]dw \qquad \dots (3)$$

$$\frac{w^2}{(w^2-1)(w^2+1)} = \frac{A}{w-1}+\frac{B}{w+1}+\frac{Cw+D}{w^2+1}$$

$$= \frac{A(w+1)(w^2+1)+B(w-1)(w^2+1)}{(w-1)(w+1)(w^2+1)} + \frac{(Cw+D)(w^2-1)}{(w-1)(w+1)(w^2+1)}$$

$$w^2 = A(w^3+w)+A(w^2+1)+B(w^2+w)-B(w^2+1)+C(w^3-w)+D(w^2-1)$$

$$w^2 = (A+B+C)w^3+(A-B-D)w^2+(A+B-C)w+A-B-D$$

Por identidad polinómica se tiene: $\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=1 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{4} \quad ; \quad B=-\dfrac{1}{4} \\ C=0 \quad ; \quad D=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ahora reemplazando los valores de A, B, C y D.

$$\int\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\,\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\int\frac{dw}{w-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dw}{w+1}-\int\frac{dw}{w^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{w+1}{w-1}\right| - \operatorname{arctg} w + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}+1}{\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}-1}\right| - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{z-1}{z+1}} + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{z-1}+\sqrt{z+1}}{\sqrt{z-1}-\sqrt{z+1}}\right| - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{z-1}{z+1}} + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}}\right| - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} + c$$

16. $\displaystyle\int\frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^3 x-\cos^3 x}$

Solución

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg}^3 x - 1} \quad \ldots (1)$$

Sea: $z = \operatorname{tg} x \;\Rightarrow\; dz = \sec^2 x\,dx$

$$\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg}^3 x - 1} = \int \frac{dz}{z^3 - 1} = \int \frac{dz}{(z-1)(z^2+z+1)} = \int \left[\frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2+z+1}\right] dz \quad \ldots (2)$$

$$\frac{1}{z^3-1} = \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2+z+1} = \frac{A(z^2+z+1)+(Bz+C)(z-1)}{(z-1)(z^2+z+1)}$$

$$1 = A(z^2+z+1) + B(z^2+z) + C(z-1) \;\Rightarrow\; 1 = (A+B)z^2 + (A-B+C)z + z - C$$

Por identidad polinómica se tiene: $\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \quad ; \quad B = -\dfrac{1}{3} \\ C = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \ldots (3)$

Reemplazando (3) en (2) se tiene:

$$\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg}^3 x - 1} = \frac{1}{3}\int \left[\frac{1}{z-1} - \frac{z+2}{z^2+z+}\right] dz = \frac{1}{3}\left[\ln|z-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2z+1+3}{z^2+z+1}\,dz\right]$$

$$= \frac{1}{3}[\ln|z-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2z+1}{z^2+z+1}\,dz - \frac{3}{2}\int \frac{dz}{(z+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}]$$

$$= \frac{1}{3}[\ln|z-1| - \frac{1}{2}\ln|z^2+z+1| - \frac{3}{2}.\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}(\frac{z+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln|z-1| - \frac{1}{2}\ln|z^2+z+1| - \sqrt{3}\operatorname{arctg}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}})\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln|\operatorname{tg} x - 1| - \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1| - \sqrt{3}\operatorname{arctg}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}})\right].$$

(17) $\int xe^x \operatorname{sen} x \; dx$

Solución

Integrando por partes se tiene: $\begin{cases} u = xe^x \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (x+1)e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$\int xe^x \operatorname{sen} x\, dx = -xe^x \cos x - \int (x+1)e^x(-\cos x)\, dx$$

$$= -xe^x \cos x + \int (x+1)e^x \cos x\, dx \qquad \ldots (1)$$

Haciendo: $\begin{cases} u = (x+1)e^x \\ dv = \cos x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (x+2)e^x dx \\ v = \operatorname{sen} x \end{cases}$

$$\int (x+1)e^x \cos x\, dx = (x+1)e^x \operatorname{sen} x - \int (x+2)e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= (x+1)e^x \operatorname{sen} x - \int xe^x \operatorname{sen} x\, dx - 2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx \qquad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int xe^x \operatorname{sen} x\, dx = -xe^x \cos x + (x+1)e^x \operatorname{sen} x - \int xe^x \operatorname{sen} x\, dx - 2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

$$\int xe^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{-xe^x \cos x}{2} + \frac{(x+1)e^x \operatorname{sen} x}{2} - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \qquad \ldots (3)$$

Ahora calculamos la integral: $\int e^x \operatorname{sen} x \; dx$ por partes.

Haciendo: $\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x\, dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\int e^x \operatorname{sen} x\ dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\ dx$$

Ahora, haciendo: $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\operatorname{sen} x\,dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\int e^x \operatorname{sen} x\ dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\ dx$$

$$\Rightarrow \quad \int e^x \operatorname{sen} x\ dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x}{2} \qquad \ldots (4)$$

Reemplazando (4) en (3) se tiene:

$$\int x e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{-xe^x \cos x}{2} + \frac{(x+1)e^x \operatorname{sen} x}{2} - \frac{e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x}{2} + c$$

$$= \frac{e^x}{2}(x \operatorname{sen} x - x\cos x - \cos x) + c$$

(18) $\displaystyle\int \frac{x^3\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{1+x^4}+1}\,dx$

Solución

Sea: $z = x^4 \Rightarrow dz = 4x^3 dx \Rightarrow x^3 dx = \dfrac{dz}{4}$

$$\int \frac{x^3\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{1+x^4}+1}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+z}}{\sqrt{1+z}+1}\cdot\frac{dz}{4} = \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{1+z}\ dz}{\sqrt{1+z}+1} \qquad \ldots (1)$$

Sea: $u^2 = 1+z \Rightarrow dz = 2u\,du$

$$\int \frac{\sqrt{1+z}\ dz}{\sqrt{1+z}+1} = \int \frac{u(2u)\,du}{u+1} = 2\int \frac{u^2 du}{u+1} = 2\int (u-1+\frac{1}{u+1})du = u^2 - 2u + 2\ln|u+1|$$

$$\int \frac{\sqrt{1+z}\ dz}{\sqrt{1+z}+1} = u^2 - 2u + 2\ln|u+1| = 1+z-2\sqrt{1+z} + 2\ln\left|\sqrt{1+z}+1\right| \qquad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int \frac{x^3\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{1+x^4}+1}dx = \frac{z+1}{4} - \frac{\sqrt{1+z}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+z}+1\right| + c$$

$$= \frac{x^4+1}{4} - \frac{\sqrt{1+x^4}}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sqrt{1+x^4}+1| + c$$

(19) $\int \ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})dx$

Solución

Calculando la integral por partes: $\begin{cases} u = \ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = x \end{cases}$

$$\int \ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})dx = x\ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}) - \int \frac{x(1+\sqrt{1-x^2})}{2x\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}) - \frac{1}{2}\int (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+1)dx$$

$$= \ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}) - \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{x}{2} + c$$

(20) $\int \sqrt{\operatorname{tg}^2 x+2}\, dx$

Solución

A la integral dada escribiremos así:

$$\int \sqrt{\operatorname{tg}^2 x+2}\, dx = \int \frac{(\operatorname{tg}^2 x+2)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+2}}dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x+1+1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+2}}dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x+1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+2}}dx = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+2}}$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}\right| + \int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x}}$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}\right| + \int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2 - \operatorname{sen}^2 x}}$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}\right| + \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

(21) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

Solución

Dividiendo numerador y denominador por x^2

$$\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{1+x^4}} = \int \frac{\frac{(x^2-1)}{x^2}dx}{(x+\frac{1}{x})\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}} \qquad \ldots (1)$$

Sea: $\quad z = x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad dz = (1 - \frac{1}{x^2})dx\,, \quad dz = \frac{x^2-1}{x^2}dx$

$$z^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

Ahora reemplazamos en la ecuación (1): $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{1+x^4}} = \int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-2}} \qquad \ldots (2)$

Sea: $t = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad dz = -\frac{dt}{t^2}$

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-2}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}\,dt}{\sqrt{1-(\sqrt{2}t)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}(\sqrt{2}t)$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{z}\right) \qquad \ldots (3)$$

Reemplazando (3) en (2) se tiene:

$$\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{1+x^4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{z}\right)+c = -\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}}\right)+c$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1}\right)+c$$

(22) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$

Solución

Sea: $z=e^x \;\Rightarrow\; dz=e^x dx = z\,dx \;\Rightarrow\; dx=\dfrac{dz}{z}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}} = \int \frac{dz}{z\sqrt{z^2+z+1}} \qquad \ldots (1)$$

Sea: $t=\dfrac{1}{z} \;\Rightarrow\; z=\dfrac{1}{t} \;\Rightarrow\; dz=-\dfrac{dt}{t^2}$

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2+z+1}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right| = -\ln\left|\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1}\right|$$

$$= -\ln\left|\frac{z+2+2\sqrt{z^2+z+1}}{2z}\right| \qquad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}} = -\ln\left|\frac{z+2+2\sqrt{z^2+z+1}}{2z}\right| + c = -\ln\left|\frac{e^x+2+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}{2e^x}\right| + c$$

(23) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x(1+\cos^2 x)}{\operatorname{sen}^4 x+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

Solución

A la integral dada escribiremos así:

$$\int \frac{\cos^3 x(1+\cos^2 x)}{\operatorname{sen}^4 x+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x(1+\cos^2 x)\cos x}{\operatorname{sen}^4 x+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)(2-\operatorname{sen}^2 x)\cos x}{\operatorname{sen}^4 x+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$$

Sea: $z = \operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; dz = \cos x\, dx$

$$\int \frac{\cos^3 x(1+\cos^2 x)}{\operatorname{sen}^4 x+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{(1-z^2)(2-z^2)dz}{z^4+z^2} = \int (1-\frac{6}{z^2+1}+\frac{2}{z^2})dz$$

$$= z - 6\operatorname{arctg} z - \frac{2}{z} + c = \operatorname{sen} x - 6\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) - \frac{2}{\operatorname{sen} x} + c$$

(24) $\displaystyle\int (\frac{x-1}{x+1})\frac{dx}{\sqrt{x(x^2+x+1)}}$

Solución

Sea: $z^2 = x+1+\dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; 2z\,dz = (1-\dfrac{1}{x^2})dx \;\Rightarrow\; 2z\,dz = \dfrac{x^2-1}{x^2}dx$

Ahora a la integral dada escribiremos así:

$$\int (\frac{x-1}{x+1})\frac{dx}{\sqrt{x(x^2+x+1)}} = \int (\frac{x-1}{x+1})(\frac{dx}{\sqrt{x^2(x+1+\frac{1}{x})}} = \int (\frac{x-1}{x+1})(\frac{1}{x})\frac{dx}{\sqrt{x+1+\frac{1}{x}}}$$

$$= \int \frac{x^2-1}{x^2}.\frac{1}{\frac{(x+1)^2}{x}}.\frac{dx}{\sqrt{x+1+\frac{1}{x}}} = \int \frac{1}{\frac{x^2+2x+1}{x}.\sqrt{x+1+\frac{1}{x}}}.\frac{x^2-1}{x^2}dx$$

$$= \int \frac{1}{(x+1+\frac{1}{x}+1)\sqrt{x+1+\frac{1}{x}}} \cdot \frac{x^2-1}{x^2} dx = \int \frac{2z\ dz}{(z^2+1)z}$$

$$= 2\int \frac{dz}{z^2+1} = 2arctg\ z + c = 2arctg\sqrt{x+1+\frac{1}{x}} + c$$

25) $\int arcsen(\frac{2\sqrt{x}}{1+x})dx$

Solución

Integrando por partes se tiene:

Haciendo: $\begin{cases} u = arcsen(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{(1-x)dx}{\sqrt{x}(x+1)\,|\,x-1\,|} \\ v = x \end{cases}$

Como: $|\,x-1\,| = \begin{cases} x-1, & si\ x>1 \\ 1-x, & si\ 0<x<1 \end{cases}$, entonces: $du = \begin{cases} -\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}, & si\ x>1 \\ \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}, & si\ 0<x<1 \end{cases}$

Luego consideremos los casos:

i) Cuando x > 1 se tiene:

$$\int arcsen(\frac{2\sqrt{x}}{1+x})dx = x\,arcsen(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}) - \int \frac{-x\,dx}{\sqrt{x}(x+1)} = x\,arcsen(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}) + \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(x+1)} \quad \ldots (1)$$

Sea: $z^2 = x \Rightarrow$ dx = 2z dz

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1} = \int \frac{z.2z.dz}{z^2+1} = 2\int \frac{z^2 dz}{z^2+1} = 2\int (1-\frac{1}{z^2+1})dz = 2(z - arctgz)$$

$$= 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} \quad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int arcsen(\frac{2\sqrt{x}}{1+x})dx = x\,arcsen(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}) + 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} \quad \ldots (\alpha)$$

ii) Cuando $0 < x < 1$, se tiene:

$$\int arcsen(\frac{2\sqrt{x}}{1+x})dx = x\,arcsen(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}) - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x}(x+1)} - x\,arcsen(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}) - \int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1} \ldots (3)$$

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1} = 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} \quad \ldots (4)$$

Reemplazando (4) en (3) se tiene:

$$\int arcsen(\frac{2\sqrt{x}}{1+x})dx = x\,arcsen(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}) - 2\sqrt{x} + 2arctg\sqrt{x} \quad .. (\beta)$$

Luego de la parte (α) y (β) se tiene:

$$\int arcsen(\frac{2\sqrt{x}}{1+x})dx = x\,arcsen(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}) \pm 2\sqrt{x} \mp 2arctg\sqrt{x} + c$$

(26) $\displaystyle\int \frac{x\cos x - sen\,x}{x\sqrt[4]{x^4 + sen^4 x}}dx$

Solución

Dividiendo numerador y denominador por x^2

$$\int \frac{x\cos x - sen\,x}{x\sqrt[4]{x^3 + sen^4 x}}dx = \int \frac{\frac{x\cos x - sen\,x}{x^2}dx}{\frac{\sqrt[4]{x^4 + sen^4 x}}{x}} = \int \frac{\frac{x\cos x - sen\,x}{x^2}}{\sqrt[4]{1 + (\frac{senx}{x})^4}}dx \quad \ldots (1)$$

Sea: $z = \dfrac{sen\,x}{x} \Rightarrow dz = \dfrac{x\cos x - sen\,x}{x^2}dx$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int \frac{x\cos x - sen\,x}{\sqrt[4]{x^4 + sen^4 x}}\,dx = \int \frac{dz}{\sqrt[4]{1+z^4}} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^4+1}-1}\right| - \frac{1}{2}arctg(\sqrt[4]{x^{-4}+1}) + c$$

Este es el resultado del ejercicio 4.

(27) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n - 1}}$

Solución

Sea: $x^n = \dfrac{1}{t^2} \Rightarrow x = t^{-2/n}$, entonces: $dx = -\dfrac{2}{n}y^{-(2/n)-1}dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n - 1}} = -\frac{2}{n}\int \frac{t^{-(2/n)-1}dt}{t^{-(2/n)}\sqrt{\dfrac{1}{t^2}-1}} = -\frac{2}{n}\int \frac{t^{-1}dt}{\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}}$$

$$= -\frac{2}{n}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{2}{n}arcsen\,t + c = -2n\,arcsen\sqrt{\frac{1}{x^n}} + c$$

(28) $\displaystyle\int \left(\frac{x^3}{sen\,x(x\cos x - sen\,x)^2} - x\cos ec\,x\right)dx$

Solución

A la integral dada escribiremos así:

$$\int \left(\frac{x^3}{sen\,x(x\cos x - sen\,x)^2} - x\cos ec\,x\right)dx = \int \frac{x^3 - x\cos ec\,x.\,sen\,x(x\cos x - sen\,x)^2}{sen\,x(x\cos x - sen\,x)^2}dx$$

$$= \int \frac{x^3 - x(x^2\cos^2 x - 2x\,sen\,x\cos x + sen^2 x)}{sen\,x(x\cos x - sen\,x)^2}dx$$

$$= \int \frac{x^3 - x^3\cos^2 x + 2x^2 sen\,x\cos x - x\,sen^2 x}{sen\,x(x\cos x - sen\,x)^2}dx$$

$$= \int \frac{x^3(1-\cos^2 x) + 2x^2 sen\,x\cos x - x\,sen^2 x}{sen\,x(x\cos x - sen\,x)^2}dx$$

$$= \int \frac{x^3 sen^2 x + 2x^2 sen\,x\cos x - x\,sen^2 x}{sen\,x(x\cos x - sen\,x)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{x^3 sen\,x + 2x^2 \cos x - x\,sen\,x}{(x\cos x - sen\,x)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{x^3 sen\,x + 2x^2 \cos x - 2x\,sen\,x + x\,sen\,x}{(x\cos x - sen\,x)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{x^3 sen\,x + 2x^2 \cos x - 2x\,sen\,x}{(x\cos x - sen\,x)^2}\,dx + \int \frac{x\,sen\,x\,dx}{(x\cos x - sen\,x)^2}$$

$$= \int d\left(\frac{x^2}{x\cos x - sen\,x}\right) + \int \frac{x\,sen\,x\,dx}{(x\cos x - sen\,x)^2}$$

$$= \frac{x^2}{x\cos x - sen\,x} - \frac{1}{x\cos x - sen\,x} + c = \frac{x^2 - 1}{x\cos x - sen\,x} + c$$

(29) $\displaystyle\int \frac{\sec x\sqrt{\sec 2x}\,dx}{arcsen(tg\,x)}$

Solución

Sea: $z = \arcsin(\operatorname{tg} x) \Rightarrow dz = \dfrac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{1-tg^2 x}} \Rightarrow dz = \dfrac{\sec x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x - sen^2 x}} = \dfrac{\sec x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}$

$$dz = \sec x.\sqrt{\sec 2x}\,dx$$

$$\int \frac{\sec x.\sqrt{\sec 2x}\,dx}{arcsen(tg\,x)} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + c = \ln|arcsen(tg\,x)| + c$$

(30) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(1+x^2)^{1/2}}}$

Solución

Sea: $z = 1 + \sqrt{1+x^2}$ diferenciando se tiene: $dz = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(1+x^2)^{1/2}}} = \int \frac{1}{\sqrt{1+(1+x^2)^{1/2}}}\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}+c = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+c$$

1.6.20. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Calcular las siguientes integrales.

1. $\int \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\,dx$ **Rpta.** $a.arcsen\sqrt{\frac{x}{a}}-2\sqrt{a}\sqrt{a-x}-\sqrt{x}-\sqrt{a}-x+c$

2. $\int \frac{(a-bx^2)dx}{x\sqrt{x^2-(a-bx^2)^2}}$ **Rpta.** $\arccos(\frac{a+bx^2}{x\sqrt{a+4ab}})+c$

3. $\int \sqrt{\frac{4-x}{2+x}}\,dx$ **Rpta.** $3\arccos(\frac{1-x}{3})+3\sqrt{x^2-2x+8}+c$

4. $\int \frac{dx}{\cos x\sqrt{2+sen\,x}}$ **Rpta.** $\ln\sqrt{1+sen\,x}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2+sen\,x}}{\sqrt{3}+\sqrt{2+sen\,x}}\right|+c$

5. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ **Rpta.** $arcsen\sqrt{x}-\sqrt{x}\sqrt{1-x}+c$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x})^2}$ **Rpta.** $3arctg\sqrt[6]{x}+\frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}+c$

7. $\int \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ **Rpta.** $\frac{3}{2}\ln(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt[4]{x}-4)-\frac{3}{4}(\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x})+c$

8. $\int \frac{x\cos x-sen\,x+1}{(x\cos x)^2}\,dx$ **Rpta.** $\frac{sen\,x}{x+\cos x}+c$

9. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$ **Rpta.** $arcsen(\frac{1}{x})+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c$

(10) $\int \frac{\sqrt{1-x^3}}{x^2\sqrt{x}}dx$ **Rpta.** $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1-x^3}{x^3}}-\frac{2}{3}arcsen\sqrt{x^3}+c$

(11) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$ **Rpta.** $2\sqrt{1+\ln x}-\ln|\ln x|+2\ln|\sqrt{1+\ln x}-1|+c$

(12) $\int x^2 e^x sen\,x\,dx$ **Rpta.** $\frac{1}{2}[(x^2-1)sen\,x-(x-1)^2\cos x]e^x+c$

(13) $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[3]{8x^3+27}}$ **Rpta.** $\frac{1}{320}(8x^3+27)^{5/3}-\frac{27}{128}(8x^3+27)^{2/3}+c$

(14) $\int \frac{2a+x}{a+x}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx$ **Rpta.** $\sqrt{a^2-x^2}-\frac{2a\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}}+c$

(15) $\int \frac{dx}{sen^5 x\cos x}$ **Rpta.** $\ln|tg\,x|-ctg^2x-\frac{ctg^4 x}{4}+c$

(16) $\int x^3 arcsen\frac{1}{x}\,dx$ **Rpta.** $\frac{x^4}{4}arcsen(\frac{1}{x})+\frac{x^2+2}{12}\sqrt{x^2-1}+c$

(17) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$ **Rpta.** $-2(\sqrt[4]{5-x}-1)^2-4\ln(1+\sqrt[4]{5-x})+c$

(18) $\int sen(5x+2)sen(4x+2)\cos(3x+4)dx$

Rpta. $\frac{1}{8}[sen(2x+4)+\frac{sen(4x+4)}{2}+\frac{sen6x}{3}+\frac{sen(2x+8)}{6}]+c$

(19) $\int \cos^2(\ln x)\,dx$ **Rpta.** $\frac{x}{2}+\frac{x\cos(2\ln x)+2x\,sen(2\ln x)}{10}+c$

(20) $\int \frac{\sqrt{sen\,x}\,dx}{\cos x(\cos x+sen\,x)\sqrt{\cos x+2sen\,x}}$

Rpta. $\frac{1}{2}\ln|\frac{\sqrt{ctg\,x+2}+1}{\sqrt{ctg\,x+2}-1}|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{\sqrt{ctg\,x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{ctg\,x+2}+\sqrt{2}}|+c$

(21) $\int e^{3x}x^2 sen\,x\,dx$

Rpta. $\frac{e^{3x}}{250}[25x^2(3sen\,x-\cos x)-10x(4\,sen\,x-3\cos x)+9\,sen\,x-13\cos x]+c$

(22) $\int \frac{(3x^2+4)dx}{2\sqrt{x}(4-3x^2)\sqrt{3x^2+x-4}}$ **Rpta.** $\ln|\frac{\sqrt{3x^2+x-4}+\sqrt{x}}{\sqrt{3x^2-4}}|+c$

(23) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+\sqrt{x-1}}}$ **Rpta.** $\frac{4}{3}\sqrt{2+\sqrt{x-1}}(\sqrt{x-1}-4)+c$

(24) $\int \sqrt{tg\,x}\,dx$

Rpta. $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln|\frac{tg\,x-\sqrt{2tg\,x}+1}{tg\,x+\sqrt{2tgx}+1}|+\frac{\sqrt{2}}{2}arctg(\sqrt{2}tg\,x-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}arctg(\sqrt{2}tg\,x+1)+c$

(25) $\int \frac{dx}{x(x^{999}+1)^2}$ **Rpta.** $\ln-\frac{1}{999}\ln|x^{999}+1|+\frac{1}{999(x^{999}+1)}+c$

(26) $\int \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos(3\sqrt{x}+2)}}}\,x^{-1/2}dx$ **Rpta.** $\frac{32}{3}sen(\frac{3\sqrt{x}}{8}+\frac{1}{4})+c$

(27) $\int \frac{tg\,x\,dx}{(\cos^{99}x+1)^2}$ **Rpta.** $\ln x-\frac{1}{99}\ln|\cos^{99}x+1|-\ln\cos x-\frac{1}{99(\cos^{99}x+1)}+c$

(28) $\int \frac{dx}{x(x^7+1)^2}$ **Rpta.** $\ln x-\frac{1}{7}\ln|x^7+1|+c$

(29) $\int \frac{(2+tg^2x)\sec^2 x}{1+tg^3x}dx$ **Rpta.** $\ln|tgx+1|+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg(\frac{2tgx-1}{\sqrt{3}})+c$

(30) $\int \frac{dx}{e^{\ln 2x}\sqrt{\ln x+\sqrt{\ln x+\ldots}}-x}$ **Rpta.** $\sqrt{\ln x+\sqrt{\ln x+\sqrt{\ln x+\ldots}}}+c$

(31) $\int (x+(x+(x+(x+...+\infty)^3)^3)^3)^3\,dx$

Rpta. $\frac{1}{4}[(x+(x+(x+...+\infty)^3)^3)^3]^4-\frac{1}{2}[(x+(x+(x+...+\infty)^3)^3)^3]^6+c$

(32) $\int \frac{sen\,x+sen\,2x+...+sen\,nx}{\cos x+\cos 2x+...+\cos nx}dx$ **Rpta.** $-\frac{2}{n+1}\ln|\cos(\frac{n+1}{n})x|+c$

(33) $\int \frac{(x^2-sen^2x)dx}{x-sen\,x\cos x+x\cos x-sen\,x}$ **Rpta.** x (cosec x – ctg x) + c

(34) $\int \frac{x\ln x\ dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$ **Rpta.** $-\frac{\ln x}{x^2-1}+arc\sec\ x+c$

(35) $\int \frac{arcsen\sqrt{2x}}{\sqrt{1-2x}}dx$ **Rpta.** $\sqrt{2x}-\sqrt{1-2x}\ arcsen\sqrt{2x}+c$

(36) $\int \frac{dx}{\sqrt{tg\,x}}$ **Rpta.** $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln|\frac{tg\,x+\sqrt{2tg\,x}+1}{tg\,x-\sqrt{2\,tg\,x}+1}|+\frac{\sqrt{2}}{2}arctg(\frac{\sqrt{2tg\,x}}{1-tg\,x})+c$

(37) $\int e^{-x}\cos^3 x\ dx$ **Rpta.** $\frac{e^{-x}}{40}(3\,sen\,3x-\frac{\cos 3x}{3})+\frac{3}{8}e^{-x}(sen\,x-\cos x)+c$

(38) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x^2}$ **Rpta.** $-\ln|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c$

(39) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}\ dx}{5+\sqrt{4+x^2}}$ **Rpta.** $x-5\ln|\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{2}|-\frac{25}{\sqrt{21}}\ln|\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}tg(\frac{1}{2}arctg(\frac{x}{2}))}{\sqrt{7}-\sqrt{3}tg(\frac{1}{2}arctg(\frac{x}{2}))}|+c$

(40) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+e^x}}}$ **Rpta.** $\frac{4}{3}(\sqrt{1+\sqrt{1+e^x}})^3-4\sqrt{1+\sqrt{1+e^x}}+c$

(41) $$\int \frac{x-\sqrt[3]{x-2}}{x^2-\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx$$

Rpta. $\frac{1}{4}\ln|(x-2)^{-1/3}+1|+\frac{3}{8}\ln|(x-2)^{2/3}-(x-2)^{1/3}+2|-\frac{1}{4\sqrt{7}}\,arctg(\frac{2\sqrt[3]{x-2}-1}{\sqrt{7}})+c$

(42) $$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$$ **Rpta.** $\frac{1}{10}\ln|\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}|+\frac{\sqrt{3}}{5}\,arctg(\frac{2z+1}{\sqrt{3}})+c$

(43) $$\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}\,dx$$ **Rpta.** $\ln|\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}|+c$

Sugerencia: $z=x+\frac{1}{x}$

(44) $$\int \frac{arcsen\,x\;dx}{(1-x^2)^{3/2}}$$ **Rpta.** arcsen x tg(arcsen x) + ln | cos (arcsen x) | + c

(45) $$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,arcsen\,x\;dx$$ **Rpta.** $-\frac{arcsen\,x(1-x^2)^{3/2}}{3x^3}-\frac{1}{6x^2}-\frac{\ln x}{3}+c$

(46) $$\int \frac{dx}{(x-2)^3\sqrt{3x^2-8x+5}}$$

Rpta. $\frac{6x-13}{2(x-2)^2}\sqrt{3x^2-8x+5}-\frac{9}{2}\ln|\frac{2x-3+\sqrt{3x^2-8x+5}}{x-2}|+c$

(47) $$\int \frac{x^5+2x^2}{(1+x^3)^{3/2}}\,dx$$ **Rpta.** $\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}-\frac{2}{3\sqrt{1+x^3}}+c$

(48) $$\int \frac{dx}{x^6+x^4}$$ **Rpta.** $arctg\,x+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+c$

(49) $$\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}\,arctg\,x\,dx$$ **Rpta.** $\frac{(x^2+1)}{\sqrt{x}}\,arctg\,x-2\sqrt{x}+c$

(50) $\int \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{1-x\sqrt{1-x^2}}dx$ Rpta. $-\frac{1}{2}\ln|1-x\sqrt{1-x^2}|+\sqrt{3}arctg(\frac{2x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3(1-x^2)}})-arcsen\,x+c$

(51) $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$ Rpta. $\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln|\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}|+c$

(52) $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$ Rpta. $\frac{2}{3}[(x+1)^{3/2}+x^{3/2}]-\frac{2}{5}[(x+1)^{5/2}-x^{5/2}]+c$

(53) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$

Rpta. $2\ln|x-\sqrt{x^2-x+1}|-\frac{3}{2}\ln|2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}|-\frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})}+c$

(54) $\int \frac{\sqrt{2+x^2}}{1+x^2}dx$ Rpta. $\ln|x+\sqrt{2+x^2}|-arctg(\frac{\sqrt{2+x^2}}{x})+c$

(55) $\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$ Rpta. $-2arcsen(\frac{1}{x-2})-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}+c$

(56) $\int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx$

Rpta. $3\ln|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}|+\ln|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}|+c$

(57) $\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{x^2+2x+1}}dx$ Rpta. $\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}+c$

(58) $\int \frac{\cos^4 x+sen^4 x}{\cos^2 x-sen^2 x}dx$ Rpta. $\frac{1}{4}\ln|\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}|+\frac{1}{2}sen\,x\cos x+c$

(59) $\int \frac{sen\,x+sen^3 x}{\cos 2x}dx$ Rpta. $\frac{\cos x}{\sqrt{2}}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}|+c$

(60) $\int x(\cos^3 x^2 - sen^3 x^2)dx$ Rpta. $\frac{1}{12}(sen x^2 + \cos x^2)(4 + sen 2x^2) + c$

(61) $\int \frac{dx}{\sqrt{sen x.\cos^3 x}}$ Rpta. $2\sqrt{tg\, x} + c$

(62) $\int \frac{dx}{3(1-x^2)-(5+4x)\sqrt{1-x^2}}$ Rpta. $\frac{2\sqrt{1+x}}{3\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + c$

(63) $\int \cos ec^5 x\, dx$ Rpta. $-\frac{\cos ec^3 x}{4} ctg\, x - \frac{3}{8}\cos ec\, x\, ctg\, x + \frac{3}{8}\ln|\cos ec\, x - ctg\, x| + c$

(64) $\int \sec^6 x\, dx$ Rpta. $\frac{tg^5 x}{5} + \frac{2}{8} tg^3 x + tg\, x + c$

(65) $\int \frac{sen^3 x\, dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}$ Rpta. $\frac{5}{12}(\cos^3 x - 6)\sqrt[5]{\cos^2 x} + c$

(66) $\int \frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}} dx$ Rpta. $-\frac{(1+x^8)^{3/2}}{12x^{12}} + c$

(67) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$ Rpta. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + c$

(68) $\int \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} \frac{dx}{3x^2+11x+10}$ Rpta. $2arctg\sqrt{\frac{2x+3}{x+2}} + c$

(69) $\int \frac{dx}{x^6+1}$

Rpta. $\frac{arctg\, x}{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right| + \frac{1}{6}arctg(2x+\sqrt{3}) + \frac{1}{6}arctg(2x-\sqrt{3}) + c$

(70) $\int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{5 + \operatorname{sen} 2x} dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}) + c$

(71) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\operatorname{arcsen} x\,dx$ **Rpta.** $-\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}\operatorname{arcsen} x}{3x^3}-\frac{1}{6x^2}-\frac{\ln x}{3}+c$

(72) $\int \frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}}dx$ **Rpta.** $\frac{2}{3}\operatorname{arcsen}(\frac{x^{3/2}}{a^{3/2}})+c$

(73) $\int \frac{(\cos 2x-3)\,dx}{\cos^4 x\sqrt{4-c\operatorname{tg}^2 x}}$ **Rpta.** $-\frac{1}{3}\operatorname{tg} x(2+\operatorname{tg}^2 x)\sqrt{4-c\operatorname{tg}^2 x}+c$

(74) $\int \frac{x^2-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}dx$ **Rpta.** $\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]+c$

(75) $\int \sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos a-\cos x}}dx\,,\ 0<a<x<\pi$ **Rpta.** $-2\operatorname{arcsen}(\frac{\cos(x/2)}{\cos(a/2)})+c$

(76) $\int x^2\operatorname{arctg}(x/a)\,dx$ **Rpta.** $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}(x/a)-\frac{ax^2}{6}+\frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2)+c$

(77) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{1+3x+3x^2}}$

Rpta. $\frac{1}{3}\ln|\frac{x+\sqrt[3]{1+3x+3x^2}}{x}|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2\sqrt[3]{1+3x+3x^2}-1}{\sqrt{3}x})-$

$-\frac{1}{6}\ln|\frac{(1+3x+3x^3)^{3/2}}{x^2}-\frac{\sqrt[3]{1+3x+3x^2}}{x}+1|+c$

(78) $\int \frac{dx}{(\cos^2 x+4\operatorname{sen} x-5)\cos x}$

Rpta. $\ln\left|(1-\operatorname{sen} x)^{3/2}(1+\operatorname{sen} x)^{-1/18}(2-\operatorname{sen} x)^{-4/9}\right|+\frac{1}{6-3\operatorname{sen} x}+c$

(79) $\int \frac{1}{x^3}\operatorname{sen}\frac{1}{x}dx$ **Rpta.** $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}-\operatorname{sen}\frac{1}{x}+c$

(80) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6}dx$ Rpta. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{5x^5}-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+c$

(81) $\displaystyle\int\frac{e^x\,dx}{(1+e^x)\sqrt{e^x-1}}$ Rpta. $\sqrt{2}\,\text{arctg}\sqrt{\frac{e^x-1}{2}}+c$

(82) $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^3+\sqrt{(1+x^3)^3}}}$ Rpta. $\frac{4}{3}\sqrt{1+\sqrt{1+x^3}}+c$

(83) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}dx$ Rpta. $\sqrt{3x^2-7x-6}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln|x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}|+c$

(84) $\displaystyle\int\frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}}dx$

Rpta. $\sqrt{-4x^2-12x+8}-\frac{1}{8}(2x-3)\sqrt{4x^2-12x+8}-\frac{7}{8}\ln\left|2x-3+\sqrt{4x^2-12x+8}\right|+c$

(85) $\displaystyle\int e^x\left(\text{ctg}\,x+\ln(\text{sen}\,x)\right)dx$ Rpta. $e^x\ln(\text{sen}\,x)+c$

(86) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\ln\left|e^{4x}-1\right|-x+c$

(87) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^5+1}$

Rpta. $\displaystyle\frac{\sqrt{5}}{20}\ln\left|\frac{2x^2-(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2-(1+\sqrt{5})x+2}\right|+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10}\text{arctg}(\frac{4x-(1+\sqrt{5})}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}})+$

$\displaystyle+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10}\text{arctg}(\frac{4x-(1-\sqrt{5})}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}})+c$

(88) $\displaystyle\int\frac{3x\,\text{arcsen}\,x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}dx$ Rpta. $\displaystyle\frac{\text{arcsen}\,x}{(1-x^2)^{3/2}}-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{1-x^2}+\ln|\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}|\right]+c$

(89) $\displaystyle\int\frac{8\operatorname{sen}2x.\operatorname{sen}x\,dx}{(20-4\operatorname{sen}2x-19\operatorname{sen}^2 x)^{5/2}}$

Rpta. $\displaystyle\frac{4\operatorname{tg}x-16}{3\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-8\operatorname{tg}x+20}}\left(\frac{5(\operatorname{tg}x-4)^2}{\operatorname{tg}^2 x-8\operatorname{tg}x+20}+12\right)+\frac{128}{3(\operatorname{tg}x-8\operatorname{tg}x+20)^{3/2}}+c$

(90) $\displaystyle\int\frac{e^x\sqrt{e^{2x}-4}-2e^{2x}(e^x+2)}{2(e^x+2)\sqrt{e^{2x}-4}}dx$ Rpta. $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\left|e^x+2\right|-\sqrt{e^{2x}-4}+c$

(91) $\displaystyle\int\frac{x^2+3x}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+10}}dx$

Rpta. $\displaystyle\sqrt{x^2-2x+10}+5\ln\left|\sqrt{x^2-2x+10}+x+1\right|+\frac{4}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-2x+10}-3}{x-1}\right|+c$

(92) $\displaystyle\int\frac{x^4\sqrt{\operatorname{sen}x}+\sqrt{\operatorname{sen}x}+\cos x}{(x^4+1)\cos x}dx$

Rpta. $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\operatorname{sen}x}+1}{\sqrt{\operatorname{sen}x}-1}\right|-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\operatorname{sen}x}\right)+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+$

$\displaystyle+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+c$

(93) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{2-\operatorname{sen}x}{3+\operatorname{sen}x}}\cos x\,dx$ Rpta. $\displaystyle\sqrt{3+\operatorname{sen}x}\sqrt{2-\operatorname{sen}x}+5\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{2-\operatorname{sen}x}{5}}+c$

(94) $\displaystyle\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt[4]{1+\operatorname{sen}^4 x}}$ Rpta. $\displaystyle\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+\operatorname{sen}^4 x}-\operatorname{sen}x}{\sqrt[4]{1+\operatorname{sen}^4 x}+\operatorname{sen}x}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{sen}^4 x}{\operatorname{sen}^4 x}}\right)+c$

(95) $\displaystyle\int\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$ Rpta. $\displaystyle x\arccos\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}+c$

(96) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[4]{1+e^{4x}}}{e^{x}}dx$ Rpta. $\displaystyle-\frac{\sqrt[4]{1+e^{4x}}}{e^x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+e^{4x}}-e^x}{\sqrt[4]{1+e^{4x}}+e^x}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt[4]{1+e^{4x}}}{e^x}\right)+c$

(97) $\int \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x}\, dx$ Rpta. $-\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x} + \operatorname{arcsen}\sqrt{1-\cos x} + c$

(98) $\int \sqrt{\cos^2 x + \cos x}\, dx$ Rpta. $\sqrt{\cos^2 x + \cos x} + \operatorname{arcsen}\sqrt{1-\cos x} + c$

(99) $\int e^{\operatorname{sen} x} \frac{x\cos^3 x - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx$ Rpta. $e^{\operatorname{sen} x}(x - \sec x) + c$

(100) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\frac{dx}{x}$ Rpta. $3\left[\ln\left|\sqrt[3]{x}\right| - \ln\left|1+\sqrt{1-\sqrt[3]{x}}\right| - \operatorname{arcsen}\sqrt[3]{x}\right] + c$

(101) $\int \ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ Rpta. $\ln(x+a).\ln(x+b) + c$

(102) $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{1+x^4}} dx$ Rpta. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right| + c$

(103) $\int \frac{e^{\ln(\ln^3 x)} + e^{-\ln(1/\ln x)} + 2}{e^{\ln x}\ln^3 x + e^{-\ln(1/8x)}} dx$ Rpta. $\ln(\ln x + 2) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{\ln x + 1}{\sqrt{3}}) + c$

(104) $\int \frac{x\, dx}{2x(x+3)^{1/2} - (4x+12)^{3/2}}$ Rpta. $\frac{4}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x+3} - \frac{\sqrt{x+3}}{3} + c$

(105) $\int \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x\, dx}{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x}$ Rpta. $\frac{1}{3}\ln|\operatorname{tg}^3 x - 1| + c$

(106) $\int \frac{\cos x(\operatorname{sen} x)^7\, dx}{(1+\operatorname{sen}^4 x)^{3/2}}$ Rpta. $\sqrt{1+\operatorname{sen}^4 x} + \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^4 x}} + c$

(107) $\int \frac{x^5 + 2x^2}{(1+x^3)^{3/2}} dx$ Rpta. $\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} - \frac{2}{3\sqrt{1+x^3}} + c$

(108) $\int \frac{\cos^{n-1}(\frac{x+a}{2})}{\operatorname{sen}^{n+1}(\frac{x-a}{2})} dx$ Rpta. $-\frac{2}{n\cos a}(\cos(\frac{x+a}{2}))^n(\operatorname{sen}(\frac{x-a}{2}))^{-n} + c$

(109) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$ Rpta. $\frac{1}{2}\arccos(\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}})+c$

(110) $\int \ln(x^2-x-6)dx$

Rpta. $\ln(\frac{5}{2})(2x+1)+(2x-1)\ln(\frac{2\sqrt{x^2-x-6}}{5})-5\ln|\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-x-6}}|-(2x-1)+c$

(111) $\int \operatorname{arccosec}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx+\int\frac{(x-x^5)^{1/5}}{x^6}dx$

Rpta. $x\operatorname{arccos}ec\sqrt{\frac{x+1}{x}}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\frac{5}{24}(\frac{1}{x^4}-1)^{6/5}+c$

(112) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}}{\cos^{14} x}dx$ **Rpta.** $\frac{3}{55}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x}(5\operatorname{tg}^2 x+11)+c$

(113) $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\operatorname{sen} 2x}}$ **Rpta.** $\frac{\sqrt{2}}{5}\left(\operatorname{tg}^2 x+5\right)\sqrt{\operatorname{tg} x}+c$

(114) $\int \frac{5x+2}{\sqrt{3x}\sqrt{1-3x}}dx$ Rpta. $\frac{17}{9}\operatorname{arcsen}\sqrt{3x}-\frac{5}{18}\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}\sqrt{3x})+c$

(115) $\int \frac{\operatorname{sen} x\sqrt{1+3\cos^2 x}}{\cos^2 x}dx$ Rpta. $-\frac{\sqrt{1+3\cos^2 x}}{\cos x}+\sqrt{3}\ln\left|\sqrt{1+3\cos^2 x}+\sqrt{3}\cos x\right|+c$

(116) $\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}dx$

Rpta. $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1}\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}{x+1})+c$

(117) $\int \frac{(e^{3x}+e^x)dx}{e^{4x}-e^{2x}+1}$ Rpta. $\operatorname{arctg}(e^x-e^{-x})+c$

118) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$

Rpta. $-\dfrac{e^{-x}}{2}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}\right|+c$

119) Deducir la fórmula de recurrencia de la siguiente integral:

$$I_n=\int x^n e^{ax}\,dx=\frac{x^n e^{ax}}{a}-\frac{n}{a}I_{n-1}$$

120) Deducir la fórmula de recurrencia de la siguiente integral:

$$I_n=\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{1-x^2}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

121) Deducir la fórmula de recurrencia de la integral:

$$I_n=\int x^n \operatorname{sen} x\,dx=-x^n\cos x+nx^{n-1}\operatorname{sen} x-n(n-1)I_{n-2}$$

122) Deducir la fórmula de recurrencia de la integral:

$$I_n=\int x^m(x+a)^n\,dx=\frac{1}{m+n+1}\left[x^n(x+a)^{n+1}-maI_{m-1}\right]$$

123) Verificar la fórmula de recurrencia de la integral:

$$I_n=\int \cos^n x\,dx=\frac{\cos^{n-1}x\operatorname{sen}}{n}+\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

124) Verificar la fórmula de recurrencia de la integral:

$$\int \sec^n x\,dx=\frac{\sec^{n-2}x\operatorname{tg}x}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx$$

125) Verificar la fórmula de recurrencia de la integral:

$$\int \cos ec^n x\,dx=-\frac{\cos ec^{n-2}x.c\operatorname{tg}x}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int \cos ec^{n-2}x\,dx$$

(126) Verificar la fórmula de recurrencia de la integral:

$$I_n^m = \int x^n \ln^m x\,dx = \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\ln^m x - \frac{m}{n+1}\int x^n \ln^{m-1} x\,dx\right],\quad n \neq 1$$

(127) Verificar la fórmula de recurrencia de la integral:

$$I_n = \int \frac{\operatorname{sen} x}{x^n}\,dx = -\frac{\operatorname{sen} x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\cos x}{x^{n-1}}\,dx$$

(128) Use la integración por partes para deducir la siguiente fórmula.

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx\,,\quad n \geq 2$$

(129) Hallar una fórmula de recurrencia para

$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx$, $n \geq 0$ y aplicar dicha fórmula para calcular $\int_0^1 e^{-x^2} x^5\,dx$

(130) Deducir una fórmula de recurrencia para

$\int x^4 \ln^n x\,dx$ y calcular $\int_1^2 x^4 \ln^3 x\,dx$

(131) Verificar:

a) $I_n = \int \ln^n x\,dx = x\ln^n x - nI_{n-1}$

b) $I_n = \int x^n e^x\,dx = x^n e^x - nI_{n-1}$

c) $I_n = \int (a^2 - x^2)^n\,dx = \dfrac{x(a^2-x^2)^n}{2n+1} + \dfrac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}$

d) $I_n = \int \dfrac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2+a}} = \dfrac{x^{n-1}}{n}\sqrt{x^2+a} - \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$

(132) $\int \sqrt{x}\,arctg\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ Rpta. $\frac{2x\sqrt{x}}{3}arcsen\sqrt{x}-\frac{2}{3}(\sqrt{1-x})^3+2\sqrt{1-x}+c$

(133) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ Rpta. $arcsen\ x-\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2}+c$

1.7 APLICACIONES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA EN PROBLEMAS DE ADMINISTRACIÓN Y ECONOMIA.-

Se conoce que en la teoría Económica y Administrativa, la variación de una cantidad "y" con respecto a otra "x", el análisis se realiza en términos de dos conceptos: variación promedio y variación marginal.

En forma similar que se hizo para obtener la variación marginal diferenciando o derivando una función, ahora a tal función lo obtenemos integrando la ecuación de su variación marginal. En esta sección aplicaremos la integral indefinida a las funciones de: costo, ingresos, consumo y también en la formación del capital.

1.7.1 COSTO.-

Si el costo total "y" de producir y comercializar "x" unidades de un artículo está dado por la función $y=f(x)$ entonces el costo promedio por unidad es:

$$\boxed{\frac{y}{x}=\frac{f(x)}{x}}$$

y el costo marginal está dado por:

$$\boxed{y'=\frac{dy}{dx}=f'(x)}$$

o sea que el costo marginal es la primera derivada $f'(x)$ de la función costo total $y=f(x)$, por lo tanto, el costo total es la integral con respecto a x de la función costo marginal, es decir:

$$\boxed{y=\int f'(x)\,dx+c=f(x)+c}$$

para calcular la constante de integración y obtener una única función de costo total debe especificarse una condición inicial y se hace en términos de un costo fijo o inicial, es decir, el valor del costo cuando $x = 0$

Ejemplo.- La función de costo marginal para la producción es $y' = 10 + 24x - 3x^2$; Si el costo total de producir una unidad es 25, determinar la función de costo total y la función de costo promedio.

Desarrollo

$y' = f'(x) = 10 + 24x - 3x^2$, función costo marginal; $y = 25$ costo por unidad $x = 1$, la unidad de mercancía.

Como: $\dfrac{dy}{dx} = 10 + 24x - 3x^2$, de donde se expresa en la forma:

$dy = (10 + 24x - 3x^2)dx$, integrando en ambos miembros:

$\int dy = \int (10 + 24x - 3x^2)dx + k$, de donde: $y = 10x + 12x^2 - x^3 + k$

Calculando la constante k, para $x = 1$, $y = 25$, es decir:

$25 = 10 + 12 - 1 + k \Rightarrow k = 4$

$\therefore \quad y = 10x + 12x^2 - x^3 + 4$, es la función de costo total.

$\bar{y} = \dfrac{y}{x} = 10 + 12x - x^2 + \dfrac{4}{x}$, es la función de costo promedio.

1.7.2 INGRESO.-

Si la función de demanda es dado por $y = f(x)$, donde "y" es el precio por unidad y "x" es el número de unidades a vender, el ingreso total R es el producto de x e y, es decir:

$$\boxed{R = xy = xf(x)}$$

El ingreso marginal en función de la cantidad demandada es la derivada del ingreso total con respecto a x $\frac{dR}{dx} = R'(x)$, de donde la función ingreso total es la integral con respecto a x de la función ingreso marginal, es decir:

$$\boxed{R(x) = \int R'(x)\,dx + k}$$

para calcular la constante de integración se utiliza la condición inicial que el ingreso es cero cuando la demanda es nula.

Ejemplo.- Si el ingreso marginal es: $R'(x) = 15 - 9x - 3x^2$, evalúe las funciones de ingreso y de demanda

Desarrollo

$$R(x) = \int R'(x)\,dx + k = \int (15 - 9x - 3x^2)\,dx + k$$

$$= 15x - \frac{9x^2}{2} - x^3 + k \text{ , para: } R(0) = 0 = k$$

$$\therefore \qquad R(x) = 15x - \frac{9x^2}{2} - x^3$$

Como: $R(x) = xf(x) \Rightarrow y = f(x) = \frac{R(x)}{x}$, de donde: $y = 15 - \frac{9x}{2} - x^2$, es la función demanda.

1.7.3 INGRESO NACIONAL, CONSUMO NACIONAL Y AHORRO.-

Si la función de consumo está dado por: $c = f(x)$, en donde c es el consumo nacional total y x es el ingreso nacional total, entonces la propensión marginal al consumo es la derivada de la función consumo con respecto a x: $\boxed{\frac{dc}{dx} = f'(x)}$

Suponiendo que $x = c + s$, donde s es el ahorro, la propensión marginal al ahorro será:

$$\boxed{\frac{ds}{dx} = 1 - \frac{dc}{dx}}$$

El consumo marginal total es al integral con especto a x de propensión marginal al consumo.

$$\boxed{c=\int f'(x)\,dx+k=f(x)+k}$$

para obtener una función de consumo única debe especificarse una condición inicial.

Ejemplo.- La propensión marginal al consumo (en miles de millones de dólares) es: $\frac{dc}{dx}=0.5+\frac{1}{3x^{1/3}}$, cuando el ingreso es cero, el consumo es 6 mil millones de dólares, hallar la función de consumo.

Solución

$\frac{dc}{dx}=$ propensión marginal al consumo

$x=$ Ingreso nacional $=0$

$c=$ Consumo $=6$ mil millones de dólares

Como: $\frac{dc}{dx}=0.5+\frac{1}{3x^{1/3}}$, expresamos en la forma: $\int dc=\int(0.5+\frac{1}{3x^{1/3}})dx+k$, de donde se tiene: $c=0.5x+0.5x^{2/3}+k$, para: $x=0$, $c=6$ se tiene:

$6=0+0+k \Rightarrow k=6$ $\qquad\qquad \therefore\quad c=0.5x+0.5x^{2/3}+6$

1.7.4 FORMACIÓN DE CAPITAL.-

La formación de capital es el proceso de incrementar la cantidad acumulada de los bienes de capital. Si el proceso es continuo en el tiempo, la acumulación de bienes de capital se puede expresar en función del tiempo $k(t)$ y la tasa de formación de capital estará dada por: $\frac{dk(t)}{dt}=k'(t)$

La tasa de formación de capital será igual al flujo de la inversión neta que se representa por $I(t)$ de tal manera que:

$$\boxed{k(t)=\int k'(t)\,dt=\int I(t)\,dt+c}$$

para obtener una función univoca para el capital debe especificarse una condición inicial.

Ejemplo.- Si el flujo de inversión está dado por: $I(t)=20t^{3/7}$ y la acumulación inicial de bienes de capital a $t=0$ es 25. Determinar la función que represente al capital k.

Solución

Se conoce que: $k(t)=\int I(t)\,dt+c=\int 20t^{3/7}\,dt+c \Rightarrow k(t)=14t^{10/7}+c$

Como: $t=0$, $k(0)=25$, entonces: $25=0+c \Rightarrow c=25 \quad \therefore\; k(t)=14t^{10/7}+25$

1.7.5. PROBLEMAS DESARROLLADOS.-

1. La función de costo marginal para la producción de x unidades está dado por: $y'=2+60x-5x^2$. Si el costo fijo es 65, hallar la función de costo total y costo promedio.

Solución

$y'=f'(x)=2+60x-5x^2$, función de costo marginal.

Como el costo fijo quiere decir que: $x=0$ para $y=65$

Luego: $y=\int (2+60x-5x^2)\,dx+k=2x+30x^2-\frac{5}{3}x^3+k$

$$\Rightarrow \quad y=2x+30x^2-\frac{5}{3}x^3+k\,,$$

por lo tanto para $x=0$, $y=65$ se tiene: $65=0+0-0+k \Rightarrow k=65$

$\therefore \qquad y=2x+30x^2-\frac{5}{3}x^3+65$, es la función de costo total.

$\overline{y}=\frac{y}{x}=2+30x-\frac{5}{3}x^2+\frac{65}{x}$, es la función de costo promedio.

(2) La compañía Yosimar fabrica relojes para viaje. La función de costos marginales diarios asociada con la producción de estos relojes es: $c'(x)=0.000009x^2-0.009x+8$, donde $c'(x)$ se mide en dólares por unidad y x denota el número de unidades producidas. La gerencia ha determinado que los costos fijos diarios por la producción de estos relojes asciende a \$ 120. Indique los costos totales relativo a la producción de los primeros 500 relojes de viaje por día.

Solución

$c'(x)=0.000009x^2-0.009x+8$, función costo marginal.

Como el costo fijo quiere decir que: $x=0,\ c(0)=120$.

Luego: $c(x)=\int(0.000009x^2-0.009x+8)dx+k=0.000003x^3-\frac{0.009}{2}x^2+8x+k$

Como: $x=0,\ c(0)=120$, se tiene: $120=0-0+0+k \Rightarrow k=120$

Por lo tanto se tiene: $c(x)=0.000003x^3-\frac{0.009}{2}x^2+8x+120$.

Calculando el costo total para la producción de: $x=500$ relojes es:

$$c(500)=0.000003(500)^3-\frac{0.009}{2}(500)^2+8(500)+120=375-1125+4000+120=3\,370$$

$\therefore$ El costo total por 500 relojes es: \$ 3 370.00

(3) Un fabricante ha encontrado que el costo marginal es de: $3x^2-60x+400$ dólares por unidad cuando se ha producido x unidades. El costo total de producción de las dos primeras unidades es de \$ 900. ¿Cuál es el costo total de producción de las cinco primeras unidades?

Solución

$c'(x)=3x^2-60x+400$, función costo marginal

$$c(x) = \int (3x^2 - 60x + 400)dx + k = x^3 - 30x^2 + 400x + k$$

Como el costo de 2 unidades es 900, es decir: $c(2) = 900$,

entonces: $900 = 2^3 - 30(2)^2 + 400(2) + k \quad \Rightarrow \quad k = 212$

Luego se tiene: $c(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 212$, la función de costo total.

Calculando el costo de la producción $x = 5$ unidades:

$$c(5) = 5^3 - 30(5)^2 + 400(5) + 212 = 125 - 750 + 2000 + 212 = 1\,587$$

$\therefore$ El costo total por 5 unidades es: \$ 1 587.00

4. En una cierta fábrica, el costo marginal es de: $3(x-4)^2$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es de x unidades.

a) Exprese el costo total de producción en términos de los gastos generales (el costo sin producir ninguna unidad) y el número de unidades producidas.

b) ¿Cuál es el costo de producir 14 unidades si los gastos generales son de 436 dólares?.

Solución

$c'(x) = 3(x-4)^2$, función costo marginal $\Rightarrow c(x) = \int 3(x-4)^2\,dx + k = (x-4)^3 + k$

Cuando: $x = 0$, $c(0)$ es el gasto general.

Luego: $c(0) = (0-4)^3 + k \quad \Rightarrow \quad k = c(0) + 48$

a) Por lo tanto: $c(x) = (x-4)^3 + 48 + c(0)$

b) Para: $x = 0$ $c(0) = 436$, de donde se tiene: $c(14) = 10^3 + 48 + 436 = 1\,484$

El costo de producir 14 unidades es: \$ 1 484.00

5) Si el ingreso marginal es: $R'(x)=15-9x-3x^2$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es de x unidades.

Solución

$R'(x)=15-9x-3x^2$, función de ingreso marginal

$$R(x)=\int(15-9x-3x^2)dx+c=15x-\frac{9}{2}x^2-x^3+c$$

La constante de integración se calcula con la condición el ingreso es cero cuando la cantidad de demanda es nula $(x=0, R=0)$ $\Rightarrow$ $0=0-0-0+c$ $\Rightarrow$ $c=0$

Luego: $R(x)=15x-\frac{9}{2}x^2-x^3+c$, es la función de ingreso total.

Como: $R(x)=xf(x) \Rightarrow f(x)=\frac{R(x)}{x} \Rightarrow f(x)=\frac{15x-\frac{9}{2}x^2-x^3}{x}=15-\frac{9}{2}x-x^2$

$\therefore$ $f(x)=15-\frac{9}{2}x-x^2$, es la función de demanda.

6) El beneficio marginal (ingreso marginal menos costo marginal) de una cierta compañía es de: $100-2x$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es de x unidades. Si el beneficio de la compañía es de 700 dólares cuando se produce 10 unidades. ¿Cuál es el mayor beneficio posible de la compañía?

Solución

$R'(x)=100-2x$, función de beneficio marginal.

$$R(x)=\int(100-2x)dx+c=100x-x^2+c$$

Para calcular la constante de integración se tiene que para x = 10 unidades de producción se tiene $R(10)=700$ de beneficio

$\Rightarrow$ $700=1\,000-100+c$ $\Rightarrow$ $c=-200$.

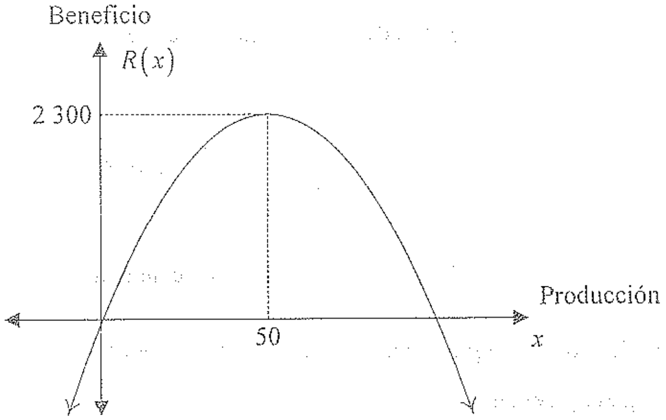
Luego: $R(x)=100x-x^2-200$, es la función de beneficio total.

El mayor beneficio se obtiene de la siguiente forma:

$R(x)=100x-x^2-200 \quad \Rightarrow \quad R(x)+200=-(x^2-100x)$, completando cuadrados:

$R(x)+200-2\,500=-(x^2-100x+2\,500)$, simplificando:

$R(x)-2\,300=-(x-50)^2$, cuya gráfica es:



$\therefore$ El mayor beneficio es de $ 2 300.00.

7) La gerencia ha determinado que la función de ingresos marginales diarios asociada con la producción y venta de sus cafeteras está dado por: $R'(x)=-0.03x+60$ donde x denota el número de unidades producidas y vendidas, además que $R(x)$ se mide en dólares por unidad.

a) Determinar la función de ingresos $R(x)$ vinculada con la producción y venta de las cafeteras.

b) ¿Cuál es la ecuación de demanda que relaciona el precio unitario al mayoreo con la cantidad de cafeteras demandadas?.

Solución

a) $R(x)=\int R'(x)\,dx+c \Rightarrow R(x)=\int(-0.03x+60)\,dx+c$

$$=-\frac{0.03}{2}x^2+60x+c=-0.015x^2+60x+c$$

Para calcular la constante de integración se tiene $x=0, R(0)=0$, de donde:

$0=0+0+c \Rightarrow c=0$

$\therefore\ R(x)=-0.015x^2+60x$, es la función de ingreso.

b) Como:

$$R(x)=xf(x) \Rightarrow f(x)=\frac{R(x)}{x} \Rightarrow f(x)=\frac{-0.015x^2+60x}{x}=-0.015x+60$$

$\therefore\ f(x)=-0.015x+60$, es la función de demanda.

8) Si la función de ingreso marginal es: $R'(x)=12-8x+x^2$. Determinar las funciones de ingreso y demanda.

Solución

$$R(x)=\int R'(x)\,dx+c \Rightarrow R(x)=\int(12-8x+x^2)\,dx+c=12x-4x^2+\frac{x^3}{3}+c$$

Para calcular la constante de integración se tiene: $x=0, R(0)=0$, de donde: $c=0$

$\therefore\ R(x)=12x-4x^2+\dfrac{x^3}{3}$, es la función de ingreso total.

Como: $R(x)=xf(x) \Rightarrow f(x)=\dfrac{R(x)}{x} \Rightarrow f(x)=\dfrac{12x-4x^2+\frac{x^3}{3}}{x}=12-4x+\dfrac{x^2}{3}$

$\therefore\ f(x)=12-4x+\dfrac{x^2}{3}$, es la función de demanda.

(9) La función de ingreso marginal para cierta mecánica es: $R'(x)=12-3x$. Si x unidades son demandadas cuando el precio por unidad es de p dólares, obtenga:

a) La función de ingreso total.

b) Una ecuación que contenga a p y x (la ecuación de demanda).

Solución

a) $R(x)=\int R'(x)dx+c \Rightarrow R(x)=\int(12-3x)dx+c=12x-\dfrac{3x^2}{2}+c$

Para calcular la constante de integración se tiene que para cada unidad (x = 1) el precio es $R(1)=p \quad \Rightarrow \quad p=12-\dfrac{3}{2}+c \quad \Rightarrow \quad c=p-\dfrac{21}{2}$

$\therefore \quad R(x)=12x-\dfrac{3x^2}{2}+p-\dfrac{21}{2}$, es la función de ingreso total.

b) Como:

$$R(x)=xf(x)\Rightarrow f(x)=\frac{R(x)}{x}\Rightarrow f(x)=\frac{12x-\dfrac{3x^2}{2}+p-\dfrac{21}{2}}{x}=12-\frac{3x}{2}+\frac{2p-21}{2x}$$

$\therefore \quad f(x)=12-\dfrac{3x}{2}+\dfrac{2p-21}{2x}$, es la función de demanda.

(10) La función de ingreso marginal de cierta compañía es: $R'(x)=20-0.02x-0.003x^2$.

a) Encuentre la función de ingreso total.

b) ¿Cuanto ingreso se obtendrá por la venta de 100 unidades del producto de la empresa?.

c) ¿Cuál es la función de demanda del producto de la empresa?.

Solución

a) $R(x)=\int R'(x)dx+c \Rightarrow R(x)=\int(20-0.02x-0.003x^2)x+c$

$$=20x-0.01x^2-0.003x^3+c$$

Para calcular la constante de integración, se tiene que el ingreso debe ser cero cuando no se venden unidades, es decir: $R=0, x=0$, de donde: $c=0$.

$\therefore$ $R(x)=20x-0.01x^2-0.003x^3$, es la función de ingreso total.

b) Cuando de venden x = 100 unidades se obtiene un ingreso de:

$R(100)=2000-100-1000=900$ dólares.

c) $R(x)=xf(x) \Rightarrow f(x)=\dfrac{R(x)}{x} \Rightarrow f(x)=\dfrac{20x-0.01x^2-0.003x^3}{x}=20-0.01x-0.003x^2$

$\therefore$ $f(x)=20-0.01x-0.003x^2$, es la función de demanda.

11) La propensión marginal al ahorro (en miles de millones de U. M.) es: $\dfrac{ds}{dx}=1-0.4+\dfrac{1}{6x^{2/3}}$, cuando el ingreso es nulo, el consumo vale 9 mil millones de U. M. Obtenga la función de consumo.

Solución

Como: $\dfrac{ds}{dx}=1-\dfrac{dc}{dx}=1-0.4+\dfrac{1}{6x^{2/3}} \Rightarrow \dfrac{dc}{dx}=0.4+\dfrac{1}{6x^{2/3}} \Rightarrow dc=(0.4+\dfrac{1}{6x^{2/3}})dx$

Lo expresamos en la forma: $\int dc=\int(0.4+\dfrac{1}{6x^{2/3}})dx+k$,

de donde se tiene: $c=0.4+\dfrac{1}{2}x^{1/3}+k$,

cuando: $x=0$, ingreso, el consumo $c=9$ mil millones,

se tiene: $9=0+0+k \Rightarrow k=9$

$\therefore$ $c=f(x)=0.4+\dfrac{1}{2}x^{1/3}+9$, es la función de consumo.

1.7.6 PROBLEMAS PROPUESTOS.-

1. La función de costo marginal de una empresa es: $c'(x) = 30 - 0.05x$.

    a) Determinar la función de costo $c(x)$, si los costos fijos de la empresa son de \$ 2 000 por mes.

    b) ¿Cuánto costará producir 150 unidades en un mes?

    Rpta. a) $c(x) = 2000 - 30x - 0.025x^2$ b) \$ 5 937.50

2. El costo marginal de cierta empresa de productos ABC es: $c'(x) = 3 - 0.001x$ y el costo de fabricar 100 unidades es \$ 995. ¿Cuál es el costo de producir 200 unidades?.

    Rpta. \$ 1 280

3. Una función de costo marginal está definida por: $c'(x) = 3x^2 + 8x + 4$ y el costo general es de \$ 6. Determinar la función costo total correspondiente.

    Rpta. $c(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 6$

4. La función de costo marginal está definida por: $c'(x) = 6x$, donde $c(x)$ es el número de cientos de dólares del costo total de producción de x unidades de mercadería. Si el costo de 200 unidades es de \$ 2 000. Determinar:

    a) La función costo total. b) El costo general

    Rpta. a) $c(x) = 3x^2 + 8$ b) \$ 800.00

5. En 1990, el jefe del departamento de investigación y desarrollo de la corporación SOLORON afirmó que el costo de producción de paneles de celdas solares se reduciría a razón de $\dfrac{58}{(3t+2)^2}$, $(0 \le t \le 10)$ dólares por watt pico durante los próximos t años, donde $t = 0$ corresponde al inicio del año 1990 (un watt pico es la energía producida al mediodía en un día soleado). En 1990, los paneles utilizados para los sistemas de energía fotovoltaica costaban \$ 10 por watt pico. Hallar una expresión que proporcione el costo por watt pico de producción de celdas solares al inicio del año t. ¿Cuál será el costo al inicio del año 2000?.

Rpta. a) $c(t)=\dfrac{t+20}{3t+2}$ b) \$ 0.94 por watt pico.

(6) La gerencia de una división de DITTON INDUSTRIES ha determinado que la función de costo marginal diario asociada con la producción de máquinas para la preparación de palomitas de maíz está dada por: $c'(x)=0.00003x^2-0.03x+10$, donde $c'(x)$ se mide en dólares por unidad y x denota las unidades fabricadas. La gerencia también ha determinado que los gastos fijos diarios relacionados con la producción de estas máquinas asciende a \$ 600. más los gastos totales de DITTON, relacionadas con la producción de las primeras 500 máquinas de este tipo. **Rpta.** \$ 3 100

(7) Un fabricante ha encontrado que el costo marginal es: $c'(x)=6x+1$ dólares por unidad cuando se han producido x unidades. El costo total (incluyendo gastos generales) de producción de la primera unidad es de 130 dólares. ¿Cuál es el costo de producción de la primeras 10 unidades?. **Rpta.** \$ 436

(8) Encuentre la función de costo para la función de costo marginal $c'(x)=2x^2+5x$, donde el costo fijo es de \$ 10. **Rpta.** $c(x)=\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{5x^2}{2}+10$

(9) Un fabricante ha determinado que la función de costo marginal es: $c'(x)=0.003x^2-0.4x+40$, donde x es el número de unidades producidas. Si el costo marginal es de \$ 2 750 cuando $x = 50$ y los costo fijos son de \$ 5 000. ¿Cuál es el costo promedio de producir 100 unidades?. **Rpta.** \$ 80

(10) Suponga que la función de costo marginal para el producto de un fabricante está dado por: $\dfrac{dc}{dx}=\dfrac{100x^2-4998x+50}{x^2-50x+1}$, donde c es el costo total en dólares cuando se producen x unidades.

a) Determinar el costo marginal cuando se producen 50 unidades.

b) Si los costos fijos son de \$ 10 000, encuentre el costo total de producir 50 unidades.

Rpta. a) \$ 150 b) \$ 15 000

(11) El costo marginal de una empresa en el nivel de producción de x unidades es: $c'(x)=\frac{x^2}{50}-2x+107$ y los costos fijos de producción son \$ 2 000.

a) Calcule la función de costo total.

b) Halle el costo actual de producir una unidad incremental después de haber producido 30 unidades.

Rpta. a) $c(x)=\frac{x^3}{150}-x^2+107x+2000$

b) El costo actual de producir la próxima unidad es: $c(31)-c(30)=\$\ 64.61$

(12) Si el costo marginal es: $c'(x)=3x^2-18x+30$. ¿Cuál es la disminución en el costo total $c(x)$ cuando la producción total fabricada se reduce de 12 a 3 unidades?.

Rpta. La disminución en el costo total es de: 756

(13) Dada la función de costo marginal $c'(x)=1+\sqrt{x}$, encuentre la función de costo total, si $c(9)=2$. **Rpta.** $c(x)=x+\frac{2}{3}x^{3/2}-25$

(14) El costo de producir máquinas de coser incluye un costo fijo de \$ 2 000 y un costo variable de \$ 500 por máquina. Halle la función de costo total y el costo de producir 100 máquinas. **Rpta.** $c(x)=50x-2\ 000$; \$ 7 000.00

(15) Un fabricante ha encontrado que el costo marginal de una empresa es: $c'(x)=x+3$ dólares por artículo cuando se han producido x artículos. El costo total de producción de los 4 primeros artículos es de \$ 520. ¿Cuál es el costo total de producción de los 8 primeros artículos?. **Rpta.** $c(8)=\$\ 556$

(16) Un fabricante ha encontrado que su costo marginal es: $c'(x)=6x+1$ dólares por unidad cuando se han producido x unidades. El costo total de producción de la primera unidad es de \$ 130.

a) ¿Cuál es el costo de producción de las 10 primeras unidades?.

b) ¿Cuál es el costo de producción de la décima unidad?.

c) ¿Cuales son los costos generales (el costo sin producir alguna unidad)?

Rpta. a) $ 436 b) $ 58 c) $ 126

(17) Si el costo marginal es constante, demuestre que la función de costo total es una línea recta.

(18) El costo marginal de cierta empresa está dada por: $c'(x) = 24 - 0.03x + 0.006x^2$. Si el costo de producir 200 unidades es de $ 22 700, encuentre:

a) La función de costo total

b) Los costos fijos de la empresa

c) El costo de producir 500 unidades

(19) La función de costo marginal para le producto de una empresa está dado por $c'(x) = 10 - \dfrac{100}{x+10}$, donde $c(x)$ es el costo total en dólares cuando se producen x unidades. Cuando se producen 100 unidades, el costo promedio es de $ 50 por unidad. Con aproximación a la unidad de dólar más cercana, determinar el costo fijo del fabricante.

(20) La función de costo marginal para el producto de un fabricante está dado por $c'(x) = \dfrac{9}{10}\sqrt{x}\sqrt{0.004x^{3/2} + 4}$, donde $c(x)$ es el costo total en dólares cuando se producen x unidades. Los costos fijos son $ 360.

a) Determinar el costo marginal cuando se producen 25 unidades.

b) Encuentre el costo total de producir 25 unidades.

(21) Una compañía ha determinado que la función de costo marginal para la producción de cierta mercadería está dada por: $c'(x) = 125 + 10x + \dfrac{x^2}{9}$, donde $c(x)$ dólares es el costo total de producción de x unidades de mercadería. Si los gastos generales son de $ 250. ¿Cuál es el costo de producción de 15 unidades?.

(22) La compañía CARLOTA estima que el costo marginal por la producción de sus guitarras se serie profesional es: $c'(x)=0.002x+100$ dólares por mes cuando el nivel de producción es de x unidades por mes. Los gastos fijos de CARLOTA son de $ 4 000 por mes. ¿Cuáles son los gastos totales mensuales de CARLOTA relativos a la producción de x guitarras por mes?.

(23) La Gerencia de la Corporación Eléctrica Nacional ha determinado que la función de gasto marginal diarios asociados con la producción de sus cafeteras automáticas está dado por: $c'(x)=0.00003x^2-0.03x+20$, donde $c'(x)$ se mide en dólares por unidad y x denota las unidades producidas. La gerencia también ha determinado que los gastos fijos diarios debidos a esta producción asciende a $ 500. ¿Cuáles son los gastos totales de la nacional por la producción de las primeras 400 cafeteras por día?.

(24) Si el ingreso marginal es: $R'(x)=10-5x$, determine las funciones de ingreso total y demanda.

Rpta. $R(x)=10x-\frac{5}{2}x^2$; $f(x)=10-\frac{5}{2}x$

(25) Para un artículo la función de ingreso marginal está dada por $R'(x)=15-4x$. Si x unidades son demandadas cuando el precio por unidad es de p dólares. Determine:

a) La Función de ingreso total.

b) Una ecuación que contenga a p y x (la ecuación de demanda).

Rpta. a) $R(x)=15x-2x^2$ b) $p=15-2x$

(26) Suponga que las funciones de ingreso marginal y costo marginal para una firma son: $R'(x)=65-2x$ y $c'(x)=10$.

a) Describa la función de ingreso total.

b) Si los costos fijos son $ 250, describa la función de producción.

Rpta. a) $R(x)=65x-x^2$ b) $c(x)=10x+250$

(27) Un calcula que sus ingresos marginales son de $R(x)=100x^{-1/2}$ pesos por unidad cuando su producción es de x unidades. Se ha encontrado que su costo marginal correspondiente es de 0.4 x pesos por unidad. Suponga que la utilidad del fabricante (ingresos menos costo) es de \$ 520 cuando su nivel de producción es de 16 unidades. ¿Cuál es su utilidad cuando su nivel de producción es de 25 unidades?.

Rpta. \$ 646.20

(28) La función de ingreso marginal de cierta empresa es: $R'(x)=4-0.01x$.

a) Determine el ingreso obtenido por la venta de x unidades de su producto.

b) ¿Cuál es la función de demanda del producto de la empresa?

Rpta. a) $R(x)=4x-0.005x^2$ b) $p=4-0.005x$

(29) La función de utilidad marginal de una empresa es: $p'(x)=5-0.002x$ y la empresa obtiene una utilidad de \$ 310 al vender 100 unidades. ¿Cuál es la función de utilidad de la empresa?. **Rpta.** $p(x)=5x-0.001x^2-180$

(30) La función de ingreso marginal de una empresa es: $R'(x)=12-0.2x+0.03x^2$.

a) Determinar la función de ingreso.

b) ¿Qué ingreso se obtendrá al vender 20 unidades?.

c) ¿Cuál es la función de demanda del producto de la empresa?

Rpta. a) $R(x)=12x-0.1x^2+0.01x^3$ b) 120 c) $p(x)=12-0.1x+0.01x^2$

(31) La utilidad marginal diaria de una empresa está dada por $p'(x)=-2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+900}}$. Si la empresa pierde \$ 130 por día cuando sólo vende 40 unidades por día, determinar la función de la empresa. **Rpta.** $p(x)=\sqrt{x^2+900}-2x-100$

32) El ingreso marginal de una empresa es: $R'(x)=10(20-x)e^{-x/20}$. Determinar las funciones de ingreso y demanda del producto

Rpta. a) $R(x)=200xe^{-x/20}$ b) $p(x)=200e^{-x/20}$

33) El ingreso marginal por un producto está dado por $50-3x-x^2$. Encuentre la función de demanda para el producto (sugerencia: recuerde que $R=xp$, además si $x=0 \Rightarrow R=0$)

Rpta. a) $p(x)=50-\dfrac{3x}{2}-\dfrac{x^2}{3}$

34) Si el ingreso marginal es una constante diferente a cero, demuestre que el precio es constante.

35) Si el ingreso marginal es: $R'(x)=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x}$, determinar las funciones de ingreso y demanda si $R(1)=6$.

36) Si el ingreso marginal es: $R'(x)=20-3x^2$, obtener las funciones de ingreso total y demanda.

37) La función de ingreso marginal para el producto de un fabricante está dada por $\dfrac{dR}{dx}=\dfrac{3}{e^x+2}$, donde R es el ingreso total recibido (en dólares) cuando se produce y vende x unidades. Encuentre la función de demanda.

38) La ganancia marginal por la venta de x cientos de artículos de un producto es: $p'(x)=4-6x+3x^2$. La ganancia cuando ningún artículo se vende es \$ 40. Encuentre la función de ganancia.

39) El ingreso marginal de una empresa es: $R'(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+3600}}$.

a) Encuentre la función de ingreso.

b) Determine la relación de demanda.

(40) Una función de ingreso marginal esta dada por: $R'(x)=8(x+1)^{1/3}$, en donde x es la cantidad vendida. Encuentre la función de ingreso $R(x)$, si $R=100$ cuando $x=7$.

(41) Suponga que las funciones de ingreso marginal y costo total marginal para un manufacturero son: $R'(x)=150-x$, $c'(x)=\frac{x^2}{10}-4x+10$ y el costo total de producir 30 unidades es $ 4 000.

a) ¿Cuáles son los costos fijos de producción?.

b) ¿Porqué $R(0)$ es igual a cero?

c) Exprese la utilidad como una función de la producción x.

(42) La gerencia de la compañía LORIMAR ha determinado que la función de ingreso marginal diario relacionada con la producción y venta de sus relojes de viaje está dada por $R'(x)=-0.009x+12$, donde x denota el número de unidades producidas y vendidas, además $R'(x)$ se mide en dólares por unidad.

a) Determinar la función de ingresos $R(x)$ asociada con la producción y venta de estos relojes.

b) ¿Cuál el la función de demanda que relaciona el precio unitario al mayoreo con la cantidad de relojes de viaje demandados?

(43) Si x unidades son demandadas cuando el precio por unidad es de p dólares, obtenga una ecuación que contenga p y x (la ecuación de demanda) de una mercadería para la cual la función de ingreso marginal está dado por $R'(x)=4+10(x+5)^{-2}$.

(44) La propensión marginal al consumo (en miles de millones de unidades monetarias) es: $\frac{dc}{dx}=0.6+\frac{0.5}{2x^{1/2}}$. Cuando el ingreso es cero, el consumo vale 10 mil millones de U. M. Obtenga la función de consumo. **Rpta.** $c=0.6x+0.5x^{1/2}+10$

(45) La función de ingreso marginal para una artículo particular está definida por $R'(x)=ab(x+b)^{-2}-c$. Determinar:

a) La función de ingreso total.

b) Una ecuación que contenga p y x (la ecuación de demanda), donde x unidades son demandadas cuando el precio por unidad es p dólares.

(46) La propensión marginal al ahorro es $\frac{1}{2}$. Cuando el ingreso es cero, el consumo vale 6 mil millones de U. M. Obtenga la función de consumo. **Rpta.** $c=f(x)=\frac{x}{2}+6$

(47) La corporación de instrumentos de posición CANNON, fabrica un flash electrónico automático con circuitos THYRISTER. La ganancia marginal estimada vinculada con la producción y venta de estos falsees electrónicos es: $-0.004x+20$ dólares por unidad por mes, cuando el nivel de producción es de x unidades mensuales. Los gastos fijos de CANNON por la producción y venta de estos dispositivos asciende a \$ 16 000 por mes. ¿En que nivel de producción logra CANNON la máxima ganancia?. ¿Cuál es la máxima ganancia mensual?.

Rpta. 5 000 unidades ; \$ 34 000

(48) La razón de cambio del precio unitario p (dólares) de la botas para mujer APEX está dado por $p'(x)=\frac{-250x}{(16+x^2)^{3/2}}$, donde x es la cantidad demandada diariamente en unidades de centena. Determinar la función de demanda para estas botas, si dicha cantidad es 300 pares $(x=3)$ cuando el precio unitario es \$ 50 el par.

Rpta. $p(x)=\frac{250}{\sqrt{16+x^2}}$

(49) Una compañía esta considerando un nuevo proceso de fabricación. Si se sabe que la razón de ahorros del proceso $s(t)$, $s'(t)=1000(t+2)$, donde t es el número de años que se ha usado el proceso. Encuentre los ahorros totales durante el primer año. Encuentre los ahorros totales durante los primeros 6 años.

Rpta. \$ 2 500 ; \$ 30 000

CAPÍTULO II

2. INTEGRAL DEFINIDA.-

En este capítulo expondremos la teoría de las sumatorias, que es necesario para el estudio de la integral definida y que en el siguiente capítulo será utilizado en diversas aplicaciones.

2.1 SUMATORIAS.-

A la suma de los n números $a_1, a_2, \dots, a_n$ es decir; $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, representaremos por la notación:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

donde el símbolo $\sum$ se llama signo de sumación y es la letra sigma mayúscula del alfabeto griego.

Generalizando: Consideremos m y n dos números enteros de tal manera que $m \le n$, y f una función definida para cada $i \in Z$ donde $m \le i \le n$, luego la notación $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ nos representa la suma de los términos $f(m), f(m+1), f(m+2), \dots, f(n)$, es decir:

$$\boxed{\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \dots + f(n)}$$

donde i es el índice o variable, m es el límite inferior y n es el límite superior.

Ejemplo.- Sí: $f(i)=\dfrac{i}{i+1}$; entonces $\displaystyle\sum_{i=2}^{6} f(i)=\sum_{i=2}^{6}\frac{i}{i+1}=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}$

Ejemplo.- Sí $f(i)=\cos ix$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i)=\sum_{i=1}^{n}\cos ix=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+...+\cos nx$$

OBSERVACIÓN.- En la sumatoria $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} f(i)$, existen $(n-m+1)$ términos los cuales son $f(m), f(m+1), f(m+2),..., f(m+(n-m))$, en particular, si: $m=1$ y $n\geq 1$; entonces en $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(i)$ existen n términos, es decir:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(i)=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)}$$

2.1.1 PROPIEDADES DE LA SUMATORIA.-

Sean f, g funciones definidas $\forall\, i\in Z$. k constante.

① $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k=kn$

② $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} k=(n-m+1)k$

③ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} kf(i)=k\sum_{i=1}^{n} f(i)$

④ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(f(i)\pm g(i)\right)=\sum_{i=1}^{n} f(i)\pm\sum_{i=1}^{n} g(i)$

⑤ $\displaystyle\sum_{i=a}^{b} f(i)=\sum_{i=a+c}^{b+c} f(i-c)$

⑥ $\displaystyle\sum_{i=a}^{b} f(i)=\sum_{i=a-c}^{b-c} f(i+c)$

⑦ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(f(i)-f(i-1)\right)=f(n)-f(0)$ (1^ra^ Regla Telescópica)

(8) $\sum_{i=k}^{n}\left(f(i)-f(i-1)\right)=f(n)-f(k-1)$ (1ra Regla Telescópica Generalizada)

(9) $\sum_{i=1}^{n}\left(f(i+1)-f(i-1)\right)=f(n+1)+f(n)-f(1)-f(0)$ (2da Regla Telescópica)

(10) $\sum_{i=k}^{n}\left(f(i+1)-f(i-1)\right)=f(n+1)+f(n)-f(k)-f(k-1)$ (2da Regla Telescópica Generalizada)

Ejemplo.

(1) Hallar el valor de: $\sum_{i=1}^{40}(\sqrt{2i+1}-\sqrt{2i-1})$

Solución

Mediante la regla Telescópica se tiene: $f(i)=\sqrt{2i+1} \Rightarrow f(i-1)=\sqrt{2i-1}$

$$\sum_{i=1}^{40}\left(\sqrt{2i+1}-\sqrt{2i-1}\right)=f(40)-f(0)=\sqrt{81}-1=9-1=8$$

(2) Calcular el valor: $\sum_{i=1}^{100}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})$

Solución

Mediante la regla Telescópica se tiene: $f(i)=\frac{1}{i+1} \Rightarrow f(i-1)=\frac{1}{i}$

$$\sum_{i=1}^{100}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})=-\sum_{i=1}^{100}(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i})=-\left(f(100)-f(0)\right)=-(\frac{1}{101}-1)=\frac{100}{101}$$

2.1.2 FÓRMULAS DE LA SUMATORIA.-

① $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ ② $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ④ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

Demostraremos las dos primeras fórmulas, las otras dos dejamos para el lector.

①
$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 \quad \text{sumando}$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$$

en el segundo miembro se tiene n términos $(n+1)$ por lo tanto $2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

otra forma de hacer la demostración es aplicando la regla telescópica.

$$\sum_{i=1}^{n} ((i+1)^2 - i^2) = f(n) - f(0) \text{ , donde: } f(i) = (i+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} [(i+1)^2 - i^2] = (n+1)^2 - 1 \text{ , Simplificando la expresión dentro del corchete se tiene:}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(i^2+2i+1-i^2)=n^2+2n$$

$$2\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}1=n^2+2n \text{ , de donde: } 2\sum_{i+1}^{n}i+n=n^2+2n$$

$$2\sum_{i=1}^{n}i=n^2+n \text{ , entonces: } \sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$$

(2) Para demostrar $\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ aplicamos la regla telescópica.

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^3-i^3]=f(n)-f(0) \text{ , donde: } f(i)=(i+1)^3$$

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^3-i^3]=(n+1)^3-1 \text{ , simplificando la expresión del corchete se tiene:}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(i^3+3i^2+3i+1-i^3)=(n+1)^3-1 \text{ , por propiedad de sumatoria se tiene:}$$

$$3\sum_{i=1}^{n}i^2+3\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}1=(n+1)^3-1 \text{ , reemplazando por su equivalencia}$$

$$3\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{3}{2}n(n+1)+n=(n+1)^3-1 \text{ , transponiendo término}$$

$$3\sum_{i=1}^{n}i^2=(n+1)^3-(n+1)-\frac{3}{2}n(n+1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

Por lo tanto: $\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ Para demostrar $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, use la regla telescópica. Sugerencia.

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^4 - i^4] = f(n) - f(0) \text{ , donde: } f(i) = (i+1)^4$$

④ De igual manera para demostrar.

$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$, usar la regla telescópica, sugerencia.

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^5 - i^5] = f(n) - f(0) \text{ , donde: } f(i) = (i+1)^5$$

Ejemplo.-

① Hallar una fórmula para la sumatoria: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)(i-1)!}$

<u>**Solución**</u>

Multiplicando numerador y denominador por i, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)(i-1)!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)i(i-1)!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1-1}{(i+1)!} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i+1}{(i+1)!} - \frac{1}{(i+1)!}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i!} - \frac{1}{(i+1)!}\right) = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{(i+1)!} - \frac{1}{i!}\right) = -\left(\frac{1}{(n+1)!} - 1\right) = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)(i-1)!} = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}$$

(2) Hallar una fórmula para la sumatoria: $\sum_{i=1}^{n} \ln(i)$

Solución

Aplicando propiedad de logaritmo se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(i) = \ln(1)+\ln(2)+\ln(3)+...+\ln(n) = \ln(1.2.3\ldots n) = \ln(n!)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} \ln(i) = \ln(n!)$$

(3) Hallar una fórmula para la sumatoria: $\sum_{i=1}^{n} \text{sen}(ix)$

Solución

Usando la identidad: $\cos A - \cos B = -2\,\text{sen}(\frac{A+B}{2})\text{sen}(\frac{A-B}{2})$ ... (1)

de donde haciendo la sustitución se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A+B}{2} = ix \\ \frac{A-B}{2} = x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B = 2ix \\ A-B = 2x \end{array}\right\} \text{ resolviendo el sistema se tiene: } \left\{\begin{array}{l} A = (i+1)x \\ B = (i-1)x \end{array}\right. \quad \text{... (2)}$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$\cos(i+1)x - \cos(i-1)x = -2\,\text{sen}\, ix\, \text{sen}\, x$, aplicando sumatoria a ambos miembros:

$$\sum_{i=1}^{n} [\cos(i+1)x - \cos(i-1)x] = -2\,\text{sen}\, x \sum_{i=1}^{n} \text{sen}\, ix$$

y mediante la 2^{da} regla Telescópica se tiene:

$$\cos(n+1)x+\cos(nx)-\cos x-1=-2\operatorname{sen}x\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}(ix)\text{, despejando }\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}(ix)$$

se tiene: $$\therefore\quad \sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}(ix)=\frac{1+\cos x-\cos(nx)-\cos(n+1)x}{2\operatorname{sen}x}$$

④ Hallar una fórmula para la sumatoria: $\sum_{i=1}^{n} i.i!$

Solución

Aplicando la Regla Telescópica se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)!-i!\right]=f(n)-f(0)\text{, donde: } f(i)=(i+1)!$$

Simplificando mediante propiedad del factorial la expresión dentro del corchete.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(i!(i+1)-i!\right)=(n+1)!-1\text{, de donde: }\sum_{i=1}^{n}\left(i.i!+i!-i!\right)=(n+1)!-1$$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{n} i.i!=(n+1)!-1$$

⑤ Hallar una fórmula para la sumatoria: $\sum_{i=1}^{n} 5^i$

Solución

Mediante la Regla Telescópica se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n}(5^{i+1}-5^i)=f(n)-f(0)\text{ , donde: } f(i)=5^{i+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(5.5^i - 5^i) = 5^{n+1} - 5 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 4.5^i = 5(5^n - 1) \qquad \therefore \quad \sum_{i=1}^{n} 5^i = \frac{5(5^n - 1)}{4}$$

(6) Hallar una fórmula para la sumatoria: $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{senh}(9ix)$

Solución

Mediante la segunda regla Telescópica se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\cosh 9(i+1)x - \cosh 9(i-1)x\right] = \cosh 9(n+1)x + \cosh(9nx) - \cosh(9x) - 1$$

$$2\operatorname{senh}(9x)\sum_{i=1}^{n}\operatorname{senh}(9ix) = \cosh 9(n+1)x + \cosh(9nx) - \cosh(9x) - 1$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n}\operatorname{senh}(9ix) = \frac{\cosh 9(n+1)x + \cosh(9nx) - \cosh(9x) - 1}{2\operatorname{senh}(9x)}$$

2.1.3 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Hallar el valor de las siguientes sumatorias.

(1) $\sum_{i=1}^{99} \ln 2^i$ **Rpta.** 4 950 ln 2

(2) $\sum_{i=1}^{100} \ln(\frac{i}{i+2})$ **Rpta.** $\ln(\frac{2}{102})$

(3) $\sum_{i=1}^{20} 3i(i^2+2)$ **Rpta.** 133 560

(4) $\sum_{i=1}^{25} 2i(i-1)$ **Rpta.** 10 400

⑤ $\sum_{i=1}^{100} \text{sen}^{2i}(2x)$ Rpta. $\text{tg}^2(2x)(1-\text{sen}^{200} 2x)$

⑥ $\sum_{i=-2}^{3} 2^i$ Rpta. $\frac{63}{4}$

⑦ $\sum_{i=0}^{25} \frac{2}{2^{i-6}}$ Rpta. $2^7(2-\frac{1}{2^{25}})$

⑧ $\sum_{i=20}^{40} \frac{360}{\sqrt{10}^{2x-32}}$ Rpta. $\frac{7,560}{(\sqrt{10})^{2x/32}}$

⑨ $\sum_{i=14}^{50} (2i^2+i-1)$ Rpta. 85 359

⑩ $\sum_{i=1}^{4} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$ Rpta. $\frac{7}{12}$

II. Hallar la fórmula para cada una de las siguientes sumatorias.

① $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$ Rpta. $2-\frac{2+n}{2^n}$

② $\sum_{i=1}^{n} i2^{i-1}$ Rpta. $(n-1)2^n+1$

③ $\sum_{i=1}^{n} \ln(i+1)$ Rpta. $\ln(n+1)!$

④ $\sum_{i=1}^{m} (\sqrt{2i+1}-\sqrt{2i-1})$ Rpta. $\sqrt{2n+1}-1$

(5) $\sum_{i=1}^{n} \frac{4}{(4i-3)(4i+1)}$ Rpta. $\frac{4n}{4n+1}$

(6) $\sum_{i=1}^{n} ar^{n-1}$ Rpta. $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

(7) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{i+1}-\sqrt{i}}{\sqrt{i^2+i}}$ Rpta. $\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}}$

(8) $\sum_{i=1}^{n} \frac{2^i + i(i+1)}{2^{i+1}(i^2+i)}$ Rpta. $1-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2^{n-1}}$

(9) $\sum_{i=1}^{n} \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2}$ Rpta. $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

(10) $\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2-1}$ Rpta. $\frac{3}{4}-\frac{2n+1}{n(n+1)}$

(11) $\sum_{i=2}^{n} \frac{\ln(1+\frac{1}{i})^i (1+i)}{\ln(i^i)[\ln(1+i)^{1+i}]}$ Rpta. $\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

(12) $\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{3+x})^i$ Rpta. $\frac{\sqrt{3+x}[(3+x)^{n/2}-1]}{\sqrt{3+x}-1}$

(13) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i^2+6i+4}$ Rpta. $\frac{n}{4(n+2)}$

(14) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ Rpta. $\frac{n}{2n+1}$

15) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2$ Rpta. $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

16) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a+i-1)(a+i)}$ Rpta. $\frac{n}{a(n+a)}$

17) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i+1)(3i-2)}$ Rpta. $\frac{n}{3n+1}$

18) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{(2i+1)(2i-1)}$ Rpta. $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

19) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)(i^2+5i+6)}$ Rpta. $\frac{n^2+3n+3}{2(n+2)(n+3)}$

20) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\log_a(2^{2i}).\log_a(2^{2i+2})}$ Rpta. $\frac{1}{(\log_a 2)^2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n+1)})$

21) $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}^{2i}(2x)$ Rpta. $\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{sen}^{2n}(2x))$

22) $\sum_{i=1}^{n} \cos(3ix)$ Rpta. $\frac{\operatorname{sen}(3(n+1)x)+\operatorname{sen}(3nx)-\operatorname{sen}3x}{2\operatorname{sen}x}$

23) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{tgh}(19ix)}{\operatorname{sech}(19ix)}$ Rpta. $\frac{\cosh 19(n+1)+\cosh 19nx-\cosh 19-1}{2\operatorname{senh}(19x)}$

24) $\sum_{i=1}^{n} \frac{e^i-(3\operatorname{sen}a\cos a)^i}{3^i}$ Rpta. $\frac{e[(\frac{e}{3})^n-1]}{e-3}-\frac{\operatorname{sen}2a\left[(\operatorname{sen}a.\cos a)^n-1\right]}{\operatorname{sen}(2a)-2}$

(25) $\sum_{i=1}^{n} \cos^i 2x$ Rpta. $\dfrac{\operatorname{sen}^{n+1}(2x)}{2^{n+1}\operatorname{sen} x}$

(26) $\sum_{i=1}^{n} \cos ix$ Rpta. $\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{2n+1}{n}x)}{2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}$

(27) $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{2^i+3^i}{6^i}$ Rpta. $\dfrac{3}{2}-3^n-2^{n+1}$

(28) $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{i}{(i+1)(i^2+5i+6)}$ Rpta. $\dfrac{n^2+3n+3}{2(n+2)(n+3)}$

(29) $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{i}{(i+x)(i+x+1)(i+x+2)}$ Rpta. $\dfrac{n(2x+n+3)}{2(n+x+1)(n+x+2)(x+2)(x+1)}$

(30) $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{10}{24+10i-25i^2}$ Rpta. $\dfrac{1}{5n+4}+\dfrac{1}{5n-1}-\dfrac{5}{4}$

(31) $\sum_{i=1}^{n} i.2^i$ Rpta. $(n-1)2^{n+1}+2$

(32) $\sum_{i=1}^{n} \cos^{2i} 3x$ Rpta. $c\operatorname{tg}^2 3x(1-\cos^{2n}(3x))$

III. Hallar el valor de n para que:

(1) $\sum_{i=1}^{n} (2+i^2) = \sum_{i=1}^{n} (1+i^4)$

② Demostrar que: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i$, si: $\overline{x}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}$

③ Demostrar que: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\left(x_0+(k-1)x\right)=\frac{\operatorname{sen}(\frac{nx}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}\operatorname{sen}(x_0+\frac{n-1}{2}x)$

④ Demostrar que: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\left[\frac{2k}{1-k^2+k}\right]=\operatorname{arctg}\left(n(n+1)\right)$

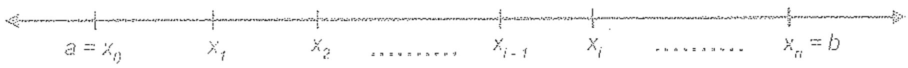
⑤ Demostrar que: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos\left[x+(k-1)y\right]\cos(x+ky)}=\frac{\operatorname{tg}(x+ny)-\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}y}$

2.2 CÁLCULO DEL ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA POR SUMATORIAS.

2.2.1 PARTICIÓN DE UN INTERVALO CERRADO.-

DEFINICIÓN.- Consideremos un intervalo cerrado $[a,b]$ con a < b, una partición del intervalo $[a,b]$ es toda colección de puntos $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\subset[a,b]$ de tal manera que:

$$\boxed{a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{i-1}<x_i<\dots<x_n=b}$$



OBSERVACIÓN.-

① Toda partición P de $[a,b]$ divide al intervalo $[a,b]$ en sub-intervalos $[x_{i-1},x_i]$, para $i=1,2,3,\dots,n$

2. A la longitud de cada sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ denotaremos $\Delta_i x = x_1 - x_{i-1}$ donde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ y se cumple $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a$

3. Cuando las longitudes de cada sub-intervalo tiene la misma medida, se expresa en la forma $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y en este caso se dice que la partición es regular donde los extremos de cada sub-intervalo es:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, \quad x_i = a + i\Delta x, \quad \forall \ i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

4. Al número $|P| = \max\{x_i - x_{i-1} \ / \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ le llamaremos norma o diámetro de la partición P y que es la mayor de las longitudes $\Delta_i x$.

Ejemplo.- Dado el intervalo [0,3] y la partición $P = \left\{0, \frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, \frac{9}{2}, 5\right\}$

Calculando las longitudes $\Delta_i x$, es decir:

$$\Delta_1 x = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \quad , \quad \Delta_2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Delta_3 x = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \quad , \quad \Delta_4 x = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta_5 x = 3 - 2 = 1 \quad , \quad \Delta_6 x = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

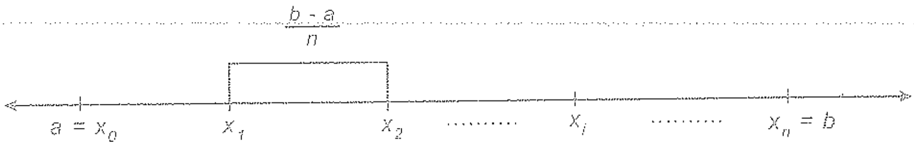
$$\Delta_7 x = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$$

Luego se encuentra que la norma de la partición P es $|P| = \frac{3}{2}$

Ejemplo.- Dado el intervalo $[a,b]$ con $a < b$, y la partición regular

$$P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}, \text{ donde: } x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \ x_0 = a, \quad x_n = b, \text{ entonces : } \Delta_i x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

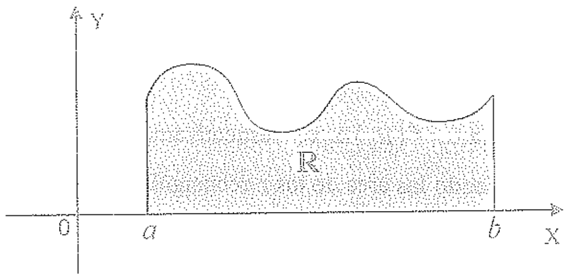


y la norma de la partición P es $|P|=\dfrac{b-a}{n}$

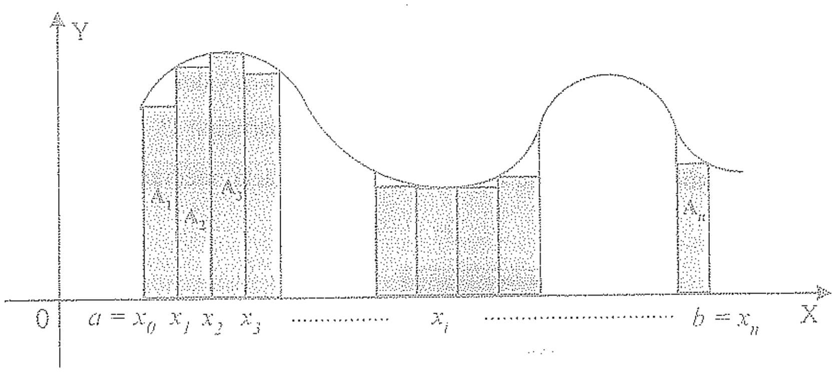
2.3. APROXIMACIÓN DEL ÁREA DE UNA REGIÓN POR ÁREAS DE RECTÁNGULOS.-

Sea: f: $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, una función continua y positiva $\left(f(x) \geq 0\right)$ en $[a,b]$, sea R la región plana limitada por la gráfica de la curva $y = f(x)$, por el eje X y las rectas $x = a$, $x = b$.

(llamada región bajo la gráfica f de $\underline{a}$ hasta $\underline{b}$)



Una aproximación por defecto, se puede hallar el área usando una serie de rectángulo inscritos, es decir:



Como f es una función continua en $[a,b]$ podemos elegir una colección de puntos $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ en los n rectángulos de la partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ tales que:

$f(\mu_1)$ es el valor mínimo de f en $[x_0, x_1]$

$f(\mu_2)$ es el valor mínimo de f en $[x_1, x_2]$

$f(\mu_3)$ es el valor mínimo de f en $[x_2, x_3]$

.
.
.

$f(\mu_n)$ es el valor mínimo de f en $[x_{n-1}, x_n]$

Luego los n rectángulos construidos cuyas bases son los sub-intervalos de la partición P y cuyas alturas son $f(\mu_1), f(\mu_2), ..., f(\mu_n)$ respectivamente.

Las áreas de estos rectángulos son:

$f(\mu_1)\Delta_1 x, f(\mu_2)\Delta_2 x, ..., f(\mu_n)\Delta_n x$, respectivamente aproximamos por defecto el valor del área A sumando las área de los n rectángulos inscritos.

$$A \geq A_1 + A_2 + ... + A_n = f(\mu_1)\Delta_1 x + ... + f(\mu_n)\Delta_n x$$

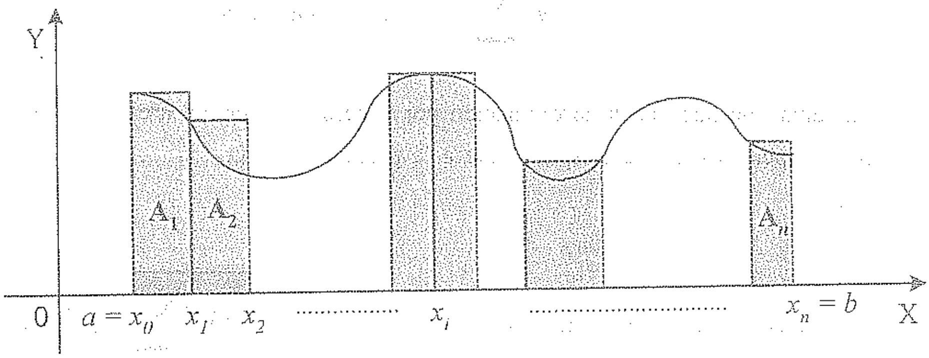
$$\boxed{A \geq \sum_{i=1}^{n} f(\mu_i)\Delta_i x}$$

a la suma que nos dio la aproximación por defecto el valor del área A se denomina suma inferior de la función f correspondiente a la partición P del intervalo $[a,b]$, ahora calcularemos el área de la región R en forma exacta, mediante un proceso de límite, es decir:

$$\boxed{A \geq \sum_{i=1}^{n} f(\mu_i)\Delta_i x} \quad \text{aproximación por defecto}$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\mu_i)\Delta_i x \text{, valor exacto}$$

En forma similar se puede aproximar el área por exceso, usando también una serie de rectángulos circunscritos.



Como f es una función continua en $[a,b]$, podemos elegir una colección de puntos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en los n rectángulos de la partición $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tal que:

$f(v_1)$ es el valor máximo de f en $[x_0, x_1]$

$f(v_2)$ es el valor máximo de f en $[x_1, x_2]$

.

.

.

$f(v_n)$ es el valor máximo de f en $[x_{n-1}, x_n]$

Luego en los n rectángulos construidos cuyas bases son los sub-intervalos de la partición P y cuyas alturas son $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ respectivamente y las áreas de estos rectángulos son $f(v_1)\Delta_1 x, f(v_2)\Delta_2 x, \ldots, f(v_n)\Delta_n x$ respectivamente aproximaremos por exceso el valor del área A, sumando las áreas de los rectángulos circunscritos.

$A \le A_1 + A_2 + \ldots + A_n$

$A \leq f(v_1)\Delta_1 x + f(v_2)\Delta_2 x + ... + f(v_n)\Delta_n x$

$$\boxed{A \leq \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_i x}\ , \text{ aproximación por exceso}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_i x\ , \text{ valor exacto}$$

a la suma que nos dio la aproximación por exceso el valor del área A se denomina, sumas superiores de f correspondiente a la partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ del intervalo $[a,b]$.

A la sumas inferiores de f denotaremos por: $\boxed{L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} f(\mu_i)\Delta_i x}$

y a las sumas superiores de f denotaremos por: $\boxed{U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_i x}$

Luego $L(P,f) \leq \text{A} \leq U(P,f)$, por lo tanto para el cálculo de las áreas mediante rectángulos inscritos y circunscritos se tiene:

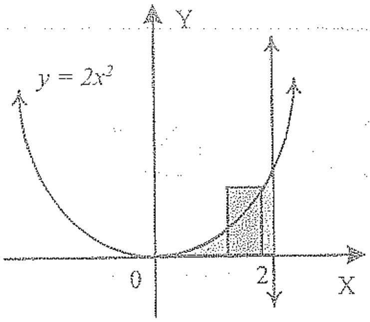
$$\boxed{A(R) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x}$$

donde: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y $c_i = a + i\Delta x$

Ejemplos de Aplicación.-

1. Hallar el área de la región acotada por $y = 2x^2$, el eje X, y la recta $x = 2$.

<u>**Solución**</u>



$$y = f(x) = 2x^2 \ , \ x \in [0,2]$$

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n} \ \Rightarrow \ \Delta x = \frac{2}{n}$$

además: $c_i = a + i\Delta x$

$$c_i = 0 + \frac{2i}{n} = \frac{2i}{n}$$

Como $f(x) = 2x^2 \ \Rightarrow \ f(c_i) = f(\frac{2i}{n}) = \frac{8i^2}{n^2}$

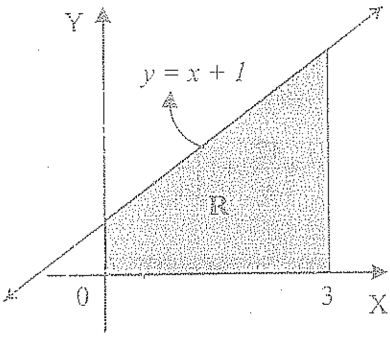
Luego: $A(R) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^2}.\frac{2}{n}$

$$= 16 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = 16 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{8}{3} \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) = \frac{16}{3} \qquad \therefore \quad A(R) = \frac{16}{3}u^2$$

(2) Hallar el área de la región R acotada por la gráfica de $y = x+1$ al eje X y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

Solución



$$y = f(x) = x+1 \ , \ x \in [0,3]$$

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n} \ \Rightarrow \ \Delta x = \frac{3}{n}$$

además $c_i = a + i\Delta x$

$$c_i = 0 + \frac{3i}{n} \ \Rightarrow \ c_i = \frac{3i}{n}$$

Como $f(x)=x+1 \Rightarrow f(c_i)=f(\frac{3i}{n})=\frac{3i}{n}+1$

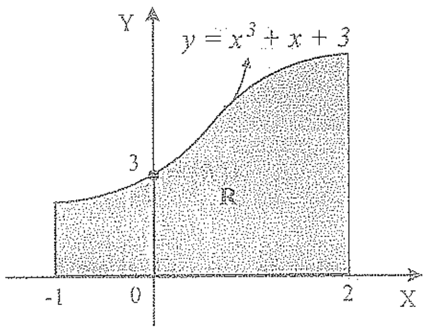
Luego $A(R)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{3i}{n}+1)\frac{3}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{9i}{n^2}+\frac{3}{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9(n+1)}{2n}+3\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+3\right]=\frac{9}{2}+3=\frac{15}{2}u^2$$

$$\therefore\ A(R)=\frac{15}{2}u^2$$

(3) Hallar el área de la región R limitada por la gráfica de la curva $y=x^3+x+3$, el eje X y las rectas verticales $x=-1$, $x=2$.

Solución



$y=f(x)=x^3+x+3$, $x\in[-1,2]$

$\Delta x=\frac{2-(-1)}{n}=\frac{3}{n} \Rightarrow \Delta x=\frac{3}{n}$

$c_i=a+i\Delta x=-1+\frac{3i}{n}$

Como $f(x)=x^3+x+3$, entonces $f(c_i)=(-1+\frac{3i}{n})^3+(-1+\frac{3i}{n})+3$

$$f(c_i)=\frac{27}{n^2}i^3-\frac{27}{n^2}i^2+\frac{12}{n}i+1$$

$$A(R)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{27}{n^3}i^3-\frac{27}{n^2}i^2+\frac{12}{n}i+1\right]\frac{3}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left[\frac{27}{n^3}\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{27}{n^2}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{12}{n}.\frac{n(n+1)}{2}+n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[\frac{27}{n}\cdot\frac{(n+1)^2}{4} - \frac{9}{2}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n} + 6(n+1) + n\right]$$

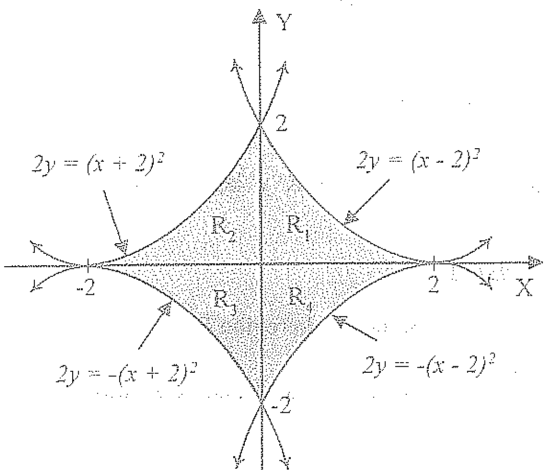
$$= \lim_{n\to\infty} 3\left[\frac{27}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + 6\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1\right]$$

$$= 3\left[\frac{27}{4}(1+0)^2 - \frac{9}{2}(1+0)(2+0) + 6(1+0) + 1\right] = 3\left[\frac{27}{4} - 9 + 6 + 1\right] = \frac{3(19)}{4} = \frac{57}{4}u^2$$

$$\therefore \quad A(R) = \frac{57}{4}u^2$$

(4) Dado la región R acotada por las curvas $2y=(x-2)^2$, $2y=(x+2)^2$, $2y=-(x-2)^2$, $2y=-(x+2)^2$, calcular su área.

Solución



Graficaremos la región R.

En la gráfica se observa que existe simetría con respecto a los ejes, y al origen de coordenadas, entonces es suficiente encontrar el área de la región R_1 y multiplicarlo por cuatro es decir:

$$A(R) = 4A(R_1) = 4\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x,$$

donde:

$$y = f(x) = \frac{(x-2)^2}{2}, \quad x \in [0,2] \quad \text{y} \quad \Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}, \text{ además}$$

$$c_i = a + i\Delta x = 0 + \frac{2i}{n} \quad \Rightarrow \quad c_i = \frac{2i}{n}$$

$$f(x)=\frac{(x-2)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad f(c_i)=f(\frac{2i}{n})=\frac{1}{2}(\frac{2i}{n}-2)^2$$

$$f(c_i)=\frac{1}{2}\left[\frac{4i^2}{n^2}-8\frac{i}{n}+4\right]=2\left[\frac{i^2}{n^2}-2\frac{i}{n}+1\right]$$

$$A(R)=4\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x=4\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\left[\frac{i^2}{n^2}-\frac{2i}{n}+1\right]\frac{2}{n}$$

$$=16\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{2}{n^2}.\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{n}\right]$$

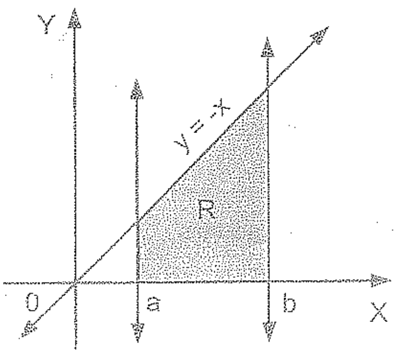
$$=16\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})-(1+\frac{1}{n})+1\right]$$

$$=16\left[\frac{1}{6}(1+0)(2+0)-(1+0)+1\right]=16\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{3}u^2$$

$$\therefore \quad A(R)=\frac{16}{3}u^2$$

(5) Dada la región R acotada por la recta y = mx, eje X y las rectas x = a, x = b, b > a > 0, Hallar su área de R.

Solución



Ubiquemos la región R

Como: $y = f(x) = mx,\ x \in [a,b]$

Entonces $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$

$$c_i=a+\frac{b-a}{n}i$$

$$f(c_i)=ma+\frac{m(b-a)}{n}i$$

$A(R) = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$, ahora reemplazamos por sus valores correspondientes.

$$A(R) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[ma + \frac{m}{n}(b-a)i \right] \frac{b-a}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{m(b-a)}{n} \left[an + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

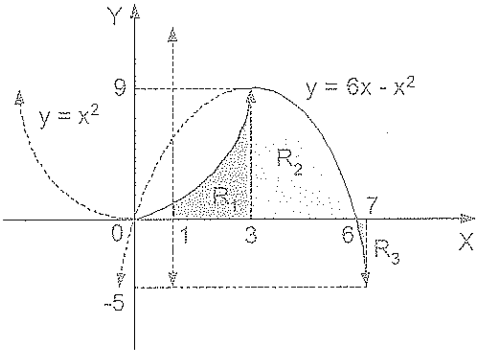
$$= \lim_{n \to \infty} m(b-a) \left[a + \frac{b-a}{2}(1 + \frac{1}{n}) \right] = m(b-a) \left[a + \frac{b-a}{2} \right]$$

$$= m(b-a) \left[\frac{a+b}{2} \right] = m \frac{a^2 - b^2}{2}$$

$$\therefore \quad A(R) = \frac{m}{2}(b^2 - a^2)$$

(6) Dada la región R acotada por la curva, $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 3 \\ 6x - x^2 , & x > 3 \end{cases}$ el eje X y las rectas $x = 1$, $x = 7$, calcular su área.

Solución



Haremos la grafica de la curva f(x)

Si: $x \leq 3 \Rightarrow y = x^2$

Si: $x > 3 \Rightarrow y = 6x - x^2$

El área de la región acotada lo calcularemos en tres partes.

Calculamos el área de la región R_1

$A(R_1) = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$, donde $f(x) = x^2$, $x \in [1,3]$

$$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}, \quad c_i = a + i\Delta x = 1 + \frac{2i}{n}$$

$$f(c_i) = f(1+\frac{2i}{n}) = (1+\frac{2i}{n})^2 = 1 + \frac{4}{n}i + \frac{4}{n^2}i^2$$

$$A(R_1) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{4}{n}i+\frac{4}{n^2}i^2)\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{8}{n^2}i+\sum_{i=1}^{n}\frac{8}{n^3}i^2]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n}{n}+\frac{8}{n^2}.\frac{n(n+1)}{2}+\frac{8}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[2+4(1+\frac{1}{n})+\frac{4}{3}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})\right] = 2+4+\frac{8}{3} = \frac{26}{3}$$

$$\therefore \quad A(R_1) = \frac{26}{3}u^2$$

Calculamos el área de la región R_2

$$A(R_2) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x, \text{ donde } f(x) = 6x - x^2, \ x \in [3,6]$$

$$\Delta x = \frac{6-3}{n} = \frac{3}{n}, \quad c_i = a + i\Delta x = 3 + \frac{3i}{n}$$

$f(c_i) = 6(3+\frac{3i}{n}) - (3+\frac{3i}{n})^2 = 9 + \frac{9}{n^2}i^2$, entonces se tiene:

$$A(R_2) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(9-\frac{9}{n^2}i)\frac{3}{n} = 27\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n}-\frac{i^2}{n^3})] = 27\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^3}i^2]$$

$$= 27\lim_{n\to\infty}[1-\frac{1}{3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}] = 27\lim_{n\to\infty}[1-\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})]$$

$$= 27(1-\frac{1}{6}(2)) = 27(1-\frac{1}{3}) = \frac{54}{3} = 18 \qquad \therefore \quad A(R_2) = 18\,u^2$$

Para calcular el área de la región R_3 se observa que la región se encuentra debajo del eje X, en este caso se toma el valor absoluto.

$$A(R_3) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \quad \text{donde} \quad f(x) = 6x - x^2,\ x \in [6,7]$$

$$\Delta x = \frac{7-6}{n} = \frac{1}{n}, \quad c_i = a + i\Delta x = 6 + \frac{i}{n}$$

$$f(c_i) = 6(6+\frac{i}{n}) - (6+\frac{i}{n})^2 = -\frac{6i}{n} - \frac{i^2}{n^2}, \text{ reemplazando se tiene:}$$

$$A(R_3) = \left| \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(-\frac{6i}{n} - \frac{i^2}{n^2})\frac{1}{n} \right| = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{6i}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^3}i^2\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{6}{n^2}.\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[3(1+\frac{1}{n}) + \frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})\right]$$

$$A(R_3) = 3(1+0) + \frac{1}{6}(1+0)(2+0) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \qquad \therefore \quad A(R_3) = \frac{10}{3}u^2$$

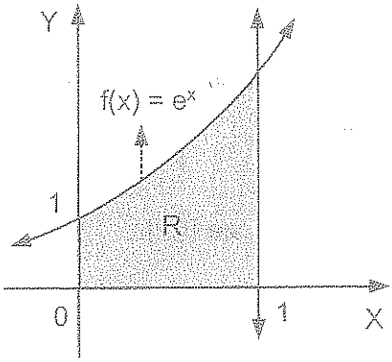
$$\text{Como} \quad A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) = 18 + \frac{26}{3} + \frac{10}{3} = 18 + 12 = 30$$

$$\therefore \quad A(R) = 30\ u^2$$

(7) Calcular el área de la región R limitada por las gráficas $y = e^x$, x = 0, x = 1 y el eje X

<u>Solución</u>

Graficando la región R, sea:



$f(x)=e^x$, $x\in[0,1]$

Donde: $\Delta x=\dfrac{1-0}{n}=\dfrac{1}{n}$

$c_i=a+i\Delta x=0+\dfrac{i}{n}=\dfrac{i}{n}$

$f(c_i)=e^{\frac{i}{n}}$

Entonces el área de la región R es:

$$A(R)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}.\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}} \qquad \ldots (1)$$

Calculando la suma $\sum\limits_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}$ aplicando la regla Telescópica

$$\sum_{i=1}^{n}[(e^{\frac{1}{n}})^{i}-(e^{\frac{1}{n}})^{i-1}]=f(n)-f(0)$$

$$\sum_{i=1}^{n}[e^{\frac{i}{n}}-e^{\frac{i}{n}}.e^{-\frac{1}{n}}]=(e^{\frac{1}{n}})^{n}-1$$

$$\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}\left(\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{e^{\frac{1}{n}}}\right)=e-1\text{, de donde }\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}=\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{e^{\frac{1}{n}}-1} \qquad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$A(R)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{e^{\frac{1}{n}}-1}=(e-1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1}\right)$$

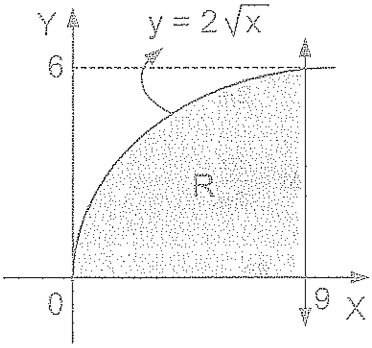
Sea: $z=\dfrac{1}{n}$ de donde: $n \to \infty$, $z \to 0$

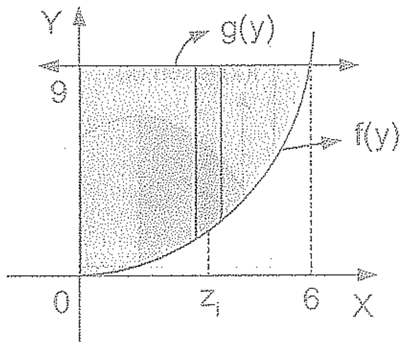
$$A(R)=(e-1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{ze^{z}}{e^{z}-1}=(e-1)\lim_{n\to\infty}e^{z}.\lim_{n\to\infty}\frac{z}{z^{2}-1}$$

$$=(e-1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{z}}=(e-1)u^{2} \qquad \therefore \quad A(R)=(e-1)u^{2}$$

(8) Calcular el área de la región R acotada por las graficas $y=2\sqrt{x}$, eje X y $x=0$, $x=9$

Solución





En este caso, por comodidad tenemos como variable independiente a la variable y, es decir: $f(y)=\dfrac{y^2}{4}$ pero la región está limitada entre las curvas $f(y)=\dfrac{y^2}{4}$, g(y) = 9 y las rectas y = 0, y = 6.

El área del i-esimo rectángulo está dado por $[g(z_i)-f(z_i)]\Delta y$, por lo tanto el área de la región R está dado por:

$$A(R)=\lim_{n\to\infty}\Delta y\sum_{i=1}^{n}[(g(z_i)-f(z_i)], \text{ donde } \Delta y=\frac{6-0}{n}=\frac{6}{n} \text{ y } z_i=0+i\Delta y=\frac{6i}{n}$$

Como $g(z_i)-f(z_i)=9-\dfrac{9}{n^2}i^2$ se tiene:

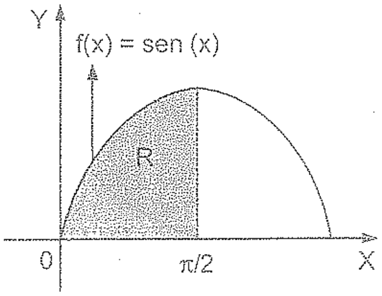
$$A(R)=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}(9-\frac{9}{n^2}i^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}\left[9n-\frac{9}{n^2}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}6\left[9-\frac{3}{2}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})\right]=6\left[9-\frac{3}{2}(2)\right]=36\ u^2$$

$$\therefore\quad A(R)=36\ u^2$$

(9) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de f(x) = sen (x), en $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Solución



$$\Delta x=\frac{\frac{\pi}{2}-0}{n}=\frac{\pi}{2n}$$

$$c_i=a+i\Delta x=\frac{\pi i}{2n}$$

$$f(c_i)=sen\frac{\pi i}{2n}$$

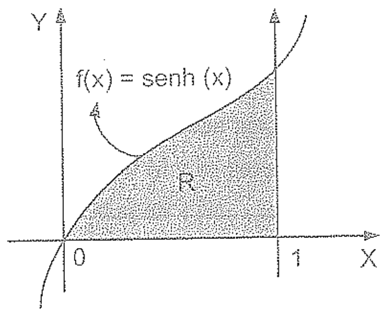
$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}sen\frac{\pi i}{2n}.\frac{\pi}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}sen\frac{\pi i}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left[\frac{1+\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{n\pi}{2n}-\cos(n+1)\frac{\pi}{2n}}{2sen\frac{\pi}{2n}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{\pi}{2}-\cos(1+\frac{1}{n})\frac{\pi}{2}}{\frac{2sen\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}}=\frac{1+1-0-0}{2(1)}=\frac{2}{2}=1 \qquad \therefore\quad A(R)=1\ u^2$$

(10) Calcular el área de la región bajo la curva f(x) = senh (x), en [0,1]

Solución



$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$c_i = a + i\Delta x = \frac{i}{n}$$

f(x) = senh (x), entonces:

$$f(c_i) = senh(\frac{i}{n})$$

$$A(R) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} senh(\frac{i}{n}).\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\cosh(n+1)\frac{1}{n} + \cosh(n.\frac{1}{n}) - \cosh\frac{1}{n} - 1}{2senh\frac{1}{n}}\right]\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cosh(1+\frac{1}{n}) + \cosh 1 - \cosh\frac{1}{n} - 1}{2\frac{senh\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} = \frac{2\cosh 1 - 2}{2} = (\cosh 1 - 1)u^2$$

2.4. SUMAS SUPERIORES Y SUMAS INFERIORES.-

DEFINICIÓN.- Si $P_1 = \{x_i / i = 0,1,...,n\}$ son dos particiones de [a,b] tal que $P_1 \subset P_2$, o sea que cada punto de división de x_i de P_1 es también un punto de P_2 entonces a la partición P_2 se le llama un refinamiento de la partición P_1 entonces $\| P_2 \| \le \| P_1 \|$.

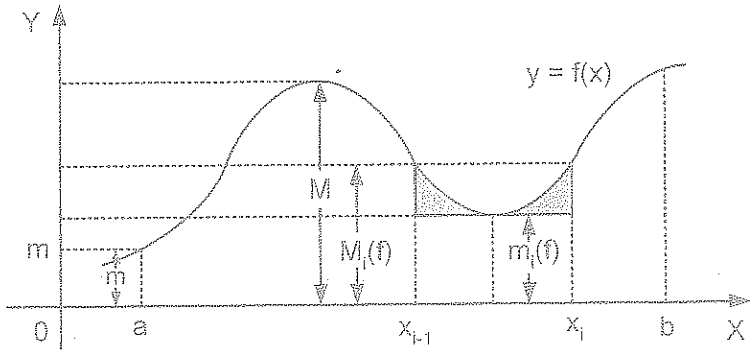
Ejemplo.- En el intervalo [1,7] la partición:

$$P_2 = \{1, 1.5, 2.2, 3, 3.5, 3.8, 4.2, 4.7, 5, 5.5, 5.9, 6, 6.5, 7\}$$

es un refinamiento de $P_1 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ puesto que $P_1 \subset P_2$ además $\| P_1 \| = 1.2$, $\| P_2 \| = 0.8$

DEFINICION.- Si f: [a,b] $\to \mathbb{R}$, es una función acotada sobre el intervalo [a,b], es decir, que existen números m y M tales que $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a,b]$ entonces dada una partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de [a,b]

Se define el número $m_i f = \inf\{f(x) / x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,2,...,n\}$ denominado ínfimo (o mayor cota inferior) de los valores de la función f para el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y $M_i f = \sup\{f(x) / x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ se denomina el supremo (o menor cota superior) de los valores de la función sobre el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.



Ejemplo.- Dada la función $f(x) = x^3 - 1$, $x \in [1,3]$ y la partición $P = \left\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$ entonces:

$$M_1(f) = \sup\{f(x) / x \in [x_0, x_1]\} = \sup\left\{x^3 - 1 / x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]\right\} = \sup\left[0, \frac{19}{8}\right] = \frac{19}{8}$$

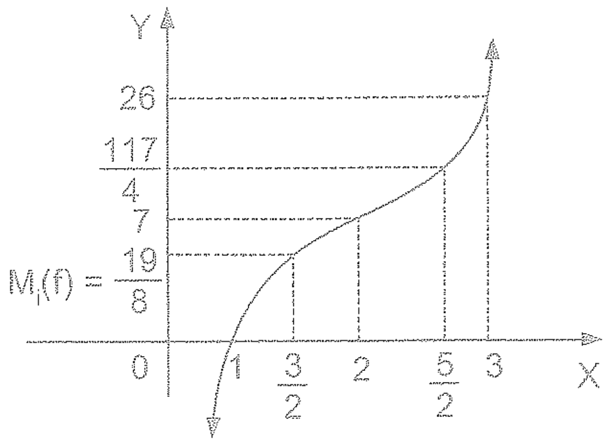
$$m_1(f) = \inf\{f(x) / x \in [x_0, x_1]\} = \inf\left\{x^3 - 1 / x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]\right\} = \inf\left[0, \frac{19}{8}\right] = 0$$

$$M_2(f)=\sup\left\{x^3-1 / x\in\left[\frac{3}{2},2\right]\right\}=\sup\left[\frac{19}{8},7\right]=7$$

$$m_2(f)=\inf\left\{x^3-1 / x\in\left[\frac{3}{2},2\right]\right\}=\inf\left[\frac{19}{8},7\right]=\frac{19}{8}$$

$$M_3(f)=\sup\left\{x^3-1 / x\in\left[2,\frac{5}{2}\right]\right\}=\sup\left[7,\frac{117}{8}\right]=\frac{117}{8}$$

$$m_3(f)=\inf\left\{x^3-1 / x\in\left[2,\frac{5}{2}\right]\right\}=\inf\left[7,\frac{117}{8}\right]=7$$



DEFINICION.- Dada la función f acotada sobre [a,b], entonces existen $M_i(f)$ y $m_i(f)$ para cada i = 1,2,…,n tal es que $m\le m_i(f)\le M_i(f)\le M$, correspondiente a la partición P del intervalo [a,b] al número.

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(f)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}M_i(f)\Delta_i x$$

Y a la suma inferior de f correspondiente a la partición P de [a,b] al número.

$$\boxed{L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i(f)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}m_i(f)\Delta_i x}$$

A ambas sumas se les denomina "Suma de RIEMANN".

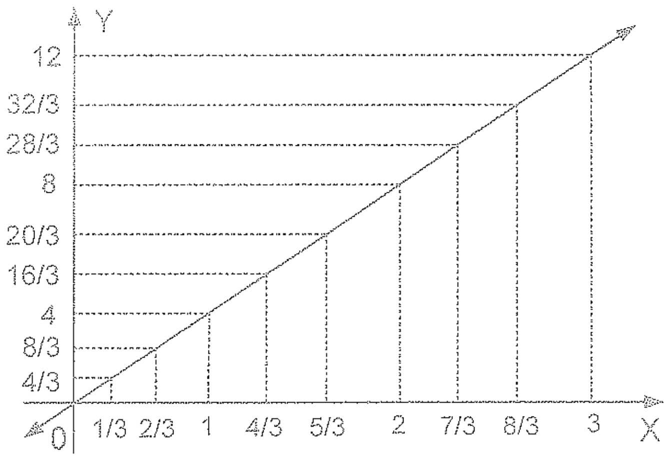
Ejemplo.- Sea $f(x) = 4x$, $x \in [0,3]$ y $\Delta = 9$ intervalo. Calcular la suma superior y la suma inferior.

Solución

$\Delta x = \frac{b-a}{9} = \frac{3-0}{9} = \frac{1}{3}$ la longitud de cada sub-intervalo.

$$[0,3] = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right] \cup \left[1,\frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3},2\right] \cup \left[2,\frac{7}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right] \cup \left[\frac{8}{3},3\right]$$

La función $f(x) = 4x$ es creciente en $[0,3]$



Calculando la suma superior de f en $[0,3]$

x_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	3
$M_i(f) = f(x_i)$	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	4	$\frac{16}{3}$	$\frac{20}{3}$	8	$\frac{28}{3}$	$\frac{32}{3}$	12

$$U(f,P) = \sum_{i=0}^{8} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{8} M_i(f)\Delta x$$

$$= \left[M_0(f) + M_1(f) + M_2(f) + M_3(f) + M_4(f) + M_5(f) + M_6(f) + M_7(f) + M_8(f)\right]\Delta x$$

$$=\left[\frac{4}{3}+\frac{8}{3}+4+\frac{16}{3}+\frac{20}{3}+8+\frac{28}{3}+\frac{32}{3}+12\right]\frac{1}{3}=\left(15+\frac{108}{3}\right)\frac{1}{3}=\frac{45+108}{3}=\frac{153}{3}=51$$

Calculando la suma inferior de f en $[\,0,3\,]$

x_{i-1}	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$
$M_i(f)=f(x_i)$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	4	$\frac{16}{3}$	$\frac{20}{3}$	8	$\frac{28}{3}$	$\frac{32}{3}$

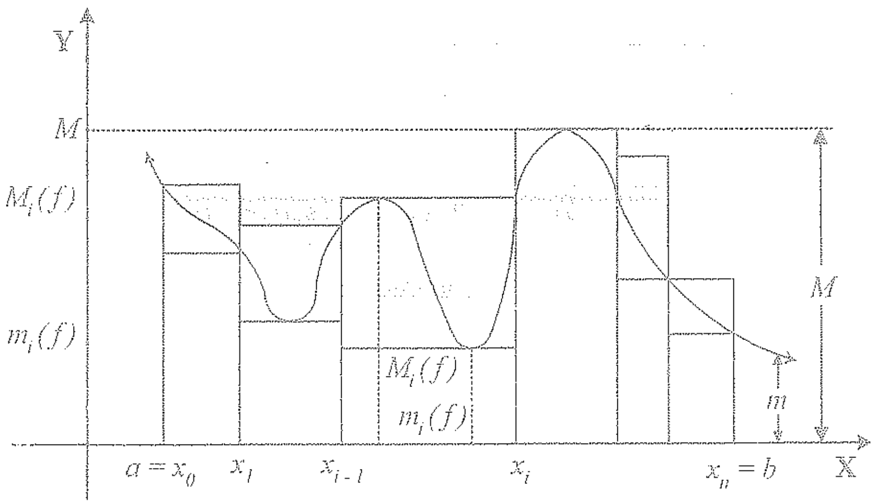
$$L(f,P)=\sum_{i=0}^{8} m_i(f)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=0}^{\infty} m_i(f)\Delta x$$

$$=\left[m_0(f)+m_1(f)+m_2(f)+m_3(f)+m_4(f)+m_5(f)+m_6(f)+m_7(f)+m_8(f)\right]\Delta x$$

$$=\left[0+\frac{4}{3}+\frac{8}{3}+4+\frac{16}{3}+\frac{20}{3}+8+\frac{28}{3}+\frac{32}{3}\right]\frac{1}{3}=\frac{48}{3}=16$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.-

Si $f(x)$ es una función positiva $(f(x)\geq 0)$, las sumas de RIEMANN tienen una interpretación muy sencilla consideremos el siguiente gráfico.



Sabemos que la suma superior: $U(f,P)=\sum_{i=0}^{n} M_i(f)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x$

nos representa la suma de las áreas de los rectángulos por exceso sobre cada sub-intervalo $[x_{i-1},x_i]$ y de altura $M_i(f)$ y la suma inferior.

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x$$

representa las áreas de los rectángulos por defecto sobre el sub-intervalo $[x_{i-1},x_i]$ y la altura $m_i(f)$.

OBSERVACIÓN.- Cuando la función *f* es creciente, los valores mínimos $m_i(f)$ se toma el extremo izquierdo x_{i-1} y los valores máximos $M_i(f)$ se toma en el extremo derecho x_i del subintervalo $[x_{i-1},x_i]$.

2.5 PROPIEDADES DE LAS SUMAS SUPERIORES E INFERIORES.-

Si *f* es una función acotada sobre $[a,b]$, entonces existen *m* y *M* tales que:

$$\boxed{m=\inf\{f(x)/x\in[a,b]\} \quad y \quad M=\sup\{f(x)/x\in[a,b]\}}$$

1° Si *f* es una función acotada sobre $[a,b]$ y $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ es una partición de $[a,b]$ entonces se tiene:

$$\boxed{m(b-a)\le L(f,P)\le U(f,P)\le M(b-a)}$$

Demostración

Para los números m, $m_i(f)$, $M_i(f)$ y *M* se tiene la desigualdad.

$$m\le m_i(f)\le M_i(f)\le M \qquad \ldots (1)$$

a la desigualdad (1) multiplicamos por $\Delta_i x$, es decir:

$$m\Delta_i x \leq m_i(f)\Delta_i x \leq M_i(f)\Delta_i x \leq M\Delta_i x$$

ahora tomamos la suma para i = 1,2,...,n

$$\sum_{i=1}^{n} m\Delta_i x \leq \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta_i x \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta_i x \leq \sum_{i=1}^{n} M\Delta_i x$$

$$m\sum_{i=1}^{n}\Delta_i x \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M\sum_{i=1}^{n}\Delta_i x$$

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M(b-a), \quad \text{donde} \quad \sum_{i=1}^{n}\Delta_i x = b-a$$

2° Si f es una función acotada en $[a,b]$ y P_1, P_2 son dos particiones de $[a,b]$ tal que P_2 es un refinamiento de P_1 $(P_1 \subset P_2)$ entonces se tiene:

$$\boxed{L(f,P_1) \leq L(f,P_2) \;\; y \;\; U(f,P_1) \geq U(f,P_2)}$$

3° Sea f es una función acotada en $[a,b]$, P_1, P_2 dos particiones arbitrarias de $[a,b]$ entonces se tiene: $\boxed{L(f,P_1) \leq U(f,P_2)}$

2.6 INTEGRAL DEFINIDA.-

Sea D el conjunto de todas las particiones posibles P del intervalo $[a,b]$. Si f es una función acotada sobre $[a,b]$ entonces existen números m y M tal que:

$$m \leq f(x) \leq M, \;\; \forall x \in [a,b]$$

Se sabe que la siguiente desigualdad se cumple

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M(b-a)$$

para toda partición P en D, esto asegura que el conjunto numérico $\{L(f,P)/P\in D\}$ es acotado superiormente y el conjunto $\{U(f,P)/P\in D\}$ es acotado inferiormente, luego el conjunto $\{L(f,P)/P\in D\}$ tiene un supremo (la mayor cota inferior) y $\{U(f,P)/P\in D\}$ tiene un ínfimo (mínima cota superior) con estos valores supremo e ínfimo daremos la definición siguiente:

DEFINICIÓN.- Si f es una función acotada en $[a,b]$, al número sup $\{L(f,P)/P\in D\}$ se llama integral inferior de f en $[a,b]$ y se indica.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{L(f,P)/P\in D\} = \text{integral inferior de } f \text{ desde } a \text{ hasta } b.$$

Al número inferior $\{U(f,P)/P\in D\}$ se llama integral superior de f en $[a,b]$ y se indica.

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{U(f,P)/P\in D\} = \text{integral superior de } f \text{ desde } a \text{ hasta } b.$$

2.6.1 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES SUPERIORES E INFERIORES.-

① Si f es una función acotada en $[a,b]$, entonces:

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx}$$

② Si f es una función acotada en $[a,b]$ entonces:

$$\boxed{m(b-a)\le L(f,P)\le U(f,P)\le M(b-a)}$$

donde $m=\inf\{f(x)/x\in[a,b]\}$ y $M=\sup\{f(x)/x\in[a,b]\}$

③ Si f es una función acotada en $[a,b]$ existen puntos $c_1, c_2\in[a,b]$ tales que:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = f(c_1)(b-a) \quad \text{y} \quad \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx = f(c_2)(b-a)$$

④ Si f es una función acotada en $[a,b]$ y c $\in \langle a,b \rangle$ entonces:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \int_{\underline{a}}^{c} f(x)\,dx + \int_{\underline{c}}^{b} f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx = \int_{a}^{\overline{c}} f(x)\,dx + \int_{c}^{\overline{b}} f(x)\,dx$$

2.6.2 INTEGRAL DE RIEMANN.-

DEFINICIÓN.- Una función f se dice que es integrable en $[a,b]$. Si f es una función acotada en $[a,b]$ y si $\int_{\underline{a}}^{\overline{b}} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$, a este valor común se le llama "La integral definida" (De RIEMANN) y se denota así:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx$$

por simplicidad se llama integral definida de f sobre $[a,b]$ ó integral definida de f sobre $[a,b]$ ó integral de f de "a" hasta "b".

OBSERVACIÓN.-

① El número $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ se llama integral definida de $f(x)$ desde "a" hasta "b".

② El símbolo $\int$ es llamado símbolo de integración (éste símbolo fue introducido por Lebnitz).

③ La función $f(x)$ se llama integrante.

④ "a" se llama el límite superior de integración.

⑤ "b" se llama el límite superior de integración.

(6) La variable x que aparece en $\int_a^b f(x)\,dx$, no tiene significado especial es:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(u)\,du$$

EXISTENCIA DE FUNCIONES INTEGRABLES.

Se conoce que las funciones decrecientes y crecientes son integrables, ahora veremos que las funciones continuas sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ son también integrables en $[a,b]$.

i) Si f es una función continua sobre $[a,b]$ entonces f es integrable sobre $[a,b]$.

ii) Si f es continua sobre $[a,b]$, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon}$$

para toda partición P con $|P| < \delta$ y para toda elección de $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$

iii) Si f es continua en $[a,b]$, entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})(x_i - x_{i-1})}$$

donde $\overline{x_i}$ es un punto arbitrario en $[x_{i-1}, x_i]$ para toda partición P de $[a,b]$ y puede elegirse los $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$ del modo siguiente $\overline{x_i} = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$ que es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$.

Ejemplo.- Expresar el límite de la suma dada como una integral definida

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)^2 (x_i - x_{i-1}) \text{ donde } P\text{: partición de } [1,9].$$

<u>Solución</u>

Como $[a,b] = [1,9]$ se tiene: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Ahora identificamos $f(x)$ donde $\overline{x_i} = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$ punto medio

$f(\overline{x_i}) = (\dfrac{x_i + x_{i-1}}{2})^3 = \overline{x_i}^3$ de donde $f(x) = x^3$

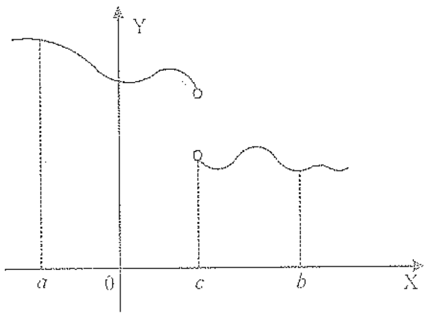
Luego se tiene: $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} (\dfrac{x_i + x_{i-1}}{2})^2 (x_i - x_{i-1}) = \int_1^9 x^3 dx$

TEOREMA.- Una función acotada f es integrable en $[a,b]$ sí y sólo sí para cada $\varepsilon > 0$, siempre es posible hallar una partición P tal que $U(f,p) - L(f,p) < \varepsilon$.

Ejemplo de aplicación.

Sea f una función acotada en $[a,b]$ y continua en $[a,b]$ excepto en el punto $c \in [a,b]$, pruebe que f es integrable en $[a,b]$.

<u>Solución</u>



F es continua en $[a,b]$ excepto en $x = c$.

Una función es acotada si está acotada.

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \iff \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, \exists\ \Delta$ partición de $[a,b]$ tal que $U(f,\Delta) - L(f,\Delta) < \varepsilon$ por probar para que f se integrable en $[a,b]$.

Luego tenemos:

f es continua en $[a,c] \Rightarrow \forall\ \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, $\exists\ \Delta'$ partición de $[a,c]$ tal que $U(f,\Delta') - L(f,\Delta') < \dfrac{\varepsilon}{2}$

f es continua en $[c,b] \Rightarrow \forall\ \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, $\exists\ \Delta''$ partición de $[c,b]$ tal que $U(f,\Delta'') - L(f,\Delta'') < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Sea ε > 0, cualquiera, entonces definimos $\Delta = \Delta' \cup \Delta'' / U(f,\Delta) - L(f,\Delta) < \varepsilon$, puesto que $U(f,\Delta) = U(f,\Delta') + U(f,\Delta'')$ y $L(f,\Delta) = L(f,\Delta') + L(f,\Delta'')$ de donde

$$U(f,\Delta) - L(f,\Delta) = L(f,\Delta') - L(f,\Delta') + U(f,\Delta'') - L(f,\Delta'') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \quad U(f,\Delta) - L(f,\Delta) < \varepsilon$$

Ejemplo.- Sean $c \in [a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} \alpha & si \quad x = c \\ 0 & si \quad x \neq c \end{cases}$ pruebe que f es integrable y que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$

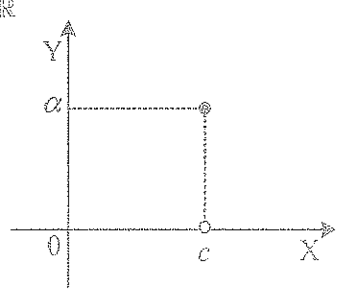
Solución

Aplicando la definición siguiente:

Una función f acotada sobre $[a,b]$ es integrable sobre $[a,b]$ si $\operatorname{Sup}\{L(f,p)\} = \inf\{U(f,p)\}$ donde p es una partición de $[a,b]$.

Aplicamos esta definición.

Como $f(x)$ es acotada pues $|f(x)| \leq \alpha$, $\forall x \in Df = \mathbb{R}$



Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición, $[x_{i-1}, x_i]$ sub-intervalo

$$L(f,p) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$m_i = \inf\{f(x) / x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{b-a}{n} = 0 \quad \text{pues} \quad m_i = 0$$

Luego $L(f,p)=0$

$$U(f,p)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})\,;\quad M_i=\sup\{f(x)/x_{i-1}\le x\le x_i\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} M_i\frac{b-a}{n}=0+0+\ldots+\alpha\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{n}\alpha \quad\Rightarrow\quad U(f,p)=\frac{b-a}{n}\alpha$$

Luego $\operatorname{Sup}\{L(f,p)\}=0$

Ahora $\inf\{U(f,p)\}=\inf\left\{\frac{b-a}{n}\alpha\right\}=\begin{cases}0\,, & \alpha<0\\ 0\,, & \alpha>0\\ 0\,, & \alpha=0\end{cases} \Rightarrow \inf\{U(f,p)\}=0$

$$\therefore\ \operatorname{Sup}\{L(f,p)\}=\inf\{U(f,p)\}=0$$

y por definición $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\sup\{L(f,p)\}=\inf\{U(f,p)\}=0$

2.6.3 LA INTEGRAL COMO LÍMITE DE SUMAS.-

a) **DEFINICIÓN.-** Diremos que una función f es integrable en el intervalo $[a,b]$, si existe un número L, que cumple la condición que, para cada $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$, tal que $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x-L\right|<\varepsilon$, para toda partición P del intervalo $[a,b]$, donde $|P|<\delta$, a esta definición lo representaremos por:

$$\boxed{L=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x}$$

b) **DEFINICIÓN.-** Consideremos una función f definida en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces a la integral definida de f de "a" hasta "b".

Denotaremos por $\int_a^b f(x)\,dx$ y es definida por:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x}$$

si existe el límite

2.6.4 CÁLCULO DE LA INTEGRAL DEFINIDA USANDO INTERVALOS DE IGUAL LONGITUD.

En el cálculo de las integrales definidas, cuando se usan intervalos de igual longitud se tiene que:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i\Delta x, \text{ de donde } x_i = a + \frac{b-a}{n}i, \quad i = 0,1,2,\dots,n$$

Luego la integral definida se calcula mediante la expresión.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x}$$

Ejemplo.- Mediante la definición de integral definida. Calcular la integral $\int_1^3 (4x^3 - 3x^2 + 1)dx$

Solución

$$\int_1^3 (4x^3 - 3x^2 + 1)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x, \text{ donde: } \Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}, \quad x_i = 1 + \frac{2}{n}i$$

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow f(x_i) = 4(1+\frac{2}{n}i)^3 - 3(1+\frac{2}{n}i)^2 + 1 = \frac{32}{n^3}i^3 + \frac{36}{n^2}i^2 + \frac{12}{n}i + 2$$

ahora reemplazando en la integral.

$$\int_1^3 (4x^3 - 3x^2 + 1)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{32}{n^3}i^3 + \frac{36}{n^2}i^2 + \frac{12}{n}i + 2)\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{64}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{72}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{24}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{64}{n^4}.\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{72}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{24}{n^2}.\frac{n(n+1)}{2} + \frac{4}{n}.n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[16\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + 12\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + 12\left(1+\frac{1}{n}\right) + 4\right]$$

$$= 16 + 24 + 12 + 4 = 56$$

Ejemplo.- Mediante la definición de integral definida, calcular la integral $\int_1^4 (x^2+4x+5)dx$

Solución

Por definición de la integral definida se tiene:

$$\int_1^4 (x^2+4x+5)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \text{, donde: } \Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n},\ x_i = a + i\Delta x = 1 + \frac{3i}{n}$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 5 \quad \Rightarrow \quad f(x_i) = (1+\frac{3i}{n})^2 + 4(1+\frac{3i}{n}) + 5 = \frac{9}{n^2}i^2 + \frac{18}{n}i + 10$$

ahora reemplazando en la definición de la integral.

$$\int_1^4 (x^2+4x+5)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{9}{n^2}i^2 + \frac{18}{n}i + 10)\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{30}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{54}{n^2}.\frac{n(n+1)}{2} + 30\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+27\left(1+\frac{1}{n}\right)+30\right]$$

$$= \frac{9}{2}(2)+27+30 = 9+27+30 = 66$$

Ejemplo.- Representar el límite de las siguientes sumas como una integral definida.

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(n^2+i^2)^{-1/2}$, P: partición $\left[0,\sqrt{3}\right]$

Solución

$$\begin{cases}\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{\sqrt{3}-0}{n} = \dfrac{\sqrt{3}}{n} \\ x_i = a+i\Delta x = 0+\dfrac{\sqrt{3}i}{n}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\Delta x = \dfrac{\sqrt{3}}{n} \\ x_i = \dfrac{\sqrt{3}i}{n}\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(n^2+i^2)^{-1/2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{i}{n})^2}}.\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}i}{n})^2}}.\frac{\sqrt{3}}{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}} = \int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$$

② $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{n}{n+i})\frac{1}{n}$

Solución

Si: $\Delta x = \frac{1}{n}$, entonces el intervalo se tiene [0,1], luego $x_i = 0+\frac{i}{n} \Rightarrow x_i = \frac{i}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{n}{n+i})\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}.\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n}).\frac{1}{n} = \int_0^1\frac{dx}{1+x}$$

además $f(\frac{i}{n})=\frac{1}{1+\frac{i}{n}} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{1+x}$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4n})+\operatorname{tg}(\frac{2\pi}{4n})+...+\operatorname{tg}(\frac{n\pi}{4n}))$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4n})+\operatorname{tg}(\frac{2\pi}{4n})+...+\operatorname{tg}(\frac{n\pi}{4n}))=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{tg}\frac{\pi i}{4n}.\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n}).\frac{1}{n}=\int_0^1\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}dx$$

donde $f(\frac{i}{n})=\operatorname{tg}\frac{\pi i}{4n} \Rightarrow f(x)=\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{4}) \Rightarrow \Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln(a+\frac{1}{n})+\ln(a+\frac{2}{n})+...+\ln(a+\frac{n}{n})\right]$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln(a+\frac{1}{n})+\ln(a+\frac{2}{n})+...+\ln(a+\frac{n}{n})\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln(a+\frac{i}{n})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n}).\frac{1}{n}=\int_0^1\ln(a+x)\,dx$$

donde $\Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n},\quad x_i=\frac{i}{n} \Rightarrow f(x)=\ln(a+x)$

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2n+4i}{2n^2+4in+4i^2}$, P: participación $[2,6]$

Solución

Sea: $\Delta x=\frac{6-2}{n}=\frac{4}{n} \Rightarrow \Delta x=\frac{4}{n}$, luego: $x_i=a+i\Delta x=2+\frac{4i}{n} \Rightarrow x_i=2+\frac{4i}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2n+4i}{2n^2+4in+4i^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2+\frac{4i}{n}}{4(2+\frac{4i}{n}+\frac{4i^2}{n})}.\frac{4}{n}$$

ahora a la expresión $\dfrac{2+\frac{4i}{n}}{2+\frac{4i}{n}+4(\frac{i}{n})^2}$ pondremos en términos de $2+\dfrac{4i}{n}$ es decir:

$$f(2+\frac{4i}{n})=\frac{2+\frac{4i}{n}}{4(2+4(\frac{i}{n})+4(\frac{i}{n})^2)}=\frac{2+\frac{4i}{n}}{4(2+4(\frac{i}{n}))+(\frac{4i}{n})^2}=\frac{2+\frac{4i}{n}}{(2+\frac{4i}{n})^2+4}$$

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$ entonces se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2n+4i}{2n^2+4in+4i^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2+4\frac{i}{n}}{(2+\frac{4i}{n})^2}.\frac{4}{n}=\int_2^6\frac{x}{x^2+4}dx$$

⑥ Utilizando integral definida hallar el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^P+2^P+...+n^P}{n^{P+1}}$, $P>0$.

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^P+2^P+...+n^P}{n^{P+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^P+2^P+...+n^P}{n^P}.\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left[(\frac{1}{n})^P+(\frac{2}{n})^P+...+(\frac{n}{n})^P\right].\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^P.\frac{1}{n}=\int_0^1 x^P dx=\frac{x^{P+1}}{P+1}\bigg|_0^1=\frac{1}{P+1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^P+2^P+...+n^P}{n^{P+1}}=\frac{1}{P+1}$$

2.6.5. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Encontrar el área exacta de la región indicada, expresar el área como el límite de una suma de RIEMANN con particiones iguales.

1. Hallar el área de la región R acotada por $y=x^2+2x+1$, el eje X y las rectas $x=-1$, $x=3$

   Rpta. $\frac{64}{3}u^2$

2. Hallar el área de la región R acotada por $y=3x^4$, el eje X y las rectas $x=0$, $x=1$.

   Rpta. $\frac{3}{5}u^2$

3. Hallar el área de la región R acotada por $y=2\sqrt{x}$, eje X y las rectas $x=0$, $x=4$.

   Rpta. $\frac{32}{3}u^2$

4. Hallar el área de la región R acotada por $y=(x-3)^2+2$, el eje X y las rectas $x=0$, $x=6$

   Rpta. $30\ u^2$

5. Hallar el área de la región R acotada por $y=12-x^2-x$, el eje X y las rectas $x=-3$, $x=2$

   Rpta. $\frac{305}{6}u^2$

6. Hallar el àrea de la región R acotada por $y=2x^3$, el eje X y las rectas $x=-1$, $x=1$.

   Rpta. $1\ u^2$

7. Hallar el área de la región R acotada por $y=4-x^2$, el eje X y las rectas $x=1$, $x=2$.

   Rpta. $\frac{5}{3}u^2$

(8) Hallar el área de la región R acotada por $y = 2 - |x|$, el eje X y las rectas $x = -2$, $x = 2$

Rpta. $4\ u^2$

(9) Hallar el área de la región R acotada por $y = (x+3)^2$, el eje X y las rectas $x = -3$, $x = 0$

Rpta. $9\ u^2$

(10) Hallar el área de la región R acotada por $y = x^2 - 2x - 1$, el eje X y las rectas $x = 1$, $x = 4$

Rpta. $(\frac{13\sqrt{2}}{3} - 4)u^2$

(11) Hallar el área de la región R acotada por $y = 3x - 3x^2 - \frac{4}{3}x^3$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

Rpta. $\frac{1}{6}u^2$

(12) Hallar el área de la región R acotada por $y = \frac{x^2}{4} + 1$, el eje X y las rectas $x = 0$. $x = 3$.

Rpta. $\frac{21}{4}u^2$

(13) Hallar el área de la región comprendida por $y = x^2$, $y = 4 - 3x^2$

Rpta. $\frac{16}{3}u^2$

(14) Hallar el área de la región comprendida por $y = 3x^2$, $y = 1 - 3x^2$, $x = 0$, $x = 3$

Rpta. $57\ u^2$

(15) Hallar el área de la región R limitada por $y = 2x^2 + \frac{x}{2} + 1$, el eje Y, el eje X y la recta $x = 1$.

Rpta. $\frac{23}{12}u^2$

(16) Hallar el área de la región R limitada por $y = x - x^2$, el eje X.

Rpta. $\frac{1}{6}u^2$

(17) Hallar el área de la región R limitada por la curva $y = x^2 - x^4$, $0 \le x \le 1$ y el eje X.

Rpta. $\frac{2}{15}u^2$

(18) Encontrar el área de la región R limitada por $y = 1 + x^2 + 2x^4$, en el eje Y, el eje X y la recta $x = 1$.

Rpta. $\frac{26}{15}u^2$

(19) Hallar el área de la región limitada por las líneas dados por la ecuación $4y = (x-4)^2$, $4y = (x+4)^2$, $4y = (x-4)^2$, $4y = -(4+x)^2$.

Rpta. $\frac{64}{3}u^2$

(20) Encontrar el área de la región acotada por la curva $y = 6x + x^2 - x^3$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

Rpta. $\frac{109}{6}u^2$

(21) Utilizando la definición como limite de sumatoria, calcular el área de la región limitada por las curvas $C_1 : y = 2\sqrt{x+4}$, $C_2 : y = \frac{(x+4)^2}{16}$, $x < 0$, $C_3 : y = 2 + \sqrt{4-2x}$, $C_4 : 2y = x + 2$

(22) Mediante el limite de sumatoria calcular el área de la región limitada por las gráficas de las curvas $C_1 : 4(y+8) = (x-4)^2$, $C_2 : 2y = -5 + 2\sqrt{2x}$, $C_3 : 4y = -15x + 28$ con $x \ge 0 \wedge y < 0$

(23) Mediante el limite de una suma, calcular el área de la región limitada por la gráfica de f, la recta $x = 5$, y el eje X si $f(x) = 3 + 2x - x^2$

(24) Mediante límite de una suma, hallar el área de la región acotada por las curvas $y = -\frac{x^2}{2} + 12$, $y = \frac{x^2}{3} - 2x$

(25) Mediante el limite de una sumatoria, calcular el área de la región encerrada por las curvas $y=-\frac{x^3}{8}$, $y=-3+\sqrt{2x}$, $y=\frac{x^2}{4}-2x-4$ y el eje Y.

(26) Utilizando el limite de una sumatoria calcular el área de la región limitada por las graficas de las curvas $y=-\sqrt{-2x}$, $x=y^2+6y$, $x=\sqrt{-2y}$

(27) Utilizando la definición como limite de una sumatoria, calcule el área de la región limitada por la grafica de $f(x)=x^2-2x-3$, la recta $x=5$ y el eje X.

(28) Mediante limite de una sumatoria calcular el área de la región limitada por la grafica de $y=f(x)$, el eje X, las rectas $x=-6$, $x=1$ $f(x)=\begin{cases} -4x-x^2 & , x\leq -2 \\ 12+x^3 & , x>-2 \end{cases}$

(29) Mediante limite de sumatoria calcular el área de la región limitada por las curvas $y=\frac{x^2}{2}-4$, $y=-\sqrt{2x}$, $y=\frac{2x}{9}-4$

(30) Utilizando la definición de la integral definida como limite de una sumatoria, calcular el área de la región limitada por las curvas $C_1: y=-\sqrt{16+2x}$, $C_2: x+y^2+6y+8=0$, $C_3: 7y+x^2+16x+64=0$

II. Usando la definición de la integral definida calcular las integrales siguientes:

(1) $\int_1^4 (x^2+4x+5)dx$ **Rpta.** $66\ u^2$

(2) $\int_0^5 (x^3-1)dx$ **Rpta.** $\frac{605}{4}\ u^2$

(3) $\int_0^4 (x^2+x-6)dx$ **Rpta.** $\frac{16}{3}\ u^2$

(4) $\int_{-2}^2 (x^3+1)dx$ **Rpta.** $4\ u^2$

5. $\int_{-1}^{5}(4x^3-3x^2+1)x$ **Rpta.** $56\,u^2$

6. $\int_{-1}^{5}(3x^3+3x^2-2x-6)dx$ **Rpta.** $222\,u^2$

7. $\int_{2}^{6}(2x^3-2x-3)dx$ **Rpta.** $596\,u^2$

8. $\int_{0}^{2}(3x^2-1)dx$ **Rpta.** $6\,u^2$

9. $\int_{-2}^{2}(x^3+x^2-4x-2)dx$ **Rpta.** $-\frac{8}{3}\,u^2$

10. $\int_{-2}^{1}(x^3+2x)dx$ **Rpta.** $-\frac{27}{4}\,u^2$

11. $\int_{-1}^{3}(x^2-1)^2\,dx$ **Rpta.** $\frac{812}{15}\,u^2$

12. $\int_{0}^{a}\operatorname{sen} x\,dx$ **Rpta.** $1-\cos a\;\;u^2$

III.

1. Expresar el siguiente límite como una integral definida $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+...+\sqrt[n]{e^n}}{n}$

   Rpta. $\int_{0}^{1}e^x\,dx$

2. Expresar el siguiente límite como una integral definida. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+...+n^p}{n^{p+1}}$

   Rpta. $\int_{0}^{1}x^p\,dx$

(3) Expresar el siguiente límite como una integral definida.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{500}}{(n+1)^{501}}+\frac{n^{500}}{(n+2)^{501}}+\dots+\frac{n^{500}}{(n+n)^{501}}\right) \qquad \textbf{Rpta.} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^{501}}$$

(4) Expresar el siguiente límite como una integral definida. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i^2(n^2-i^2)}{n^5}$

Rpta. $\int_0^1 (x^2-x^4)dx$

(5) Expresar el siguiente límite como una integral definida. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(a+\frac{i}{n})$

Rpta. $\int_0^1 \ln(a+x)\,dx$

(6) Expresar el siguiente límite como una integral definida. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{-1/2}$

Rpta. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

(7) Expresar el siguiente límite como una integral definida. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}(\frac{i}{n})}{n+i}$

Rpta. $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1+x}dx$

(8) Expresar el siguiente límite como una integral definida.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}(\frac{1}{n})}{1+n}+\frac{\operatorname{arctg}(\frac{2}{n})}{2+n}+\dots+\frac{\frac{\pi}{4}}{n+n}\right) \qquad \textbf{Rpta.} \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}dx$$

(9) Expresar el siguiente límite como una integral definida. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{7i^2}{n^3}+\frac{9}{n})$

Rpta. $\int(7x^2+9)dx$

(10) Expresar el siguiente límite como una integral definida.

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{1+2n+2n^2}+\frac{n}{4+4n+2n^2}+...+\frac{n}{n^2+2n(n)+2n^2})$$

Rpta. $\int_0^1\frac{dx}{x^2+2x+2}$

(11) Expresar el siguiente límite como una integral definida.

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}})$$

Rpta. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

(12) Expresar el siguiente límite como una integral definida.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+...+\sqrt{2n}}{n^{3/2}}$$

Rpta. $\int_0^1\sqrt{1+x}\ dx$

(13) Aplicando sumas de Riemann, evaluar la integral $\int_0^4 f(x)dx$ donde

$$f(x)=\begin{cases}2x+2 & , \ x\in[0,2]\\ x^2-4x+10 & , \ x\in\langle 2,4]\end{cases}$$

Rpta. $-\frac{4}{3}$

(14) Exprese como una integral definida el siguiente límite y luego evalué, si

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{(n^2+2in+i^2)\sqrt{2n^2+2in+i^2}}$$

Rpta. $\int_0^1\frac{dx}{(1+2x+x^2)\sqrt{2+2x+x^2}}$

(15) Exprese el siguiente límite como una integral definida $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2n+4i}{2n^2+4in+4i^2}$, luego evalué dicha integral.

Rpta. $\int_0^1\frac{2+4x}{2+4x+4x^2}dx$

(16) Expresar como una integral definida el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{in+n^2+2\sqrt{2n^4+i^2n^2}}{(2n^2-i^2)^{3/2}}$

Rpta. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1+\sqrt{2+x^2}}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}\,dx$

(17) Exprese el siguiente límite como una integral definida y luego evalué dicha integral si se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{3n}{(5n+3i)\sqrt{5n^2+18in+9i^2}}$ **Rpta.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{3\,dx}{(5+3x)\sqrt{5+18x+9x^2}}$

(18) Exprese como una integral definida el siguiente limite y luego evalué $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{16(i^3-3i^2n+3in^2-n^3)}{(4i^2-4in+3n^2)^2}$ **Rpta.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{16(x^3-3x+3x-1)\,dx}{(4x^2-4x+3)^2}$

(19) Exprese como una integral definida y luego evalué el siguiente limite $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2i-n)\sqrt{n^2-in+i^2}}{n^3}$ **Rpta.** $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)\sqrt{1-x+x^2}\;dx$

(20) Exprese como una integral definida el siguiente limite $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{(4n+i)\sqrt{16n^2+8in+5i^2}}$ luego evalué dicha integral definida.

Rpta. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(4+x)\sqrt{16+8x+5x^2}}$

(21) Exprese como una integral definida el siguiente limite $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{(3n+i)\sqrt{27n^2+24in+4i^2}}$ luego evalué dicha integral definida.

Rpta. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(3+x)\sqrt{27+24x+4x^2}}$

(22) Exprese como una integral definida y luego evalué el siguiente limite $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^3(2i-n)}{(n^2-\sqrt{2n^4+i^2n^2}+in)(2n^2-i^2)^{3/2}}$

Rpta. $\int_0^1 \frac{(2x-1)dx}{(1-\sqrt{2+x^2}+x)(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}$

(23) Exprese el siguiente limite como una integral definida y luego evalué dicha integral $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^3+i^2n^2}{(5n^2+8in+4i^2)\sqrt{16(n+i)^4-n^4}}$ pasa por una partición de [2,4]

(24) Exprese como una integral definida y evalué el siguiente limite $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\cos x_{i-1}-\cos x_i)(x_i^2+2x_ix_{i-1}+x_{i-1}^2)\quad x_i\in[0,\frac{\pi}{4}]$

(25) Exprese como una integral definida y luego evalué el siguiente limite $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos x_k-\cos x_{k-1}}{\cos x_k.\cos x_{k-1}}$ en $[0,\frac{\pi}{4}]$

2.7 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.-

Consideremos dos funciones f y g integrables en $[a,b]$ y k una constante arbitrariamente, entonces:

(1) $\int_a^b k\,f(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

(2) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$, donde f es integrable en $[a,c],[c,b],[a,b]$ y $a\le c\le b$

4) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,,\quad b > a$

5) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

6) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x-k)\,dx$ (invariancia frente a una traslación)

7) Sí $f(x) \geq 0\,,\ \forall\, x \in [a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

8) Si $f(x) \geq g(x),\ \forall\, x \in [a,b]$, entonces: $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

9) Si m y M son los valores mínimos y máximos absolutos de f en $[a,b]$ respectivamente tal que $m \leq f(x) \leq M\,,\ \forall\, x \in [a,b]$ entonces: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

10) Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

11) Si f es una función continua en el intervalo $[0,a]$, entonces: $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

12) Si f es una función par y continua en $[-a,a]$, entonces: $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

13) Si f es una función impar y continua en $[-a,a]$, entonces: $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

14) Si f es una función par y continua, entonces: $\int_0^\pi x\,f(\cos x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\cos x)\,dx$

(15) Si f es una función continua, entonces: $\int_0^{\pi} x\, f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx$

(16) Si f es integrable en $[a,b]$, entonces para cualquier $c \neq 0$ se tiene que:

a) $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(\frac{x}{c})\,dx$ b) $\int_a^b f(x)\,dx = c\int_{a/c}^{b/c} f(cx)\,dx$

(17) Si f es una función continua en un intervalo I, entonces, para cada $t \in$ I.

a) $\int_{-t}^{0} f(x)\,dx = \int_0^t f(-x)\,dx$ b) $\int_{-t}^{t} f(x)\,dx = 2\int_0^t f(x)\,dx$, si f es par.

(18) Sea f una función impar (par) continua sobre $[-a,a]$, si se define la función $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ para $x \in [-a,a]$, entonces g es una función par (impar).

(19) Si f es continúa en I, entonces para $c \in$ I: $\int_{-c}^{0} f(x)\,dx = \int_0^c f(-x)\,dx$

Demostración

(1) Por demostrar $\int_a^b k\, f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$.

La suma de Riemann de la función $kf(x)$ asociado a esta partición es:

$S(p,f) = \sum_{i=1}^{n} k\,f(\alpha_i)\Delta_i x = k\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x$, de modo que podemos expresar en la forma:

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} k\,f(\alpha_i)\Delta_i x = \lim_{|P|\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x$$

$$= k\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x = k\int_a^b f(x)\,dx$$

② Por demostrar $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.

Sea $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ la suma de Riemann de la función $f(x)\pm g(x)$ asociada a esta partición es:

$$S(p,f)=\sum_{i=1}^{n}\left[f(\alpha_i)\pm g(\alpha_i)\right]\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x + \sum_{i=1}^{n} g(\alpha_i)\Delta_i x$$

de modo que podemos expresar en la forma:

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[f(\alpha_i)\pm g(\alpha_i)\right]\Delta_i x$$

$$= \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x \pm \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\alpha_i)\Delta_i x = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

③ Por demostrar $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, donde: $a<c<b$

Supongamos que $f(x)$ es integrable en $[a,b]$, entonces si $\varepsilon > 0$, existe una partición $P=\{a=x_0,x_1,...,x_n=b\}$ de $[a,b]$ tal que $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

Sea $P'=\{x_0,x_1,\dots,x_j\}$ una partición del intervalo $[a,c]$ y $P''=\{x_j,\dots,x_n\}$ una partición del intervalo $[c,b]$, entonces $L(f,P)=L(f,P')+L(f,P'')$ y $U(f,P)=U(f,P')+U(f,P'')$ entonces:

$$\left[U(f,P')+U(f,P'')\right]-\left[L(f,P')+L(f,P'')\right]=U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

como cada término del paréntesis no es negativo, cada uno es menor que ε, esto muestra que *f* es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ y se tiene que:

$$L(f,P')\le\int_a^c f(x)\,dx\le U(f,P')$$

$$L(f,P'')\le\int_c^b f(x)\,dx\le U(f,P'')$$ por lo tanto:

$$L(f,P)\le\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx\le U(f,P)$$ lo que demuestra que:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

4. La demostración $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$, $b>a$ es inmediato aplicando $\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$ donde $a<c<b$

5. La demostración del ejercicio $\int_a^a f(x)\,dx=0$ es inmediato.

6. Por demostrar que $\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a+k}^{b+k} f(x-k)\,dx$

Sea $z=x-k$ donde $dx=dz$, además

Para $x = a + k$; $z = a + k - k = a$ y $x = b + k$; $z = b + k - k = b$

$$\int_{a+k}^{b+k} f(x-k)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(x)\,dx \quad \therefore \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x-k)\,dx$$

(7) La demostración de $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$ dejamos como ejercicio.

(8) Por demostrar que $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$ donde $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a,b]$ para esto aplicamos la propiedad de linealidad y la propiedad (7).

Como $f(x)$ y $g(x)$ son integrables, entonces la función $h(x) = f(x) - g(x)$ es integrable y como por hipótesis se tiene que $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a,b]$ entonces

$$0 \leq \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

es decir $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$, de donde $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

(9) Por demostrar que $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$ como f es continua en $[a,b]$, entonces $f(x)$ es integrable en $[a,b]$ y como m y M son los valores mínimo y máximo absoluta de $f(x)$ es decir $m \leq f(x) \leq M$, $\forall\ x \in [a,b]$. Aplicando la propiedad (8) se tiene:

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx \quad \Rightarrow \quad m\,x\Big|_a^b \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,x\Big|_a^b$$

$$\therefore \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

(10) Por demostrar que: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ como $f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces $|f(x)|$ también es continua en $[a,b]$ y por lo tanto es integrable, además por la propiedad, $\forall\ u \in \mathbb{R},\ -|u| \leq u \leq |u|$ de modo que: $\forall\ x \in [a,b]$ se tiene $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ por la propiedad (8) se tiene:

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

y aplicando la propiedad: $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$, se tiene: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

(11) Por demostrar que $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

En la integral $\int_0^a f(a-x)\,dx$, hacemos $z = a - x$, donde $x = 0$, $z = a$ y para $x = a$, $z = 0$, además $dx = -dz$

$$\int_0^a f(a-x)\,dx = \int_a^0 f(z)(-dz) = -\int_a^0 f(z)\,dz = \int_0^a f(z)\,dz$$

por la propiedad (4) por lo tanto: $\int_0^a f(a-x)\,dx = \int_0^a f(z)\,dz = \int_0^a f(x)\,dx$

(12) Por demostrar que: $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, aplicando la propiedad (3):

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \qquad \text{... (1)}$$

en la integral $\int_{-a}^0 f(x)\,dx$, reemplazando $x = -y$ entonces para $x = -a$, $y = a$ y $x = 0$, $y = 0$, $dx = -dy$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-y)(-dy) = -\int_{a}^{0} f(-y)\,dy = \int_{0}^{a} f(-y)\,dy$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\,dx \text{, por que } f \text{ es par} \qquad \ldots (2)$$

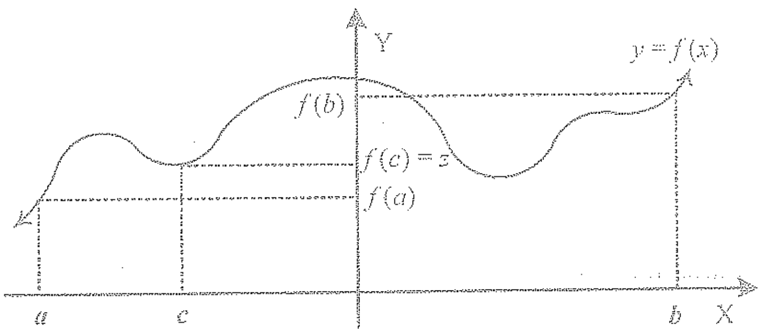
al reemplazar (2) en (1) se tiene

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$\therefore \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

NOTA.- Las demás propiedades su demostración dejamos como ejercicio.

OBSERVACIÓN.- Si se tiene una función f continua en el intervalo $[a,b]$ y además $f(a) \neq f(b)$, entonces para cualquier número z entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un número c entre a y b de tal manera que $f(c) = z$.



2.7.1 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES.-

① TEOREMA

Consideremos una función f continua en $[a,b]$. Entonces existe un número $c \in [a,b]$ tal que.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

<u>Demostración</u>

Como f es continua en $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\exists$ α, β en $[a,b]$ tal que $f(\alpha)=m$ y $f(\beta)=M$ son los valores mínimos y máximos absolutos respectivamente de f en $[a,b]$.

Luego $m \le f(x) \le M$, $\forall\, x \in [a,b]$. Entonces.

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$ (por la propiedad 9).

Por lo tanto: $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$, de donde $f(\alpha) \le \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le f(\beta)$

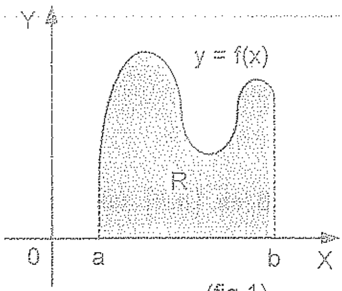
Ahora mediante la observación, existe $c \in [a,b]$ tal que:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

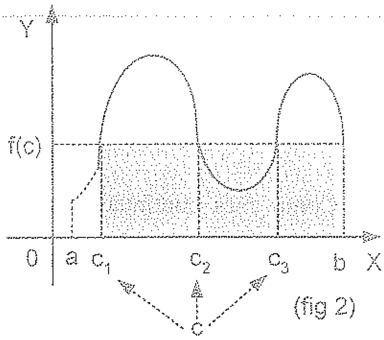
◈ ◈ ◈

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.-

Daremos una interpretación geométrica a este teorema, para una función no negativa. En este caso podemos interpretar a la integral $\int_a^b f(x)dx$ como el área de la región encerrada bajo la gráfica de f, las rectas verticales x = a, x = b y el eje X, (figura 1) luego el teorema nos asegura que existe un rectángulo de anchura (b – a) y de altura f(c) que tiene la misma área (figura 2)



(fig 1)



(fig 2)

$$A(R)=\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$$

NOTA.- En la figura (2) se observa que el número "c" no necesariamente es único y f(c) es el valor medio o promedio.

(2) **TEOREMA.-** Si f es continua en el intervalo de integración entonces existe un número θ, θ ∈ <0,1>, tal que

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f[a+(b-a)\theta]$$

Demostración

Aplicando el teorema del valor medio para integrarlos, tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)\,,\quad c\in\ <a,b> \qquad \ldots (1)$$

$\forall\ \theta \in\ <0,1>\ \Rightarrow\ 0<\theta<1$ ... (2)

Como $a<b$ entonces $b-a>0$ ... (3)

Multiplicando (3) en (2) se tiene:

$0<(b-a)\,\theta<b-a$, sumando "a"

$a<a+(b-a)\theta<b$

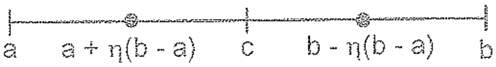
de donde hacemos $c=a+(b-a)\theta$ ... (4)

ahora reemplazamos (4) en (1)

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f[a+(b-a)\theta]$$

Ahora veamos una aplicación de este primer teorema, en el cálculo de algunos límites como $c \in [a,b]$, entonces para algún $\eta \in [0,1]$ se tiene que:

$$c = a + \eta(b-a) \quad \text{o} \quad c = b - \eta(b-a)$$



Luego del primer teorema del valor medio para integrales se tiene:

$$f(c) = f[a+\eta(b-a)] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad \dots (1)$$

$$f(c) = f[b-\eta(b-a)] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad \dots (2)$$

i) Hagamos: $h = b - a > 0$ entonces $b = a + h$ ... (α)

ahora reemplazamos (α) en (1)

$$F(c) = \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)dx \;\Rightarrow\; \lim_{h\to 0^+} f(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)dx$$

Entonces $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)dx = f(a)$ ... (3)

ii) Hagamos: $h = a - b < 0$ entonces $a = b + h$ ... (β)

ahora reemplazamos (β) en (2)

$$f(c) = \frac{1}{-h}\int_{b+h}^{b} f(x)dx = \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(x)dx \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{h\to 0^-} f(c) = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(x)dx \Rightarrow \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(x)dx = f(b) \quad \ldots (4)$$

Luego de las igualdades (3) y (4) resulta el siguiente colorario.

③ **COROLARIO.-** Sea f continua sobre [a,b] entonces:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(x)dx = f(c)$$

Para $c \in \langle a,b \rangle$, consideremos que si $h \to 0$, entonces

i) Si $c = a$, $h \to 0^+$ ii) Si $c = b$, $h \to 0^-$

Demostración

Por hipótesis tenemos que f es continua en [a,b], entonces por el Teorema del Valor Medio para integrales tenemos que si $[c, c+h] \subset [a,b]$, entonces $\exists\, \eta \in \langle c, c+h \rangle$ tal que:

$$\int_c^{c+h} f(x)dx = (c+h-c)f(\eta) = hf(\eta) \quad \text{de donde}$$

$$\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(x)dx = f(\eta)$$

Si $h \to 0^+ \Rightarrow \eta \to c$ por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(x)dx = \lim_{\eta\to c} f(\eta) = f(c)$$

$$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(x)dx = f(c)$$

④ SEGUNDO TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES (TEOREMA GENERALIZADO DEL VALOR MEDIO).-

Sea f una función continua sobre el intervalo [a,b] y sea g una función integrable y no negativa sobre el intervalo [a,b], entonces existe un valor $\varphi \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x).g(x)dx = f(\varphi)\int_a^b g(x)dx$

Demostración

Como f es continua en el intervalo [a,b], entonces f es acotada en [a,b], es decir que:

$$m \le f(x) \le M \qquad \ldots (1)$$

además g es una función integrable y no negativa, entonces:

$$g(x) \ge 0 \qquad \ldots (\alpha)$$

de donde $\int_a^b g(x)dx \ge 0$ ... (2)

ahora multiplicamos a (1) por g(x) es decir:

$m\,g(x) \le f(x)\,g(x) \le Mg(x)$, integrando

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx \qquad \ldots (3)$$

De (2) se tiene: si $\int_a^b g(x)dx > 0 \Rightarrow \left[\int_a^b g(x)dx\right]^{-1} > 0$

De la ecuación (3) se tiene:

$$m \le \frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)dx \le M \qquad \ldots (4)$$

Aplicando el Teorema del Valor Intermedio

$\exists\ \varphi \in \langle a,b\rangle$ tal que $m \le f(\varphi) \le M$ ... (5)

De (4) y (5) se obtiene el resultado siguiente

$$f(\varphi)=\frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)dx \quad \text{entonces}$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\varphi)\int_a^b g(x)dx$$

Ejemplo.- Sea $y = f(x)$ una función tal que bajo su gráfica y sobre el eje X, determine una región de área: $A(x)=\sqrt{1+3x}-1$, para $x \ge 0$ calcular el valor medio de f(x) para $1 \le x \le 8$.

Solución

Del enunciado del problema se tiene que:

$$A(x)=\int_0^x f(x)dx=\sqrt{1+3x}-1$$

Ahora derivamos esta ecuación, es decir:

$$A'(x)=D_x\int_0^x f(x)dx = D_x(\sqrt{1+3x}-1)$$

$$f(x)=\frac{3}{2\sqrt{1+3x}}, \quad x \ge 0$$

Como $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{1+3x_0}}=f(x_0), \quad \forall\ x_0 \in [1,8]$

Luego f es continua en [1,8], por lo tanto f satisface el Teorema del Valor Medio para integrales (T.V.M.I)

Es decir que: $\exists\ c \in \langle 1,8\rangle$ tal que:

$$\int_1^8 f(x)dx = f(c).(8-1) = 7f(c) \quad \text{de donde}$$

$$f(x) = \frac{1}{7}\int_1^8 f(x)dx = \frac{1}{7}\int_1^8 \frac{3\,dx}{2\sqrt{1+3x}} = \frac{1}{7}\sqrt{1+3x}\Big|_1^8$$

$$= \frac{1}{7}[\sqrt{25}-\sqrt{4}] = \frac{1}{7}(5-2) = \frac{3}{7}$$

Entonces $f(c) = \frac{3}{7}$ es el valor medio o valor promedio de f en [1,8]

Ejemplo.- Dada la función f cuya regla es: $f(x) = \begin{cases} x+2 \;\;, & si\ -2 \le x < 0 \\ 2-x^2 \,, & si\ \ 0 \le x < 2 \\ \dfrac{4}{x^2}-3, & si\ \ 2 \le x \le 3 \end{cases}$

calcular el valor medio de f y los valores que en su dominio satisfacen el Teorema de Valor Medio para integrales.

Solución

Analizando la continuidad de la función f(x)

a) Si x ∈ [-2,0> ⇒ f(x) = x + 2 que es continua por ser una función lineal.

b) Si x ∈ [0,2> ⇒ $f(x) = 2-x^2$, que es continua por ser una polinomial.

c) Si $x_0 \in <2,3]$ ⇒ $f(x) = \frac{4}{x^2}-3$, x ∈ [2,3], entonces:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{4}{x^2}-3\right) = \frac{4}{x^2}-3 = f(x_0)$$

Entonces f es continua en <2,3]

d) además f es continua en x = 0 y x = 2, puesto que:

i) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x+2 = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 2-x^2 = 2 = f(0)$ entonces

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2 = f(0) \Rightarrow$ f es continua en x = 0.

ii) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2-x^2 = 2$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (\frac{4}{x^2}-3) = -2 = f(2)$ entonces

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = -2 \Rightarrow$ f es continua en x = 2 por lo tanto se puede concluir que f es continua en [-2,3], entonces existirá al menos un valor $c \in \langle -2,3 \rangle$ tal que $\int_{-2}^{3} f(x)dx = [3-(-2)]f(c)$

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = 5f(c) \Rightarrow f(c) = \frac{1}{5}\int_{-2}^{3} f(x)dx \quad \text{entonces}$$

$$f(c) = \frac{1}{5}[\int_{-2}^{0}(x+2)dx + \int_{0}^{2}(2-x^2)dx + \int_{2}^{3}(\frac{4}{x^2}-3)dx]$$

$$= \frac{1}{5}[(\frac{x^2}{2}+2x)\Big|_{-2}^{0} + (2x-\frac{x^3}{3})\Big|_{0}^{2} + (-\frac{4}{x}-3x)\Big|_{2}^{3}]$$

$$= \frac{1}{5}[-(2-4)+(4-\frac{8}{3})+(-\frac{4}{3}-9)-(-2-6)] = \frac{1}{5}[+2+4-4-9+8] = \frac{1}{5}$$

Por lo tanto $f(c) = \frac{1}{5}$

Ejemplo.- La temperatura T en cierto día satisface que: $T(t) = 70+8sen[\frac{\pi}{12}(t-9)]$ donde t era el número de horas después de medianoche. Encuentre la temperatura promedio de 6 a.m. a 6 p.m.

Solución

Por dato del problema tenemos que:

$$T(t) = 70+8sen[\frac{\pi}{12}(t-9)], \quad t \geq 0 \qquad \ldots (1)$$

Donde t son las horas transcurridas a partir de la medianoche, por lo tanto si las horas consideran desde las 6 a.m. a 6 p.m. entonces $t \in [6,18]$ y como la función seno es continua en todos los reales, por lo tanto la función T definida en (1) es continua en el intervalo [6,18], por lo tanto T satisface el teorema del valor medio para integrales, es decir $\exists\, t_c \in \langle 6,18 \rangle$ tal que:

$$\int_6^{18} T(t)dt = (18-6)f(t_c) = 12f(t_c) \quad \text{entonces}$$

$$T(t_c) = \frac{1}{12}\int_6^{18} T(t)dt = \frac{1}{12}\int_6^{18} (70 + 8sen[\frac{\pi}{12}(t-9)]dt$$

$$= \frac{1}{12}[70t - \frac{96}{\pi}\cos\frac{\pi}{12}(t-9)]\Big|_6^{18} = \frac{1}{12}[70(18-6) - \frac{96}{\pi}(\cos\frac{3\pi}{4} - \cos(-\frac{\pi}{4})]$$

$$= \frac{1}{12}[70(12) - \frac{96}{\pi}(\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4})] = 70 - \frac{8}{\pi}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 70 + \frac{8\sqrt{2}}{\pi}$$

$$\therefore \quad T(t_c) = 70 + \frac{8\sqrt{2}}{\pi}$$

2.7.2 PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.-

(Derivadas de Integrales)

Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$. Entonces la función F definida por:

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $a \le x \le b$ es derivable en $[a,b]$ y

$$D_x F(x) = D_x \int_a^x f(t)\,dt = f(x), \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Demostración

Como $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es una función definida en $[a,b]$. Entonces:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \text{ (por la propiedad 3)}$$

Por el teorema del valor medio para integrales se tiene, para cada número no nulo $x+h\in[a,b]$, $\exists\alpha\in[x,x+h]$ tal que $\int_x^{x+h} f(t)\,dt=h\,f(\alpha)$ de donde.

$$f(\alpha)=\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}, \quad \text{luego} \quad F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0} f(\alpha)=f(x)$$

$$\therefore\ F'(x)=f(x)$$ ◆◆◆

Ejemplo.- Calcular $F'(x)$ siendo $F(x)=\int_0^x e^t \ln t\,dt$

Solución

$$F(x)=\int_0^x e^t\ln t\,dt \quad\Rightarrow\quad F'(x)=e^x\ln x$$

Ejemplo.- Dada la función $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{t^2+4}$, Hallar $F'(x)$, $F'(-1)$, $F'(0)$, $F'(\frac{1}{2})$, F(x)

Solución

Sea $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \frac{dt}{t^2+4}$, de donde por el primer teorema del cálculo se tiene:

$$F'(x)=D_x\int_0^x f(t)dt=f(x)=\frac{1}{x^2+4} \qquad \dots (1)$$

De (1) se tiene que F(x) es estrictamente creciente

$\forall$ x $\in$ R ($F'(x) > 0$, $\forall$ x $\in$ R)

De (1) se tiene: $F'(-1) = \frac{1}{5}$, $F'(0) = \frac{1}{4}$, $F'(\frac{1}{2}) = \frac{4}{17}$

Como $F'(x) = \dfrac{1}{x^2+4} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{2} arctg \dfrac{x}{2} + c$ ... (2)

$F(0) = \frac{1}{2} arctg 0 + c \Rightarrow$ F(0) = c ... (3)

Además $F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0 \Rightarrow$ F(0) = 0 ... (4)

Por lo tanto de (3) y (4) se tiene: c = 0 ... (5)

Luego de (5) en (2) se tiene $F(x) = \dfrac{1}{2} arctg \dfrac{x}{2}$

Ejemplo.- Calcular $D^2 f(x)$, si $f(x) = \int_0^x \left[\int_0^t z^2 dz \right] dt$

Solución

Sea $g(t) = \int_0^t z^2 dz$ ... (1)

Luego, si $f(x) = \int_0^x \left[\int_0^t z^2 dz \right] dt = \int_0^x g(t)dt$

Aplicando el 1er Teorema fundamental del cálculo

$f'(x) = D_x \int_0^x g(t)dt = g(x)$ ... (2)

Como $g(t)=\int_0^t z^2dz \;\Rightarrow\; g(x)=\int_0^x z^2dz$ ... (3)

Luego de (3) y (2) se tiene:

$$f'(x)=g(x)=\int_0^x z^2dz \;\Rightarrow\; D_x f'(x)=D_x\int_0^x z^2dz=x^2$$

Luego $D_x f'(x)=f''(x)=x^2$ $\therefore\; D^2 f(x)=x^2$

Ejemplo.- Calcular $F'(x)$ siendo $F(x)=\int_0^{\operatorname{sen} x}\dfrac{dt}{1+\operatorname{arcsen} t}$

<u>**Solución**</u>

Para calcular $F'(x)$ en este ejemplo se debe aplicar la regla de la cadena en el primer teorema fundamental del cálculo, es decir:

$F(x)=\int_0^{g(x)} f(t)=H(g(x))$ derivando mediante la regla de la cadena se tiene:

$F'(x)=H'(g(x)).g'(x)=f(g(x)).g'(x)$ donde $f(t)=\dfrac{1}{1+\operatorname{arcsen} t}$ y $g(x)=\operatorname{sen} x$

$$F'(x)=f(g(x)).g'(x)=f(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)'=\frac{\cos x}{1+\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)}$$

$$\therefore\; F'(x)=\frac{\cos x}{1+x}$$

Ejemplo.- Calcular $F'(x)$ siendo $F(x)=\int_0^{x^3}\sqrt{t+e^t}\,dt$

<u>**Solución**</u>

Aplicando el criterio del ejemplo anterior:

$$F(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{t+e^t}\,dt \Rightarrow F'(x)=\sqrt{x^2+e^{x^2}}\left(x^2\right)' \quad \therefore\ F'(x)=2x\sqrt{x^2+e^{x^2}}$$

2.7.3. GENERALIZACIÓN DEL PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.-

(1) Si f es continua en $\mathbb{R}$ y g es diferenciable en $\mathbb{R}$, entonces:

$$D_x\left[\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right]=f(g(x)).g'(x),\ x\in\mathbb{R}$$

En efecto: Sea $u=g(x)$ y aplicamos la regla de la cadena

$$D_x\left[\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right]=\frac{d}{dx}\left[\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right]=\frac{d}{du}\left[\int_a^{u} f(t)\,dt\right]\frac{du}{dx}=f(u)\frac{du}{dx}=f(g(x)).g'(x)$$

(2) Con la hipótesis de (1) y con la suposición que h es diferenciable en $\mathbb{R}$, entonces:

$$D_x\left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right]=f(g(x)).g'(x)-f(h(x)).h'(x)$$

En efecto: Aplicando la propiedad (3) de la integral definida

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt=\int_{h(x)}^{a} f(t)\,dt+\int_a^{g(x)} f(t)\,dt=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt-\int_a^{h(x)} f(t)\,dt,\ \text{derivando}$$

$$D_x\left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right]=D_x\left[\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right]-D_x\left[\int_a^{h(x)} f(t)\,dt\right]\ \text{por la parte (1)}$$

$$=f(g(x)).g'(x)-f(h(x)).h'(x)$$

(3) Si f es continua en $\mathbb{R}$, g diferenciable en $\mathbb{R}$ y g' continúa en $\mathbb{R}$, entonces:

$$\int_a^x f(g(t)).g'(t)\,dt=\int_{g(a)}^{g(x)} f(u)\,du,\ x\in\mathbb{R}$$

En efecto: Sea $H(x)=\int_{g(a)y}^{g(x)} f(u)\,du$ entonces H(a) = 0 y

$$H'(x)=f\left(g(x)\right).g'(x) \Rightarrow \int_a^x f(g(t)).g'(t)dt=\int_a^x H'(t)dt=H(x)-H(a)$$

de donde $H(x)=\int_a^x f\left(g(t)\right).g'(t)\,dt=\int_{g(a)}^{g(x)} f(u)\,du$

Ejemplo.- Hallar $H'(x)$ si $H(x)=\int_0^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

Solución

Aplicando el teorema generalizado

$$H(x)=\int_a^{g(x)} f(t)dt \quad \Rightarrow \quad H'(x)=f(g(x)).g'(x) \qquad \ldots (1)$$

Como $H(x)=\int_0^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ donde $g(x)=x^3$ y $f(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$$f(g(x))=\frac{1}{\sqrt{1+g^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+(x^3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^6}} \qquad \ldots (2)$$

$$g(x)=x^3 \quad \Rightarrow \quad g'(x)=3x^2 \qquad \ldots (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1)

$$H'(x)=D_x\int_0^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^6}}(3x^2)=\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}}$$

Ejemplo.- Encontrar la derivada de f suponiendo que: $f(x)=\int_{-x^2}^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$

Solución

Se sabe que $\forall\, x \in R,\ x^2 \geq 0 \ \Rightarrow\ -x^2 \leq 0$ de donde $-x^2 \leq 0 \leq x^2$

Como $f(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt = \int_{-x^2}^{0} \sqrt{1+t^2}\,dt + \int_{0}^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt$

Entonces $f(x) = -\int_{0}^{-x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt + \int_{0}^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt$

$$f'(x) = -\sqrt{1+(-x^2)^2}\,(-x^2)' + \sqrt{1+(x^2)^2}\,(x^2)'$$

$$= 2x\sqrt{1+x^4} + 2x\sqrt{1+x^4} = 4x\sqrt{1+x^4}$$

Ejemplo.- Existe una función f definida y continúa $\forall\, x \in R$ que satisface una ecuación de la forma: $\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c$ donde c es una constante. Encontrar una fórmula explicita para f(x) y hallar el valor de la constante c.

Solución

A la ecuación integral expresamos en la forma siguiente:

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c \qquad \ldots (1)$$

Derivando la ecuación (1) con respecto a x

$$D_x \int_0^x f(t)dt = -D_x \int_1^x t^2 f(t)dt + 2x^{15} + 2x^{17}$$

$$f(x) = -(x^2 f(x)) + 2x^{15} + 2x^{17}$$

$$(1+x^2) f(x) = 2x^{15} + 2x^{17} = 2x^{15}(1+x^2)$$

$$f(x)=\frac{2x^{15}(1+x^2)}{1+x^2}=2x^{15}$$

$$\therefore \quad f(x)=2x^{15} \qquad \ldots (2)$$

De la ecuación (1) se tiene:

Para x = 0: $\underbrace{\int_0^0 f(t)dt}_{0}=-\int_1^0 t^2 f(t)dt+c$

De donde $c=\int_1^0 t^2 f(t)dt=\int_1^0 t^2(2t^{15})dt$

$$c=\int_1^0 2t^{17}dt=\frac{2t^{18}}{18}\Big|_1^0=0-\frac{1}{9}=-\frac{1}{9} \qquad \therefore \quad c=-\frac{1}{9}$$

2.7.4. SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.-

Consideremos una función f continua en $[a,b]$ y sea F una función tal que:

$F'(x)=f(x) \quad \forall\, x\in [a,b]$ entonces: $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$

<u>Demostración</u>

Como $F'(x)=f(x)$, $\forall\, x\in [a,b]$ entonces por el primer teorema fundamental del cálculo se tiene: $\quad F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+c \qquad \ldots (1)$

Si: $x=a$ entonces $F(a)=\int_a^a f(t)\,dt+c=0+c \Rightarrow c=F(a)$ esto es aplicando la propiedad (5) de la integral definida que reemplazando en (1) se tiene:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+F(a) \qquad \ldots (2)$$

Si $x = b$, reemplazamos en (2) obteniendo:

$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + F(a)$ de donde se tiene: $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

como la variable de integración t es independiente se concluye:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

◈ ◈ ◈

OBSERVACIÓN.-

① En la evaluación de las integrales definidas la notación $F(x)\Big|_a^b$ indica $F(b)-F(a)$ es decir: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

② La fórmula $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ se conoce con el nombre de "Fórmula de NEWTON – LEIBNITZ", debido a que estos dos ilustres matemáticos independientemente establecieron la relación entre los conceptos de la derivada y la integral.

③ La diferencia $F(b) - F(a)$ no depende de la elección de la antiderivada F, puesto que todas las antiderivadas se diferencian en una constante, la que se desaparece al efectuar la diferencia, por lo que no es necesario considerar la constante al hallar la antiderivada.

Ejemplo.- Calcular la integral $\int_{-2}^{5} |x-3|\,dx$

Solución

Aplicando definición de valor absoluto: $|x-3| = \begin{cases} x-3 & si\ x \geq 3 \\ 3-x & si\ x < 3 \end{cases}$

Luego se tiene: $[-2,5]=[-2,3]\cup[3,5]$

$$\int_{-2}^{5}|x-3|\,dx=\int_{-2}^{3}|x-3|\,dx+\int_{3}^{5}|x-3|\,dx=\int_{-2}^{3}-(x-3)\,dx+\int_{3}^{5}(x-3)\,dx$$

$$=\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{3}+\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\Bigg|_{3}^{5}=\left[(9-\frac{9}{2})-(-6-2)\right]+\left[(\frac{25}{2}-15)-(\frac{9}{2}-9)\right]$$

$$=17-\frac{9}{2}+\frac{25}{2}-\frac{9}{2}-6=11+\frac{7}{2}=\frac{29}{2} \qquad \therefore \int_{-2}^{5}|x-3|\,dx=\frac{29}{2}$$

2.7.5. CAMBIO DE VARIABLE EN UNA INTEGRAL DEFINIDA.-

El cálculo en la integral definida se puede simplificar mediante un cambio de variable, este criterio indicaremos en el siguiente teorema.

TEOREMA.- Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ y si se reemplaza la variable de la integral $x=g(t)$ donde $g:[\alpha,\beta]\longrightarrow[a,b]$ tiene derivada continua en $[\alpha,\beta]$, con $g(\alpha)=a$ y $g(\beta)=b$, entonces:

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(g(t)).g'(t)\,dt$$

Demostración

Aplicando el primer y segundo teorema del cálculo

Sea $F(y)=\int_{a}^{y}f(x)\,dx$ entonces $F'(y)=f(y)$, $\forall\ y\in[a,b]$ por la regla de la cadena o derivada de la función compuesta.

$[F(g(t))]'=F'(g(t)).g'(t)=f(g(t)).g'(t)$ por lo tanto $F(g(t))$ es la antiderivada de $f(g(t)).g'(t)$ entonces por el segundo teorema del cálculo se tiene:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)).g'(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left[F(g(t))\right]' d(g(t)) = F(g(t))\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

$$= F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\therefore \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)).g'(t)\,dt$$

◆ ◆ ◆

Ejemplo.- Calcular la integral $\displaystyle\int_{3}^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

Solución

Sea $z^3 = x-2$ de donde $dx = 3z^2 dz$, además para $x = 3; z = 1$ y para $x = 29,\ z = 3$

$$\int_{3}^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx = \int_{1}^{3} \frac{z^2.3z^2 dz}{3+z^2} = 3\int_{1}^{3} \frac{z^4 dz}{3+z^2}$$

$$= 3\int_{1}^{3} (z^2 - 3 + \frac{9}{z^2+3})dz = 3\left[\frac{z^3}{3} - 3z + \frac{9}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}\right]\Bigg|_{1}^{3}$$

$$= \left[z^3 - 9z + 9\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}\right]\Bigg|_{1}^{3} = 9\sqrt{3}(\frac{\pi}{3}) + 8 - 9\sqrt{3}(\frac{\pi}{6}) = 8 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$$

OBSERVACIÓN.- En la práctica no es necesario tomar la función $g(t)$ en forma explícita, puesto que ya está habilitado a cambiar de variable en la integral indefinida, solamente se debe agregar para cambiar los límites de integración solamente se debe reemplazar la variable original x por los límites de integración correspondiente, obteniéndose los nuevos límites de integración.

Ejemplo.- Calcular la integral definida $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$

Solución

Sea $z = 1 + x^2 \Rightarrow dz = 2x\,dx$, además para $x = 1$; $z = 2$ y para $x = 2$; $z = 5$

$$\int_1^2 \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{2z}\Big|_2^5 = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right] = \frac{3}{20}$$

Ejemplo.- Calcular la integral $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$

Solución

Cuando se hace un cambio de variable o una sustitución adecuada también es recomendable cambiar los límites de integración para facilitar los cálculos.

Ahora hacemos el cálculo de la integral, sea $x = z^2 \Rightarrow dx = 2z\,dz$ cambiando los límites de integración para: $x = 4$, se tiene $z = 2$; y para $x = 9$, se tiene $z = 3$

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1} = \int_2^3 \frac{z}{z-1}2z\,dz = 2\int_2^3 (z+1+\frac{1}{z-1})dz = 2\left[\frac{z^2}{2}+z+\ln|z-1|\right]\Bigg|_2^3$$

$$= 2\left[(\frac{9}{2}+3+\ln 2)-(\frac{4}{2}+2+\ln 1)\right] = 7 + 2\ln 2$$

2.7.6 UN LÍMITE ESPECIAL.-

Sea f una función continua sobre el intervalo $[a,b]$, $c \in [a,b]$ ahora calcularemos el límite siguiente:

$$\boxed{E = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\,dt}$$

para esto, definimos la función:

$G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, para cada $x \in [a,b]$, donde $G(0) = 0$, $G'(x) = f(x)$, $G'(c) = f(c)$

Luego el valor de E lo expresamos como: $E = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[G(x+h)-G(c)\right]$ y como E resulta diferenciable por el primer teorema fundamental entonces:

$$E = \lim_{h\to 0}\frac{G(c+h)-G(c)}{h} = G'(c) = f(c)$$

por lo tanto: $\boxed{E = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{c}^{c+h} f(t)\,dt = f(c)}$

Ejemplo.- Calcular el límite $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{4}^{4+h}\frac{dt}{1+t^2}$

Solución

Sea $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$ entonces aplicando el caso especial

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{4}^{4+h}\frac{dt}{1+t^2} = f(4) = \frac{1}{1+16} = \frac{1}{17}$$

2.7.7 EJEMPLO DEL 1er. Y 2do. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.-

1. Hallar $f(x)$ sabiendo que f es continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$ y $\int_{0}^{x^2-1} f(t)\,dt = x^6 + x^4 + 3x^2$

Solución

Derivando ambos miembros de la ecuación dada se tiene:

$2x\,f(x^2-1) = 6x^5 + 4x^3 + 6x$, simplificando tenemos

$f(x^2-1) = 3x^4 + 2x^2 + 3 = 3(x^2-1)^2 + 8(x^2-1) + 8$

$$\therefore\quad f(x) = 3x^2 + 8x + 8$$

2. Hallar la derivada de la función $y = \int_{0}^{x}\frac{1-t+t^2}{1+t+t^2}\,dt$ para $x = 1$

Solución

Nos piden calcular $y'(1)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ primero calculamos su derivada con respecto a x.

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=D_x\int_0^x \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2}dt=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$$, ahora evaluamos en $x=1$.

$$y'(1)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\frac{1-1+1}{1+1+1}=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad y'(x)=\frac{1}{3}$$

(3) Hallar la derivada respecto a x de la función "y" dada en forma implícita. $\int_0^y e^t\,dt+\int_0^x \cos t\,dt=0$

Solución

Derivando con respecto a x, a la ecuación $\int_0^y e^t\,dt+\int_0^x \cos t\,dt=0$

$$e^y\frac{dy}{dx}+\cos x=0 \quad \text{entonces} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{e^y}$$

(4) Hallar $F'(x)$ siendo: $F(x)=\int_2^x\left(\int_8^y \frac{dt}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\right)dy$

Solución

Sea $f(y)=\int_8^y \frac{dt}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t} \Rightarrow f(x)=\int_8^x \frac{dt}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}$

Luego $F(x)=\int_2^x\left(\int_8^y \frac{dt}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\right)dy=\int_2^x f(y)\,dy$

Como $F(x)=\int_2^x f(y)\,dy \Rightarrow F'(x)=f(x)=\int_8^x \frac{dt}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}$

$$\therefore \quad F'(x)=\int_8^x \frac{dt}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}$$

(5) Hallar $F'(x)$ si $F(x)=\int_{x^3}^{3}\frac{dt}{t^2+9\operatorname{sen}t+15}$

Solución

$$F(x)=\int_{x^3}^{3}\frac{dt}{t^2+9\operatorname{sen}t+15}=-\int_{3}^{x^3}\frac{dt}{t^2+9\operatorname{sen}t+15},\text{ derivando}$$

$$\therefore\quad F'(x)=-\frac{3x^2}{x^6+9\operatorname{sen}x^3+15}$$

(6) Hallar $F'(x)$ si $F(x)=\int_{a}^{\operatorname{sen}x}\frac{dt}{\operatorname{arcsen}t}$

Solución

$$F(x)=\int_{a}^{\operatorname{sen}t}\frac{dt}{\operatorname{arcsen}t}\Rightarrow F'(x)=\frac{\cos x}{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}x)}=\frac{\cos x}{x}\qquad\therefore\quad F'(x)=\frac{\cos x}{x}$$

(7) Hallar la derivada $D_x(\int_{x}^{5}\sqrt{1+t^4}\,dt+\int_{1}^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt)$

Solución

$$D_x(\int_{x}^{5}\sqrt{1+t^4}\,dt+\int_{1}^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt)=D_x(-\int_{5}^{x}\sqrt{1+t^4}\,dt+\int_{1}^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt)$$

$$=-\sqrt{1+x^4}+2x\sqrt{1+x^8}$$

(8) Si $F(x)=\int_{x^3}^{x^2}\sqrt[4]{1+y^3}\,dy$, hallar $F'(x)$

Solución

$$F(x)=\int_{x^3}^{x^2}\sqrt[4]{1+y^3}\,dy=\int_{x^3}^{0}\sqrt[4]{1+y^3}\,dy+\int_{0}^{x^2}\sqrt[4]{1+y^3}\,dy$$

$F(x)=-\int_0^{x^3}\sqrt[4]{1+y^3}\,dy+\int_0^{x^2}\sqrt[4]{1+y^3}\,dy$, derivando tenemos:

$F'(x)=-3x^2\sqrt[4]{1+x^9}+2x\sqrt[4]{1+x^6}$

(9) Calcular $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_1^{x+1}\operatorname{sen} t\,dt-\int_1^{x}\operatorname{sen} t\,dt\right]$

Solución

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_1^{x+1}\operatorname{sen} t\,dt-\int_1^{x}\operatorname{sen} t\,dt\right]=\lim_{h\to 0}\frac{\int_1^{x+1}\operatorname{sen} t\,dt-\int_1^{x}\operatorname{sen} t\,dt}{h}=D_x\int_1^{x}\operatorname{sen} t\,dt=\operatorname{sen} x$$

$$\therefore\quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_1^{x+1}\operatorname{sen} t\,dt-\int_1^{x}\operatorname{sen} t\,dt\right]=\operatorname{sen} x$$

(10) Calcular $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[\int_1^{x}\operatorname{sen}^2 t\;dt-\int_1^{x+h}\cos^2 t\;dt-x]$

Solución

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_1^{x}\operatorname{sen}^2 t\,dt-\int_1^{x+h}\cos^2 t\,dt-x\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_0^{x}\operatorname{sen}^2 t\,dt+\int_0^{x}\cos^2 t\,dt+\int_x^{x+h}\cos^2 t\,dt-x\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_0^{x}(\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t)dt-\int_x^{x+h}\cos^2 t\,dt-x\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_0^{x}dt+\int_x^{x+h}\cos^2 t\,dt-x\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[x + \int_x^{x+h} \cos^2 t \, dt - x \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \cos^2 t \, dt = \cos^2 x$$

(11) Hallar $f(2)$ si $\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x)$

Solución

$\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x)$ derivando con respecto a x

$f(x) = 2x + 3x^2 \Rightarrow f(2) = 4 + 12 = 16$ $\therefore\ f(2) = 16$

(12) Si $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x^2(1+x)$. Hallar f(2)

Solución

$\int_0^{f(x)} t^2 dt = x^2(1+x)$, derivando con respecto a $x \Rightarrow f^2(x) f'(x) = 2x + 3x^2$

Integrando $\frac{f^3(x)}{3} = x^2 + x^3 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{3(x^2 + x^3)}$, evaluando en $x = 2$

$f(2) = \sqrt[3]{3(4+8)} = \sqrt[3]{36}$ $\therefore\ f(2) = \sqrt[3]{36}$

(13) Si $f(t)$ es una función continua en $[a,b]$ y $g(x)$ es una función diferenciable con valores en $[a,b]$. Demostrar que: $\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x)) \frac{d}{dx}(g(x))$

Solución

Sea $F(u)=\int_a^u f(t)\,dt$ entonces $F(g(x))=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$

Luego derivando $\int_a^{g(x)} f(t)\,dt=F(g(x))$ con respecto a x

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(F(g(x))=F'(g(x)).\frac{d}{dx}(g(x)) \qquad \ldots (1)$$

como $F(u)=\int_a^u f(t)\,dt \;\Rightarrow\; F'(u)=f(u)$

$F'(g(x))=f(g(x))$ donde $u=g(x)$ $\qquad \ldots (2)$

ahora reemplazando (2) en (1) se tiene: $\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt=f(g(x))\frac{d}{dx}(g(x))$

(14) Calcular la integral $\int_0^1 (2x^2+4x+1)dx$

Solución

Aplicando el segundo teorema fundamental del calculo.

$$\int_0^1 (2x^2+4x+1)dx=\left(\frac{2x^3}{3}+2x^2+x\right)\Bigg|_0^1=(\frac{2}{3}+2+1)-(0)=\frac{11}{3}$$

(15) Calcular la integral $\int_1^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

Solución

$$\int_1^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx=\frac{1}{3}\int_1^2 (x^3+1)^{\frac{1}{2}}3x^2dx=\frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2$$

$$=\frac{2}{9}(8+1)^{3/2}-\frac{2}{9}(1+1)^{3/2}=\frac{2}{9}(27-2\sqrt{2})$$

(16) Calcular la integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

Solución

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+2)\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2$$

(17) Calcular la integral $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x \cos x \, dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x}$

Solución

Sea $z = a^2\cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x$, diferenciando tenemos:

$$dz = (-2a^2 \operatorname{sen} x \cos x + 2b^2 \operatorname{sen} x \cos x)dx = 2(b^2 - a^2)\operatorname{sen} x \cos x \, dx$$

ahora a la integral dada escribiremos así:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x \cos x \, dx}{a^2\cos^2 x + b^2\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2(b^2-a^2)} \int_0^{\pi/2} \frac{2(b^2-a^2)\operatorname{sen} x \cos x \, dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x}$$

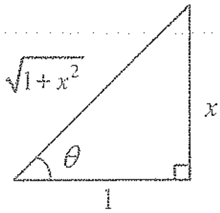
$$= \frac{1}{2(b^2-a^2)} \ln\left|a^2\cos^2 x + b^2\operatorname{sen}^2 x\right| \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2(b^2-a^2)}\left[\ln b^2 - \ln a^2\right] = \frac{1}{b^2-a^2}\ln(\frac{b}{a})$$

(18) Calcular la integral $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$

Solución

En esta integral hacemos una sustitución y también cambiaremos los límites para facilitar los cálculos. (Por sustitución trigonométrica).



Sea $\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = x \\ x = \operatorname{tg}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \operatorname{arctg} x \\ dx = \sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

Además: $\operatorname{tg}\theta = x$, para $\begin{cases} x = 1 \quad , \quad \theta = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \sqrt{3} \quad , \quad \theta = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{cosec}\theta.\sec^2\theta\, d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3} (\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{tg}\theta.\sec\theta)\, d\theta$$

$$= \left[\ln\left|\operatorname{cosec}\theta - c\operatorname{tg}\theta\right| + \sec\theta\right]\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \left(\ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| + 2\right)$$

$$= (\ln|\sqrt{2}-1| + \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{6}-\sqrt{3})$$

(19) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\, dx$

Solución

Haciendo: $\begin{cases} u = x \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

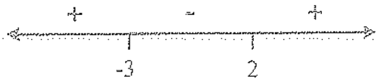
$$\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} x\, dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\, dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi} = -(-\pi - 0) + (0-0) = \pi$$

(20) Calcular la integral $\displaystyle\int_{-4}^{4} \left|x^2 + x - 6\right| dx$

Solución

En el cálculo de integrales con un valor absoluto se debe determinar el signo de la expresión dentro de las barras, mediante el criterio del punto crítico. (en caso que el integrando tenga más de un valor absoluto se define los valores absolutos) es decir:

$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$



Luego el criterio sobre el cual se realiza la integración se expresa en dos o más subintervalos, es decir: $[-4,4]=[-4,-3]\cup[-3,2]\cup[2,4]$

$$\int_{-4}^{4}|x^2+x-6|\,dx=\int_{-4}^{-3}|x^2+x-6|\,dx+\int_{-3}^{2}|x^2+x-6|\,dx+\int_{2}^{4}|x^2+x-6|\,dx$$

$$=\int_{-4}^{-3}(x^2+x-6)dx-\int_{-3}^{2}(x^2+x-6)dx+\int_{2}^{4}(x^2+x-6)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x\right)\Bigg|_{-4}^{-3}-\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x\right)\Bigg|_{-3}^{2}+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x\right)\Bigg|_{2}^{4}$$

$$=\left[(-9+\frac{9}{2}+18)-(-\frac{64}{3}+8+24)\right]-\left[(\frac{8}{3}+2-12)-(-9+\frac{9}{2}+18)\right]+$$

$$+\left[(\frac{64}{3}+8-24)-1(\frac{8}{3}+2-12)\right]$$

$$=\left[(9+\frac{9}{2})-(-\frac{64}{3}+32)\right]-\left[(\frac{8}{3}-10)-(9+\frac{9}{2})\right]+\left[(\frac{64}{3}-16)-(\frac{8}{3}-10)\right]$$

$$=(\frac{64}{3}+\frac{9}{2}-23)-(\frac{8}{3}-\frac{9}{2}-19)+(\frac{56}{3}-6)=\frac{109}{3}$$

(21) Calcular la integral $\int_{-2}^{4}\left|\frac{x+1}{x+6}\right|dx$

Solución

De acuerdo al comentario del problema (20) determinaremos el signo de la expresión $\frac{x+1}{x+6}$ mediante el criterio de los puntos críticos.

Luego $[-2,4]=[-2,-1]\cup[-1,4]$

$$\int_{-2}^{4}\left|\frac{x+1}{x+6}\right|dx=\int_{-2}^{-1}\left|\frac{x+1}{x+6}\right|dx+\int_{-1}^{4}\left|\frac{x+1}{x+6}\right|dx=-\int_{-2}^{-1}\frac{x+1}{x+6}dx+\int_{-1}^{4}\frac{x+1}{x+6}dx$$

$$=-\int_{-2}^{-1}(1-\frac{5}{x+6})dx+\int_{-1}^{4}(1-\frac{5}{x+6})dx$$

$$=-\left(x-5\ln|x+6|\right)\Big|_{-2}^{-1}+\left(x-5\ln|x+6|\right)\Big|_{-1}^{4}$$

$$=-\left[(-1-5\ln 5)-(-2-5\ln 4)\right]+\left[(4-5\ln 10)-(-1-5\ln 5)\right]$$

$$=-\left[1+5\ln(\frac{4}{5})\right]+5+5\ln(\frac{5}{10})=4-5\ln(\frac{5}{8})$$

(22) Calcular la integral $\int_{-1}^{2}[\![2x]\!]\,dx$

Solución

Sea $z=2x \Rightarrow dx=\frac{dz}{2}$ además para $x=-1$; $z=-2$; $x=2$; $z=4$

$$\int_{-1}^{2}[\![2x]\!]dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}[\![z]\!]dz=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1}[\![z]\!]dz+\int_{-1}^{0}[\![z]\!]dz+\int_{0}^{1}[\![z]\!]dz+\int_{1}^{2}[\![z]\!]dz+\int_{2}^{3}[\![z]\!]dz+\int_{3}^{4}[\![z]\!]dz\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1}-2\,dz+\int_{-1}^{0}-dz+\int_{0}^{1}0\,dz+\int_{1}^{2}dz+\int_{2}^{3}2\,dz+\int_{3}^{4}3\,dz\right]$$

$$=\frac{1}{2}[-2-1+0+1+2+3]=\frac{3}{2}$$

(23) Calcular la integral $\int_{-1}^{3}\left([\![x]\!]+\left[\!\!\left[x+\frac{1}{2}\right]\!\!\right]\right)dx$

Solución

$$x \in [-1,0> \;\Rightarrow\; \begin{cases} -1 \le x < 0 \\ -\dfrac{1}{2} \le x+\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2} \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} [\![x]\!] = -1 \\ \left[\!\!\left[x+\dfrac{1}{2}\right]\!\!\right] = 0 \end{cases}$$

$$x \in [0,1> \;\Rightarrow\; \begin{cases} 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{2} \le x+\dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{2} \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} [\![x]\!] = 0 \\ \left[\!\!\left[x+\dfrac{1}{2}\right]\!\!\right] = 1 \end{cases}$$

$$x \in [1,2> \;\Rightarrow\; \begin{cases} 1 \le x < 2 \\ \dfrac{3}{2} \le x+\dfrac{1}{2} < \dfrac{5}{2} \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} [\![x]\!] = 1 \\ \left[\!\!\left[x+\dfrac{1}{2}\right]\!\!\right] = 2 \end{cases}$$

$$x \in [2,3> \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2 \le x < 3 \\ \dfrac{5}{2} \le x+\dfrac{1}{2} < \dfrac{7}{2} \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} [\![x]\!] = 2 \\ \left[\!\!\left[x+\dfrac{1}{2}\right]\!\!\right] = 3 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{3}\left([\![x]\!]+\left[\!\!\left[x+\frac{1}{2}\right]\!\!\right]\right)dx = \int_{-1}^{0}(-1+0)\,dx + \int_{0}^{1}(0+1)\,dx + \int_{1}^{2}(1+2)\,dx + \int_{2}^{3}(2+3)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} -dx + \int_{0}^{1} dx + \int_{1}^{2} 3\,dx + \int_{2}^{3} 5\,dx$$

$$= -(0+1) + (1-0) + (6-3) + (15-10) = -1+1+3+5 = 8$$

24. Calcular la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^7-3x^5+7x^3-x}{\cos^2 x}\,dx$

Solución

Cuando la integración se realiza sobre un intervalo de la forma $[-a,a]$ se debe ver si la función es par o impar es decir:

$$f(x) = \frac{x^7-3x^5+7x^3-x}{\cos^2 x} \;\Rightarrow\; f(-x) = -\frac{x^7-3x^5+7x^3-x}{\cos^2 x} = -f(x)$$

Luego como $f(-x)=-f(x)$ la función es impar entonces por la propiedad (13) se tiene: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^7-3x^5+7x^3-x}{\cos^2 x}dx=0$

(25) Calcular la integral $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{c\operatorname{tg} x}}$

Solución

Sea $z=\dfrac{\pi}{2}-x \Rightarrow dx=-dz$ para $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6} & ; \quad z=\dfrac{\pi}{3} \\ x=\dfrac{\pi}{3} & ; \quad z=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$, reemplazando se tiene:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}=-\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}\,dz}{\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}+\sqrt{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}}=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\operatorname{ctg} z}\,dz}{\sqrt{\operatorname{tg} z}+\sqrt{\operatorname{ctg} z}}\ ,\ (z=x)$$

Luego $$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}\,dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{ctg} x}} \qquad \ldots (1)$$

Sumando ambos miembros de la ecuación (1) la integral $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$ es decir:

$$2\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}+\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}\,dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}dx=\int_{\pi/6}^{\pi/3}dx=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}=\frac{\pi}{12}$$

(26) Calcular la integral $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{sen} x} dx}{e^{\cos x}+e^{\operatorname{sen} x}}$

Solución

Sea $z=\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow dx=-dz$, para $\begin{cases} x=0 & ; \quad z=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2} & ; \quad z=0 \end{cases}$, reemplazando se tiene:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{sen} x} dx}{e^{\cos x}+e^{\operatorname{sen} x}}=-\int_{\pi/2}^0 \frac{e^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)} dz}{e^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}+e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}}=\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\cos z} dz}{e^{\operatorname{sen} z}+e^{\cos z}}, \quad (z=x)$$

Luego $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\cos x} dx}{e^{\operatorname{sen} x}+e^{\cos x}}=\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\cos x} dx}{e^{\operatorname{sen} x}+e^{\cos x}}$, ahora sumando a ambos miembros de la ecuación la integral $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{sen} x} dx}{e^{\operatorname{sen} x}+e^{\cos x}}$ es decir:

$$2\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{sen} x} dx}{e^{\operatorname{sen} x}+e^{\cos x}}=\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{sen} x} dx}{e^{\operatorname{sen} x}+e^{\cos x}}+\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\cos x} dx}{e^{\operatorname{sen} x}+e^{\cos x}}$$

$$2\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{sen} x} dx}{e^{\operatorname{sen} x}+e^{\cos x}}=\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{sen} x}+e^{\cos x}}{e^{\operatorname{sen} x}+e^{\cos x}} dx=\int_0^{\pi/2} dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{sen} x} dx}{e^{\operatorname{sen} x}+e^{\cos x}}=\frac{\pi}{4}$$

(27) Calcular la integral $\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x \, dx}{1+\cos^2 x}$

Solución

Aplicando la propiedad $\int_0^a f(x) dx=\int_0^a f(a-x) dx$

$$\int_0^{\pi}\frac{x\,\text{sen}\,x\,dx}{1+\cos^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\,\text{sen}\,(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\,\text{sen}\,x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$\int_0^{\pi}\frac{x\,\text{sen}\,x\,dx}{1+\cos^2 x}=\pi\int_0^{\pi}\frac{\text{sen}\,x\,dx}{1+\cos^2 x}-\int_0^{\pi}\frac{x\,\text{sen}\,x\,dx}{1+\cos^2 x}\text{, transponiendo términos}$$

$$2\int_0^{x}\frac{x\,sen\,x\,dx}{1+\cos^2 x}=-\pi\,arctg(\cos x)\Big|_0^{k}=-\pi(arctg(-1)-arctg(1))=-\pi(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi^2}{2}$$

$$\therefore\quad\int_0^{\pi}\frac{x\,\text{sen}\,x\,dx}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi^2}{4}$$

(28) Sí $\int_0^{\pi/2}(f'(x)+f'''(x))\cos x\,dx=9$ y $f''(0)=7$. Hallar $f'(\frac{\pi}{2})$

Solución

$$\int_0^{\pi/2}(f'(x)+f'''(x))\cos x\,dx=\int_0^{\pi/2}f'(x)\cos x\,dx+\int_0^{\pi/2}f'''(x)\cos x\,dx \quad\ldots(1)$$

Calculando la integral $\int_0^{\pi/2}f'(x)\cos x\,dx$ por partes:

$$\begin{cases}u=f'(x)\\dv=\cos x\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f''(x)\,dx\\v=\text{sen}\,x\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2}f'(x)\cos x\,dx=\text{sen}\,x\,f'(x)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}f''(x)\,\text{sen}\,x\,dx \quad\ldots(2)$$

ahora calculamos la integral $\int_0^{\pi/2}f'''(x)\cos x\,dx$ por partes:

$$\begin{cases}u=\cos x\\dv=f'''(x)\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\text{sen}\,x\,dx\\v=f''(x)\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2} f'''(x)\cos x\,dx = \cos x\, f''(x)\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} f''(x)\operatorname{sen} x\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2} f'''(x)\cos x\,dx = -f''(0) + \int_0^{\pi/2} f'''(x)\operatorname{sen} x\,dx \qquad \ldots (3)$$

reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene:

$$f'(\frac{\pi}{2}) - \int_0^{\pi/2} f''(x)\operatorname{sen} x\,dx - f''(0) + \int_0^{\pi/2} f''(x)\operatorname{sen} x\,dx = 9$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) - 7 = 9 \qquad \therefore \quad f'(\frac{\pi}{2}) = 16$$

(29) Calcular la integral $\int_{-1}^{3} \frac{|x|\,dx}{2[\![x]\!]x+20}$

Solución

$$\int_{-1}^{3} \frac{|x|\,dx}{2[\![x]\!]x+20} = \int_{-1}^{0} \frac{|x|\,dx}{2[\![x]\!]x+20} + \int_{0}^{1} \frac{|x|\,dx}{2[\![x]\!]x+20} + \int_{1}^{2} \frac{|x|\,dx}{2[\![x]\!]x+20} + \int_{2}^{3} \frac{|x|\,dx}{2[\![x]\!]x+20}$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{-x\,dx}{-2x+20} + \int_0^1 \frac{x\,dx}{20} + \int_1^2 \frac{x\,dx}{2x+20} + \int_2^3 \frac{x\,dx}{4x+20}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{10}{x-10}\right)dx + \int_0^1 \frac{x}{20}\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2\left(1-\frac{10}{x-10}\right)dx + \frac{1}{4}\int_2^3\left(1-\frac{5}{x+5}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x+10\ln|x-10|\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{40}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\left(x-10\ln|x+10|\right)\Big|_1^2 + \frac{1}{4}\left(x-5\ln|x+5|\right)\Big|_2^3$$

$$= 5\ln\frac{10}{11} + \frac{1}{2} + \frac{1}{40} + \frac{1}{2} + 5\ln\frac{11}{12} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\ln\frac{7}{8} = \frac{51}{40} + 5\ln\frac{5}{6} + \frac{5}{4}\ln\frac{7}{8}$$

(30) Sean f y g dos funciones integrables sobre $[a,b]$, pruebe la desigualdad de CAUCHY – SCHWARZ.: $\left(\int_a^b f(x).g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f(x)^2\,dx.\int_a^b g(x)^2\,dx$

Solución

Para todo real λ se tiene $\int_a^b (f(x)+\lambda g(x))^2 dx \geq 0$

$$\int_a^b f(x)^2 dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \lambda^2 \int_a^b g(x)^2 dx \geq 0 \qquad \ldots (1)$$

Sea $A^2 = \int_a^b f(x)^2 dx$, $B^2 = \int_a^b g(x)^2 dx$, $C = \int_a^b f(x).g(x)dx \qquad \ldots (2)$

Reemplazando (2) en (1) se tiene: $A^2 + 2\lambda c + \lambda^2 B^2 \geq 0 \qquad \ldots (3)$

a la ecuación (3) se expresa así: $\lambda^2 + \frac{2C}{B^2}\lambda + \frac{A^2}{B^2} \geq 0$, completando cuadrados

$$\lambda^2 + \frac{2C}{B^2}\lambda + \frac{C^2}{B^4} + \frac{A^2}{B^2} - \frac{C^2}{B^4} \geq 0$$

$$(\lambda + \frac{C}{B^2})^2 + \frac{A^2}{B^2} - \frac{C^2}{B^4} \geq 0 \qquad \ldots (4)$$

ahora (4) es cierto sí y sólo sí $\frac{A^2}{B^2} - \frac{C^2}{B^4} \geq 0$

$A^2B^2 - C^2 \geq 0$ de donde $C^2 \leq A^2B^2$

por lo tanto: $\left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx . \int_a^b g(x)^2 dx$

(31) Calcular: $\int_{-1}^{3} [\![2x]\!] dx$

Solución

Si $x \in [-1,3] \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$

$\Rightarrow -2 \leq 2x \leq 6$

$$\Rightarrow \ [\![2x]\!] = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Si $[\![2x]\!] = n \ \Rightarrow \ n \le 2x < n+1$

$$\Rightarrow \ \frac{n}{2} \le x < \frac{n+1}{2}, \ n = -2, -1, 0, \ldots, 6$$

$$\int_{-1}^{3} [\![2x]\!]dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} [\![2x]\!]dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} [\![2x]\!]dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} [\![2x]\!]dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} [\![2x]\!]dx$$

$$+\int_{1}^{\frac{3}{2}} [\![2x]\!]dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} [\![2x]\!]dx + \int_{2}^{\frac{5}{2}} [\![2x]\!]dx + \int_{\frac{5}{2}}^{3} [\![2x]\!]dx$$

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} -2\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} -dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} 0\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1\,dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} 2\,dx$$

$$+\int_{\frac{3}{2}}^{2} 3\,dx + \int_{2}^{\frac{5}{2}} 4\,dx + \int_{\frac{5}{2}}^{3} 5\,dx$$

$$= -2x\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} - x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} + 0 + x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + 2x\Big|_{1}^{\frac{3}{2}} + 3x\Big|_{\frac{3}{2}}^{2} + 4x\Big|_{2}^{\frac{5}{2}} + 5x\Big|_{\frac{5}{2}}^{3}$$

$$= -(-1+2) - (0+\frac{1}{2}) + (1-\frac{1}{2}) + (3-2) + (6-\frac{9}{2}) + (10-8) + (15-\frac{25}{2})$$

$$= -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 6 - \frac{9}{2} + 2 + 15 - \frac{25}{2} = 23 - 17 = 6$$

$$\therefore \ \int_{-1}^{3} [\![2x]\!]dx = 6$$

(32) Evaluar: $\int_{0}^{2} [\![x^2]\!]dx$

Solución

Si $x \in [0,2] \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$ ... (1)

$0 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow [\![x^2]\!] = 0,1,2,3,4$ ... (2)

Sea $[\![x^2]\!] = n \Rightarrow 0 < n \leq x^2 < n+1$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \leq |x| < \sqrt{n+1}$$

De (1) se tiene $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$ entonces

$$\Rightarrow \sqrt{n} \leq x < \sqrt{n+1} \qquad \text{... (3)}$$

Luego de (2) y (4) se tiene:

$$\int_0^2 [\![x^2]\!]dx = \int_0^1 0\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} 1\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2\,dx + \int_{\sqrt{3}}^{2} 3\,dx$$

$$= 0 + x\Big|_1^{\sqrt{2}} + 2x\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} + 3x\Big|_{\sqrt{3}}^{2} = \sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 6 - 3\sqrt{3} = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$\therefore \int_0^2 [\![x^2]\!]dx = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

2.8 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Calcular $F'(x)$ siendo:

1. $F(x) = \int_0^x e^t \ln t \; dt$ Rpta. $F'(x) = e^x \ln x$

2. $F(x) = \int_2^{x^4} \operatorname{senh} t \; dt$ Rpta. $F'(4x) = 4x^3 \operatorname{senh}(x^4)$

③ $F(x)=\int_x^5 \sqrt{1+t^4}\,dt$ **Rpta.** $F'(x)=-\sqrt{1+x^4}$

④ $F(x)=\int_1^{x^2} \sqrt{1+t^4}\,dt$ **Rpta.** $F'(x)=2x\sqrt{1+x^8}$

⑤ $F(x)=\int_{-x}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$ **Rpta.** $F'(x)=\frac{2}{1+x^2}$

⑥ $F(x)=\int_1^{2x} \cosh(2t^2+1)dt$ **Rpta.** $F'(x)=2\cosh(8x^2+1)$

⑦ $F(x)=\int_a^{\int_a^x \frac{dt}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2}$ **Rpta.** $F'(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)\left[1+\left(\int_a^x \frac{dt}{1+t^2}\right)^2\right]}$

⑧ $F(x)=\operatorname{sen}\left(\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t\,dt\right)dy\right)$

Rpta. $F'(x)=\cos\left(\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t\,dt\right)dy.\operatorname{sen}\left(\int_0^x \operatorname{sen}^3 t\,dt\right)\right)$

⑨ $F(x)=\int_0^{\int_0^{x^3}\frac{dt}{1+\operatorname{sen}^2 t}} \frac{dt}{1+\operatorname{sen}^2 t}$ **Rpta.** $F'(x)=\dfrac{3x^2}{(1+\operatorname{sen}^2 x^3)\left[1+\left(\int_0^{x^3} \frac{dt}{1+\operatorname{sen}^2 t}\right)^2\right]}$

⑩ $F(x)=\int_{x^3}^{x} \left(\frac{1}{3t+t^2}+\sqrt{1+t^4}\right)dt$

Rpta. $F'(x)=\frac{x^3-3x-6}{x(x+3)(x^2+3)}+\sqrt{1+x^4}-3x^2\sqrt{1+x^{12}}$

⑪ $F(x)=\int_0^{2x} \frac{\operatorname{sen} t\,dt}{t}$ **Rpta.** $F'(x)=\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

(12) $F(x)=\int_{2}^{e^x}\frac{\ln t}{t}dt$ Rpta. $F'(x)=\frac{x}{e^x}$

(13) $F(x)=\int_{x^2}^{1}\ln t\ dt$ Rpta. $F'(x)=-4x\ln x$

(14) $F(x)=\int_{x}^{x^2}\ln^2 t\ dt$ Rpta. $F'(x)=2x\ln^2 x^2-\ln^2 x$

(15) $F(x)=\int_{\operatorname{sen} x}^{x^2}(\cos t+t^2)dt$

Rpta. $F'(x)=2x(\cos x^2+x^4)-(\cos(sen\,x)+\operatorname{sen}^2 x)\cos x$

(16) $F(x)=\int_{0}^{x}x^2 f(t)\,dt$ Rpta. $F'(x)=2x\int_{0}^{x}f(t)\,dt+x^2 f(x)$

(17) $F(x)=\int_{a}^{x^3}\frac{dt}{1+\operatorname{sen}^2 t}$ Rpta. $F'(x)=\frac{3x^2}{1+\operatorname{sen}^2 x^3}$

(18) $F(x)=\int_{x}^{a}\frac{dt}{1-t-\operatorname{sen} t}$ Rpta. $F'(x)=\frac{1}{\operatorname{sen} x+x-1}$

(19) $F(x)=\int_{\operatorname{sen} x}^{b}\frac{dt}{1+\cos^2 t}$ Rpta. $F'(x)=\frac{-\cos x}{1+\cos^2(\operatorname{sen} x)}$

(20) $F(x)=\int_{a}^{b}\frac{x\,dt}{2+t^3-c\operatorname{tg}^2 t}$ Rpta. $F'(x)=\int_{a}^{b}\frac{dt}{2+t^3-c\operatorname{tg}^2 t}$

(21) $F(x)=\int_{3}^{x^2}\frac{dt}{1+\operatorname{sen}^6 t+t^2}$ Rpta. $F'(x)=\frac{2x}{1+\operatorname{sen}^6 x^2+x^4}$

(22) $F(x)=\int_{2}^{\operatorname{tg} x}\frac{dt}{1+t^2}$ Rpta. $F'(x)=\frac{\sec^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 t}=1$

(23) $F(x)=\int_{-3}^{\operatorname{tg} x}\frac{dt}{1-\operatorname{tg}^2 t}$ **Rpta.** $F'(x)=\frac{\sec^2 x}{1-\operatorname{tg}^2(\operatorname{tg} x)}$

(24) $F(x)=\int_{-2}^{x}\frac{x^2 dt}{\operatorname{tg} t^2}$ **Rpta.** $F'(x)=2x\int_{-2}^{x}\frac{dt}{\operatorname{tg} t^2}+\frac{x^2}{\operatorname{tg} x^2}$

(25) $F(x)=\int_{\sqrt{2}}^{\int_a^b \sec^3 x\,dx}\frac{\sqrt[3]{t^2}}{1-x^3}dx$ **Rpta.** $F'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{t}}\int_{\sqrt{2}}^{\int_a^b \sec^3 x\,dx}\frac{dx}{1-x^3}$

(26) $F(x)=\int_{-x}^{x}\left[\int_{t^2}^{2+t^2}\sqrt{1-u^2}\,du\right]dt$ **Rpta.** $F''(x)=4x\left[\sqrt{1-(2+x^2)^2}-\sqrt{1-x^4}\right]$

(27) $F(x)=\int_{1+x^2}^{\operatorname{tg} x}\frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$ **Rpta.** $F'(x)=\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} 2x}-\frac{2x\operatorname{sen}(1+x^2)}{1+x^2}$

(28) $F(x)=\int_{x^2}^{x^3}\sqrt[3]{1+y^3}\,dy$ **Rpta.** $F'(x)=x\left[3x\sqrt[3]{1+x^9}-2\sqrt[3]{1+x^6}\right]$

II.

(1) Sea f una función continua $\forall\, x$ que cumple la relación:

$$\int f(t)\,dt=-\frac{1}{2}+x\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+x^2 \text{, calcular } f(\frac{\pi}{4}) \text{ y } f'(\frac{\pi}{4})$$

Rpta. $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}$, $f'(\frac{\pi}{4})=2-\pi$

(2) Calcular $F'(\frac{\pi}{2})$ si $F(x)=\int_{x}^{g(x)}x\arcsin(\frac{t}{x})dt$ y $g(x)=\int_{0}^{x}(\operatorname{sen} t+t\cos t)\,dt$

Rpta. 0

(3) Si f es continua y $x^4=\int_0^x (f(t))^3\,dt+17x$. Hallar $f(3)$ **Rpta.** $f(3)=\sqrt[3]{91}$

(4) Si $\int_{3}^{\operatorname{tg} x} f(t)\,dt = g(x)$ y $f(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$. Hallar $g(x)$ Rpta. $g(x) = -x + c$

(5) Si $\int_{0}^{x^2+4x} f(t)\,dt = 2x+3$. Hallar $f(12)$ Rpta. $f(12) = \dfrac{1}{4}$

(6) Si $\int_{-2}^{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}} f(t)\,dt = \dfrac{1}{2}\ln\left|\sec 2x + \operatorname{tg} 2x\right|$. Hallar $f(\dfrac{\pi}{2})$ Rpta. $\dfrac{1}{4-\pi^2}$

(7) Si $\int_{3}^{\operatorname{sen} x} f(t)\,dt = -2\sqrt{1-\operatorname{sen} x}$. Hallar $f(x)$ Rpta. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

(8) Si $\int_{k}^{\operatorname{sen} t} f(t)\,dt = g(x)$ y $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Hallar $g(\pi)$ Rpta. $\pi - 1$

(9) Si $\int_{a}^{\cos x} f(t)\,dt = x - \dfrac{\operatorname{tg} x}{2}$. Hallar $f(\dfrac{1}{2})$ Rpta. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(10) Una función g definida para todo número real positivo satisface lo siguiente: $g(1) = 1$ y $g'(x^2) = x^3$, $\forall\, x > 0$. Calcular $g(4)$ Rpta. $g(4) = \dfrac{67}{5}$

(11) Si $\int_{0}^{x^2} f(t)\,dt = x^2(1+x)$ Hallar $f(2)$ Rpta. $\dfrac{2+3\sqrt{2}}{2}$

(12) Sea $f(t) = \sqrt{4+t^2} + \int_{-2}^{t} \dfrac{du}{\sqrt{4+u^2}}$, si se define $H(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt$.

Calcular $D^2 H(x)$ para $x = 1$. Rpta. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(13) Si $\int_{\sqrt{3}}^{x^2+1} f(t)\,dt = \sqrt{x} + \sqrt{3}$. Hallar $f(17)$ Rpta. $\dfrac{1}{32}$

(14) Sea f una función derivable tal que $f(0)=f'(0)=0$ se define las funciones:

$$g(x)=\int_0^x f(u)u\,,\quad H(x)=\int_{-g(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\,;$$ Hallar $D^2H(x)$ para $x=0$

Rpta. 200

(15) Si $\int_0^{\frac{1}{3x+1}} f(t)\,dt=\frac{2}{ax}+ax$, Hallar el valor o valores de a para que $f(\frac{1}{4})=\frac{16}{3}$

Rpta. $a=-2$ ó 1

(16) Demuestre que: $\int_a^b \frac{2x\,dx}{1+x^2}=\int_{1+a^2}^{1+b^2}\frac{dt}{t}$

(17) Si $f(t)=t+\int_0^t \sqrt{1-u^2}\,du$; $H(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$ entonces $D^2H(x)$. **Rpta.** 0

(18) Demostrar que si f es continua, entonces: $\int_0^x f(u)(x-u)\,du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\right)du$

sugerencia considerar $F(x)=\int_0^x f(u)(x-u)\,du$ después derivar $F'(x)=\int_0^x f(u)\,du$ enseguida hallar un antiderivada y calcular la constante de integración calcular $F(0)$.

(19) Aplicando el ejercicio (18), demostrar que:

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du=2\int_0^x\left(\int_0^{u_2}\left(\int_0^{u_1} f(t)\,dt\right)du_1\right)du_2$$

(20) Si $H(x)=\int_{g(x)(1-\sqrt{1-x^2})}^{f(1)}\frac{dt}{t^2}$ en donde $\int_{\sqrt{3}}^{\operatorname{arcsen}(\cos x)} f(\operatorname{sen} t)\,dt=\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}$ y

$\int_{\sqrt{2}}^{\operatorname{sen} x}\sqrt{g(t)}\,dt=\sqrt{1-\cos x}$. Hallar $H'(x)$ **Rpta.** $H'(x)=-\frac{8}{x^3}$

(21) Sea f una función derivable tal que $f(0)=f'(0)=a$, se define las siguientes funciones: $g(x)=\int_0^x f(u)\,du$; $H(x)=\int_0^{g(x)} b\,f(t)\,dt$ donde "a", "b" son constantes. Calcular $H'(x)$ para $x=0$. **Rpta.** $H'(0)=a^2b$

(22) Existe una función f definida y continúa $\forall\ x\in\mathbb{R}$ que satisface una ecuación de la forma $\int_0^x f(t)\,dt=\int_x^1 t^2 f(t)\,dt+\frac{x^{16}}{8}+\frac{x^{18}}{9}+c$, donde c es una constante. Encontrar una fórmula explícita para $f(x)$ y hallar el valor de la constante c.

Rpta. $F(x)=2x^{15}$; $c=-\frac{1}{9}$

(23) Si $0<a<x<\frac{\pi}{2}$. Calcular $D_x^2\left\{\int_a^x\left[\frac{\operatorname{tg}x}{t}+\int_t^a\frac{du}{1+\cos u}\right]dt\right\}$ en $x=\frac{\pi}{4}$

Rpta. $\frac{8(\pi-2)}{\pi^2}-2+\sqrt{2}$

(24) Sea f una función derivable $f(1)=f'(1)=f''(1)=1$ se define la función: $G(x)=\int_0^{f(x)} x\,f(u)\,du$. Hallar la segunda derivada de G en el punto $x=1$.

Rpta. $G''(1)=4$

(25) Si $F(x)=\int_{x^2+1}^{x+x^2} 2^{-t^2}\,dt$. Calcular $F'(x)$, $F'(1)$

Rpta. $F'(x)=-x.2^{-x^4+2x^2}+(1+2x)2^{-(x+x^2)^2}$; $F'(1)=-\frac{29}{16}$

(26) Sea $F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\,dt$, donde $f\colon I\to\mathbb{R}$ es una función continua y $\varphi_1,\varphi_2: J\to I$ son funciones derivables. Probar que: $F'(x)=f(\varphi_2(x))\varphi_2'(x)-f(\varphi_1(x)).\varphi_1'(x)$

(27) Calcular el límite $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(x-\int_0^x \frac{t^2dt}{1+t^2}-\int_0^{x+h}\frac{dt}{1+t^2}\right)$ Rpta. $-\frac{1}{1+x^2}$

(28) Calcular $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\sqrt{\pi/2+7h}}^{\sqrt{\pi/2-8h}} sen(t^2)dt$ Rpta. $-\frac{15}{\sqrt{2}}$

(29) Calcular $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}(x-\int_0^{x+h} sen^2 t\,dt-\int_0^{x+h}\cos^2 t\,dt)$ Rpta. 1

(30) Calcular $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\int_0^{sen\,x}\sqrt{tg\,t}\,dt}{\int_0^{tg\,x}\sqrt{sen\,t}\,dt}$ Rpta. 1

(31) Calcular $\lim\limits_{h\to 0}\int_{6h}^{-8h}\sec t^2\,dt$ Rpta. -14

(32) Si f(x) es continua en [0,3] calcular $\lim\limits_{h\to 0}\int_2^{\frac{4}{2-h}} f(t)dt$ Rpta. f(2)

(33) Sea f una función continua. Se define las funciones siguientes: $H(t)=t^3+\int_0^1 f^2(u)du$, $G(x)=\int_0^{x^2} x^2H(t)dt$. Hallar la segunda derivada de G en el punto x = 1 si $\int_0^1 f^2(u)du=a$. Rpta. $G''(1)=\frac{3}{2}(15+8a)$

(34) Usando el criterio de la segunda derivad compruebe que la función definida por: $f(x)=\int_{-x^2-1}^{x^2+1}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$, alcanza su valor mínimo en x = 0.

(35) Calcular $D_y^2F(y)$ para y = 2 donde: $F(y)=\int_{1-4y}^{1+4y} g(x)dx$ y $g(x)=(-1+x)^{\frac{1}{3}}+\int_0^x\frac{du}{(-1+u)^{\frac{1}{3}}}$ Rpta. $D_y^2F(2)=\frac{32}{3}$

(36) Encontrar una función f(x) y un valor de la constante c, tal que: $\int_c^x t\,f(t)dt = sen\,x - x\cos x - \dfrac{x^2}{2}$, $\forall$ x Rpta. f(x) = sen x − 1, c = 0

(37) Sea f una función continua sobre <-∞,∞>, tal que $f(1) = f'(1) = 1$, se define $H(x) = \int_0^{x^3} (x^2 - a) f(t)dt$ sabiendo que $\int_0^1 f(t)dt = 8a$. Calcular $H''(1)$

Rpta. $H''(1) = 27 + a$

(38) Dada la función f(x) definida para todo x por la fórmula $f(x) = 3 + \int_0^x \dfrac{1 + sen\,t}{2 + t^2} dt$, hallar las constantes "a", "b" y "c" del polinomio cuadrático $P(x) = a + bx + cx^2$ sabiendo que: P(0) = f(0), $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$.

Rpta. a = 3, $b = \dfrac{1}{2}$, $c = \dfrac{1}{4}$

(39) Sea f una función continua en $\mathbb{R}$, y $F(x) = \int_0^x f(u)(x-u)^2 dy$, x $\in$ $\mathbb{R}$. Hallar $F''(x)$ en su forma más simplificada.

(40) Si f es periódica de periodo P continua en $\mathbb{R}$ se define $G(x) = \int_0^x f(t)dt$. Demostrar que:

a) Si f es impar g es una función par b) G(x + p) = G(x) + G(p)

(41) Probar que si x > 1, $\ln x = \int_1^x \dfrac{dt}{t} \leq \int_1^x \dfrac{dt}{\sqrt{t}} = 2(\sqrt{x} - 1)$

(42) Pruebe que si $f(x) = \int_0^x f(t)dt$, $\forall$ x entonces f(x) = 0, $\forall$ x

(43) Demostrar que si H es continúa F y G derivables $J(x) = \int_{F(x)}^{G(x)} H(t)dt$ entonces $J'(x) = H(G(x))G'(x) - H(F(x))F'(x)$.

(44) Sea f una función real, biyectiva, creciente y derivable, se define $I(x)=\int_a^{f(x)} f^{-1}(t)dy$, $\forall$ x $\in \mathbb{R}$. Demostrar que si a < b, entonces $\exists$ c $\in$ [a,b] tal que $c=\dfrac{I(b)-I(a)}{f(b)-f(a)}$ c.

(45) Dado $F(x)=\begin{cases}0 & si \ \ x\le 1\\ 1 & si \ \ x>1\end{cases}$ y si $H(x)=\int_0^x F(x)dx$ ¿En qué puntos es $H'(x)=F(x)$?

(46) Sea f una función continua en [1,+∞>, con f(x) > 0, $\forall$ x > 1 si:

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt\le (f(x))^2\ ,\ \ x\ge 1$$

(47) Sea f una función continua en [0,+∞>, con f(x) ≠ 0, $\forall$ x > 0. Demostrar que si $[f(x)]^2=2\int_0^x f(t)dt$, $\forall$ x > 0 entonces f(x) = x, $\forall$ x > 0.

(48) Pruebe que si f(x) es derivable y $f'(x)=c\,f(x)$, $\forall$ x entonces existe un número k tal que $f(x)=ke^{cx}$, $\forall$ x

(49) Demostrar que la siguiente igualdad: $\int_{\frac{1}{e}}^{tg\,x}\dfrac{t}{1+t^2}dt+\int_{\frac{1}{e}}^{ctg\,x}\dfrac{1}{t(1+t^2)}dt=1$

(50) Sea f(x) una función positiva continua. Demostrar que la función $\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x t\,f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ es creciente para x ≥ 1.

(51) Hallar todos los valores de x > 0 para los que $\int_0^x [\![t]\!]^2\,dt=2(x-1)$

(52) Sea f una función derivable en <-∞,∞>, tal que $f(1)=f'(1)=1$ se define las siguientes funciones $H(x)=\sqrt[3]{7+x^3}+\int_{-f(x)}^{f(x)} f(t)dt$ y $G(x)=\int_{7}^{x} H(u)du$. Hallar $D^2H(x)$, para x = 1.

(53) a) Probar que $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-\frac{u^3}{1+u}$ (la división puede continuar)

b) En la ecuación $\ln x=\int_1^x \frac{dt}{t}$, hacer la sustitución t = 1 + u, dt = du y hacer el correspondiente cambio en los límites de integración, obtener $\ln x=\int_0^{x-1}\frac{du}{1+u}$.

c) Combinar los resultados de a) y b) para obtener $\ln x=\int_0^{x-1}(1-u+u^2+\frac{u^3}{1+u})du$ o $\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-R$ donde $R=\int_0^{x-1}\frac{u^3}{1+u}du$.

d) Probar que si x > 1 y 0 ≤ u ≤ x − 1, entonces $\frac{u^3}{1+u}\le u^3$, deducir que $R\le\int_0^{x-1}u^3du=\frac{(x-1)^4}{4}$

(54) Calcular $\int_0^1 F(x)dx$, si $F(x)=\int_1^{x^2} 3x\,f(t)dt$ y f es una función tal que f(0) = e y cumple con la siguiente relación: $\int_1^{x^2}\frac{f'(\sqrt{t})}{t}dt=4\int_x^{2x}e^{t^2-2tx+x^2}dt+\int_{-x}^{x}senh(t^3)dt$

(55) Sea f una función lineal con pendiente positiva y sea h una función cuya regla de correspondencia es: $h(x)=\int_x^{\int_0^x f(t)dt}\psi\,d\psi$ tal que $D^3h(x)=12(4x-3)$ y sea g la función tal que: $\int_0^{\arccos(sen\,x)}(1+\cos x)g(\cos t)dt=sen\,x$, determine el valor de

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(f(x)+3)^2}{8x^2(1+x^2g(x))}dx$$

(56) Evaluar: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[x-\int_{-1}^{x-1}\frac{(t-1)^2}{(t+1)^2+1}dt-\int_{-1}^{x+h-1}\frac{dt}{(t+1)^2+1}\right]$

(57) Si f y g son funciones integrables tales que: $\int_0^x t\,f(t)dt=\int_0^{x^2}\frac{\cos t\,dt}{1+t}$ y

$2\int_0^x t\,g(t)dt=\int_0^{x^2} g(\sqrt{t})\frac{\cos^2 \pi t}{1+t}dt+x^2$ hallar (g o f)(0)

(58) Calcular $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, si se cumple que:

$$\int_{-x}^{-x+arcsen(\cos x)} f(sen(x+t))dt=\sqrt{\frac{1-sen\,x}{1+sen\,x}}+\int_0^x x\,f(\frac{t}{x})dt\ ,\quad x\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

(59) Hallar f(12) sabiendo que la función f es continua y satisface: $\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt=x$

(60) Las variables x e y están relacionadas por la ecuación $x=\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}}$,

determinar $D_x^2 y$ en función de y, calcular además el valor de esta segunda derivada cuando y = 1.

III. Aplicando el teorema fundamental del cálculo, calcular las siguientes integrales definidas.

(1) $\int_{-1}^{2}(x+1)^3dx$ Rpta. $\frac{81}{4}$

(2) $\int_{-3}^{3}x^2dx$ Rpta. 18

(3) $\int_{-1}^{1}(5x^4-4x^3)dx$ Rpta. 2

4) $\int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$ Rpta. $\frac{3}{16}$

5) $\int_{2}^{3} (3x^2-4x+2)dx$ Rpta. 11

6) $\int_{-2}^{0} 3x\sqrt{4-x^2}\,dx$ Rpta. -8

7) $\int_{1}^{2} \frac{x^3+2x^2+x+4}{(x+1)^2}dx$ Rpta. $\frac{13}{6}$

8) $\int_{-1}^{1} \frac{x^3 dx}{x+2}$ Rpta. $\frac{26}{3}-8\ln 3$

9) $\int_{0}^{1} \frac{(x^2+2x)dx}{\sqrt[3]{x^3+3x^2+4}}$ Rpta. $2-\sqrt[3]{2}$

10) $\int_{0}^{1} \frac{x^3+1}{x+1}dx$ Rpta. $\frac{5}{6}$

11) $\int_{1}^{64} (\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x})dx$ Rpta. $\frac{6215}{12}$

12) $\int_{0}^{3} \frac{x\,e^x\,dx}{(1+x)^2}$ Rpta. $\frac{e^3}{4}-1$

13) $\int_{0}^{2} |(x-1)(3x-1)|\,dx$ Rpta. $\frac{62}{27}$

14) $\int_{-2}^{5} |x-3|\,dx$ Rpta. $\frac{29}{2}$

15. $\int_{3}^{5} \left|\frac{5x-20}{(2-x)(x^2+1)}\right| dx$ Rpta. 1.33685

16. $\int_{0}^{\pi} |\cos x|\, dx$ Rpta. 2

17. $\int_{-4}^{4} |x-2|\, dx$ Rpta. 20

18. $\int_{-3}^{3} \sqrt{3+|x|}\, dx$ Rpta. $8\sqrt{6}-4\sqrt{3}$

19. $\int_{-1}^{1} \sqrt{|x|-x}\, dx$ Rpta. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

20. $\int_{-1}^{1} \frac{x\, dx}{1+|x|}$ Rpta. 0

21. $\int_{-2}^{4} \left|\frac{x+1}{x+6}\right| dx$ Rpta. $5+5\ln\frac{5}{8}$

22. $\int_{-1}^{5} |x^3-4x|\, dx$ Rpta. 116

23. $\int_{-3}^{3} |x-2|^3\, dx$ Rpta. $\frac{313}{2}$

24. $\int_{-2}^{2} x|x-3|\, dx$ Rpta. $-\frac{16}{3}$

25. $\int_{-3}^{3} \frac{x^2-4}{|x^2-16|}\, dx$ Rpta. $6+3\ln 7$

(26) $\int_{-3}^{3} |\frac{x^2-4}{x^2-25}|\,dx$ Rpta. $\frac{2}{\sqrt{5}}\ln(\frac{\sqrt{5}+3}{2})$

(27) $\int_{0}^{2\pi} (|\,sen\,x\,|+x)\,dx$ Rpta. $4+2\pi^2$

(28) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\,sen\,x-\cos x\,|\,dx$ Rpta. $2\sqrt{2}-2$

(29) $\int_{-1}^{3} [\![x]\!]\,dx$ Rpta. 2

(30) $\int_{-1}^{3} \left[\!\!\left[x+\frac{1}{2}\right]\!\!\right] dx$ Rpta. 4

(31) $\int_{-1}^{2} [\![-x]\!]\,dx$ Rpta. -3

(32) $\int_{-1.5}^{2.5} |\,x-[\![x]\!]\,|\,dx$ Rpta. 2

(33) $\int_{0}^{6} [\![x]\!]\,sen\frac{\pi x}{6}\,dx$ Rpta. $\frac{30}{\pi}$

(34) $\int_{-3}^{3} (|\,4-x^2\,|+[\![4-x^2]\!])\,dx$ Rpta.

(35) $\int_{0}^{9} [\![\sqrt{t}]\!]\,dt$ Rpta. 13

(36) $\int_{-4}^{8} |\,x^2-4x-12\,|\,dx$ Rpta. 104

(37) $\int_0^{-4} \sqrt{|x-1|+[\![x-2]\!]}\,dx$ Rpta. 3

(38) $\int_4^{2} \frac{dx}{1+\left[\!\left[\frac{x^2}{4}\right]\!\right]}$ Rpta. $-\frac{1}{6}(2\sqrt{2}+\sqrt{3})$

(39) $\int_{-1}^{2} \sqrt{|2x-1|-[\![x]\!]}\,dx$ Rpta. $2\sqrt{3}$

(40) $\int_{-2}^{5} (|9-x^2|-x^2)dx$ Rpta. $\frac{11}{3}$

(41) $\int_{-2}^{1} (x+1)\sqrt{x+3}\,dx$ Rpta. $\frac{46}{15}$

(42) $\int_0^{1} sen^2 \pi x \cos^2 \pi x\, dx1$ Rpta. $\frac{1}{5}$

(43) $\int_0^{1} sen^3(\frac{\pi x}{2})dx$ Rpta. $\frac{4}{3\pi}$

(44) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3 x \cos^3 x dx$ Rpta. $\frac{1}{12}$

(45) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x\; dx$ Rpta. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$

(46) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen x - \cos x)dx$ Rpta. 0

(47) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2}+\cos x)dx$ Rpta. $\frac{\pi}{4}+1$

48. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{x\,sen\,x}{\cos^3 x})dx$ Rpta. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

49. $\int_0^3 sig(x-x^3)dx$ Rpta. -1

50. $\int_0^{\pi} x\,sig(\cos x)dx$ Rpta. $-\frac{\pi^2}{4}$

51. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x\,tg\,x}{\sqrt{2+\sec^2 x}}dx$ Rpta. $2-\sqrt{3}$

52. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{|x^2-2x-3|(x-1)}}{[\![x^2+1]\!]}dx$ Rpta. $-\frac{1}{6}[8+(1+2\sqrt{2})^{3/2}+(2\sqrt{2}-1)^{3/2}]$

53. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} sen\,2x\cos 4x\,dx$ Rpta. $\frac{2+3\sqrt{3}}{24}$

54. $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$ Rpta. $\frac{\pi}{9}$

55. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^3 x\,tg^5 x\,dx$ Rpta. $\frac{856}{105}$

56. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos 2x}$ Rpta. $\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$

57. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x-1}{\cos 2x+1}dx$ Rpta. $\frac{\pi}{4}-1$

58. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{sen\,x\,dx}{\cos^2 x-\cos x+4}$ Rpta. $\frac{1}{3}\ln|\frac{7+3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}|$

(59) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{1+sen^2 x}$ Rpta. $\dfrac{\pi}{4}$

(60) $\displaystyle\int_0^{\pi} 2t\,sen\,t^2 \cos t^2\,dt$ Rpta. $\dfrac{sen^2\pi^2}{2}$

(61) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{sen\,x}}\,dx$ Rpta. $\dfrac{3}{8}[\dfrac{4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{4}-1]$

(62) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$ Rpta. $\dfrac{4}{3}$

(63) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}sen\frac{1}{x}\,dx$ Rpta. 1

(64) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sen\,x+\cos x+2}$ Rpta. $\sqrt{2}arctg(\dfrac{1}{2\sqrt{2}})$

(65) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sen\,x+\cos x}$ Rpta. $\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$

(66) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,5x\cos 3x\,dx$ Rpta. $\dfrac{1}{2}$

(67) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+sen\theta)^2\,d\theta$ Rpta. $\dfrac{20}{3}+\dfrac{35\pi}{16}$

(68) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ctg\,x\ln(sen\,x)dx$ Rpta. $\dfrac{1}{2}[(\ln(\dfrac{3}{2}))^2-(\ln(\dfrac{\sqrt{2}}{2}))^2]$

(69) $\int_0^1 arctg(\sqrt{x})dx$ Rpta. $\frac{\pi}{2}-1$

(70) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\, arcsen\, x\; dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Rpta. $\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$

(71) $\int_0^{\pi} e^{2x} sen\, x\, dx$ Rpta. $\frac{e^{2\pi}+1}{5}$

(72) $\int_1^2 x\ln x\, dx$ Rpta. $\ln 4-\frac{3}{4}$

(73) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ Rpta. $1-\frac{\pi}{4}$

(74) $\int_0^1 2x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$ Rpta. $\frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}$

(75) $\int_0^2 \frac{x^5 dx}{(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}$ Rpta. $\frac{8}{9}$

(76) $\int_0^1 \frac{x^7 dx}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}$ Rpta. $\frac{3\sqrt{2}-4}{4}$

(77) $\int_0^1 x^8(1-x^3)^{\frac{5}{4}}dx$ Rpta. $\frac{128}{5967}$

(78) $\int_0^1 x^4(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$ Rpta. $\frac{2\pi}{256}$

(79) $\int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9 dx}{(1+x^5)^3}$ Rpta. $\frac{2}{45}$

(80) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ **Rpta.** $\frac{\pi}{4}$

(81) $\int_{-2}^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$ **Rpta.** $\ln(\frac{3+2\sqrt{2}}{4-\sqrt{15}})+2\sqrt{2}-\sqrt{15}$

(82) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2+3x+4}$ **Rpta.** $\frac{2}{7}(\sqrt{7}arctg\sqrt{7}-arctg\frac{2\sqrt{7}}{7})$

(83) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{3\,arcsen\,x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **Rpta.** $\frac{\pi^3}{4}$

(84) $\int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$ **Rpta.** $\frac{\pi-2}{8}$

(85) $\int_{0}^{1} (x^2+4x)\sqrt{x^3+6x^2+1}\,dx$ **Rpta.** $\frac{2}{9}(8\sqrt{8}-1)$

(86) $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{-x^2-6x-5}}$ **Rpta.** $\frac{\pi}{3}$

(87) $\int_{0}^{3} \frac{2x^3+18}{(x-3)(x^2+9)}dx$ **Rpta.** $6-\frac{55}{18}\ln 2-\frac{7}{9}\pi$

(88) $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$ **Rpta.** $\frac{\pi}{6}$

(89) $\int_{0}^{\sqrt[n]{\frac{a}{2}}} \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^{2n}}}$ **Rpta.** $\frac{\pi}{6n}$

(90) $\int_{-2}^{-1} \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ **Rpta.** $\frac{e-2}{2}$

(91) $\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{2-x}\,dx$ Rpta. $\frac{\pi}{4}$

(92) $\int_0^{\frac{3}{5}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ Rpta. $\arcsin(\frac{3}{5})+\frac{1}{5}$

(93) $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}}\,dx$ Rpta. $\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})$

(94) $\int_0^1 \ln\sqrt{2-x}\,dx$ Rpta. $\ln 2-\frac{1}{2}$

(95) $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{3+x}}\,dx$ Rpta. $\pi-2$

(96) $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$ Rpta. $\frac{23}{3}$

(97) $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$ Rpta. $\frac{29}{270}$

(98) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ Rpta. $\frac{\pi}{3}$

(99) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$ Rpta. 12

(100) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3\,dx}{(\frac{5}{8}-x^4)\sqrt{\frac{5}{8}-x^4}}$ Rpta. $\frac{4}{3}$

(101) $\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ Rpta. $\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$

(102) $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\, dx$ Rpta. $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(103) $\int_0^{\pi/3} x^2 \operatorname{sen} 3x\, dx$ Rpta. $\frac{\pi^2-4}{27}$

(104) $\int_{5/2}^{5} \frac{(\sqrt{25-x^2})^3}{x^4}\, dx$ Rpta. $\frac{\pi}{3}$

(105) $\int_0^{4} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\, dx$ Rpta. $4\ln(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}$

(106) $\int_0^{1} \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$ Rpta. $\frac{\pi^2}{4}$

(107) $\int_{\ln(\frac{3}{4})}^{0} \sqrt{1-e^x}\, dx$ Rpta. $\ln 3 - 1$

(108) $\int_{-15}^{-5-5\sqrt{2}} \frac{dx}{(x+5)\sqrt{10x+x^2}}$ Rpta. $-\frac{\pi}{60}$

(109) $\int_1^{3} \ln(x+\sqrt{x^2-1})dx$ Rpta. $3\ln(3+2\sqrt{2})-2\sqrt{2}$

(110) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ Rpta. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$

(111) $\int_0^{27} \frac{dx}{x-\sqrt[3]{x}}$ Rpta. $\frac{3}{8}\ln\left(\frac{8}{3}\right)$

(112) $\int_0^{1} \frac{\sqrt{1+e^{-2x}}}{e^{-3x}}\, dx$ Rpta. $\frac{2\sqrt{2}}{9}(e^2-1)^{\frac{3}{2}}$

(113) $\int_0^1 \ln\left(x^2+1\right)dx$ Rpta. $\ln 2+\frac{\pi}{8}-2$

(114) $\int_{\sqrt{\frac{8}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}$ Rpta. $\frac{\sqrt{6}}{27}+\frac{\pi\sqrt{2}}{48}$

(115) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\,dx}{1+x^2}$ Rpta. $\frac{\pi}{8}\ln 2$

(116) $\int_0^{\frac{\pi^2}{2}} \cos\sqrt{2x}\,dx$ Rpta. -2

(117) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ Rpta. $\frac{\pi}{6}$

(118) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\operatorname{sen} 4x\,dx$ Rpta. $\frac{4}{25}(1+e^{\frac{3\pi}{4}})$

(119) $\int_0^3 \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$ Rpta. $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$

(120) $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$ Rpta. $\frac{\pi}{4}$

(121) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$ Rpta. $\ln(\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}})$

(122) $\int_8^{12} \frac{2\,dx}{x\sqrt{(x-2)^2-4}}$ Rpta. $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

(123) $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$ Rpta. $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$

(124) $\int_0^1 e^{\text{arcsen}\,x}\,dx$ Rpta. $\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$

(125) $\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}\,dx$ Rpta. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(126) $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$ Rpta. $\ln(\frac{7+2\sqrt{7}}{9})$

(127) $\int_1^3 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{2x^2+7}}$ Rpta. $\frac{14}{3}$

(128) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$ Rpta. $4-\pi$

(129) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{(1+x^2)\,dx}{\sqrt{4-x^2}\,(4-x^2)^2}$ Rpta. $\frac{23\sqrt{3}}{72}$

(130) $\int_1^{16} \text{arctg}\sqrt{\sqrt{x}+1}\,dx$ Rpta. $\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$

(131) $\int_{-1}^{7} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x+2}}$ Rpta. $\frac{652}{15}$

(132) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{dx}{(5+4x-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ Rpta. $\frac{2}{9\sqrt{3}}$

(133) $\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$ Rpta. $-\pi-\frac{2\pi}{3}$

(134) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{sen}\,x\ln(1+\text{sen}\,x)\,dx$ Rpta. $\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+\frac{\sqrt{3}}{2})$

(135) $\int_0^3 \frac{2x^3+18}{(x+3)(x^2+9)}dx$ Rpta. $6-\frac{55}{18}\ln 2-\frac{7\pi}{9}$

(136) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(4x^2+1)dx$ Rpta. $\ln(\frac{5}{\sqrt{2}})+\operatorname{arctg}2-1-\frac{\pi}{4}$

(137) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x^9\cos x+\sqrt[7]{\operatorname{tg} x}+\operatorname{sen} x e^{\cos^2 x}+\cos^2 x)dx$ Rpta. $\frac{\pi+2}{4}$

(138) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{81}\cos x\,dx$ Rpta. 0

(139) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a\cos^2 x+b\operatorname{sen}^2 x}$ Rpta. $\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}$

(140) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\cos(\operatorname{sen} x)\ln(\frac{1+x}{1-x})+3x+4\right]dx$ Rpta. 4

(141) $\int_{-2}^{2} \left[(x^5+x^3+x)\sqrt{1+x^4}+3\right]dx$ Rpta. 12

(142) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x\ln(\frac{1+x}{1-x})dx$ Rpta. 0

(143) $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^{10}\operatorname{sen}^9 x\,dx$ Rpta. 0

(144) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$ Rpta. $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}})$

(145) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$ Rpta. $\dfrac{\pi}{32}+\dfrac{7\sqrt{3}}{2}-4$

(146) Evaluar $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ Rpta. $\dfrac{\pi}{6}$

(147) Evaluar $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}} 2\,|\cos x|\,dx$ Rpta. $3-\sqrt{3}$

(148) Evaluar $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{4\pi}{3}} 2\,|sen\,x|\,dx$ Rpta. $3-\sqrt{2}$

(149) Si $\displaystyle\int_{1}^{2} e^{t^2}\,dt = k$, $k \in R$, evaluar la integral $\displaystyle\int_{e}^{e^2}\left[\frac{1}{x}\int_{1}^{\ln x} e^{t^2}\,dt\right]dx$

Rpta. $2k-\dfrac{1}{2}(e^4-e)$

(150) Evaluar $\displaystyle\int_{5\sqrt{2}}^{10} \frac{5\sqrt{x^2-25}}{(x-5)^2}\,dx$ Rpta. $2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})-\dfrac{5\pi}{12}$

(151) Evaluar $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}\,sen\,x-\sqrt{sen\,2x}}{sen\,x-\cos x}\,dx$ Rpta. $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$

(152) Evaluar $\displaystyle\int_{0}^{\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx}\left[\!\left[\frac{xe^{-(x^2+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2}}+1\right]\!\right]dx$ Rpta. $\dfrac{3}{2}$

(153) Evaluar $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{dx}{x-x\ln x}$ Rpta. 0

(154) Evaluar $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} sen\,2x\,tg\,2x\,dx$ Rpta. $\dfrac{2\ln(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}}{4}$

(155) Evaluar $\int_0^1 \frac{x^2e^x+e^x}{x^2+2x+1}dx$ Rpta. 1

(156) Evaluar $\int_0^{\ln 3} e^x arctg(e^{-x})dx$ Rpta. $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$

(157) Evaluar $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}$ Rpta. $\frac{1}{2}[2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}]$

(158) Si $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(192x^3+\sqrt{2}\,|\,tg\,x\,|)dx=\sqrt{a}\ln a$, hallar $\int_a^2 e^{-t^2}dt$ Rpta. 0

(159) Evaluar $\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} 3\sqrt{9x^2+4}\,dx$ Rpta. $2(2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3}))$

(160) Evaluar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen\,x\cos x}{x+1}dx$ si $\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}=m$ Rpta. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi+2}+\frac{1}{2}-\frac{m}{2}\right]$

IV.

(1) Mostrar que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|ab|\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\,\text{sen}^2\,x}=\frac{\pi}{2}$, donde a y b son números reales cualquiera distinto de cero.

(2) Demostrar que: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\text{sen}\,x}\,dx}{\sqrt{\text{sen}\,x}+\sqrt{\cos x}}=\frac{\pi}{4}$

(3) Demostrar que: $\int_0^x |t|\,dt=\frac{x|x|}{2}$, $\forall\, x\in R$

(4) Demostrar que: $\frac{d}{dx}\int_0^x (y-x)\,f'(y)\,dy=f(0)-f(x)$

5. Demostrar que para todo x real $\int_0^x (t+|t|)^2\,dt = \frac{2}{3}x^2(x+|x|)$

6. Hallar el valor de c tal que $f(x)=x^2-2x+1$, $f(c)=\frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)\,dx$

   Rpta. $c=1+\frac{2}{\sqrt{3}}\in[1,3]$

7. Demostrar que: $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$

8. Hallar un polinomio cuadrático $p(x)$ para el cual $p(0)=p(1)=0$ y $\int_0^1 p(x)\,dx = 1$

   Rpta. $p(x)=6x-6x^2$

9. Demostrar que: $\int_0^{\frac{3}{2}} [\![x]\!]\,dx = \frac{1}{2}$

10. Probar que: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

11. Evaluar $\int_0^1 x f''(2x)\,dx$, sabiendo que $f(0)=1, f(2)=3$, $f'(2)=5$ Rpta. 2

12. Resolver la ecuación $\int_{\sqrt{2}}^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{\pi}{12}$ Rpta. $x=2$

13. Calcular $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sec x}\,dx}{\sqrt{\sec x}+\sqrt{\operatorname{cosec} x}}$ Rpta. $\frac{\pi}{12}$ sug: $z=\frac{\pi}{2}-x$

14. Hallar un polinomio cúbico $p(x)$ para el cual $p(0)=p(-2)=0$, $p(1)=15$ y $3\int_{-2}^0 p(x)\,dx = 4$ Rpta. $p(x)=4x+8x^2+3x^3$

15) Demostrar que, si f es continua en $[-3,4]$, entonces:

$$\int_{3}^{-1} f(x)\,dx + \int_{4}^{3} f(x)\,dx + \int_{-3}^{4} f(x)\,dx + \int_{-1}^{-3} f(x)\,dx = 0$$

16) Demostrar que, si f es continua en $[-3,4]$, entonces:

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{-1} f(x)\,dx = 0$$

17) Demostrar que, si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = (b-a)\int_{0}^{1} f(a+(b-a)x)\,dx$$

18) Demostrar que $0 \le \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{3+x^2}\,dx \le \frac{\sqrt{3}}{36}\pi^2$

19) Calcular la siguiente integral $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$, si $f(x) = |x-2| + |x-1|$

20) Hallar $\int_{a}^{b}\left[\int_{c}^{d} F(x)G(y)\,dy\right]dx$

21) Demostrar la siguiente igualdad $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen}^2\theta + x^2\cos^2\theta)\,d\theta = \ln(\frac{x+1}{3})$

22) Calcular $f''(0)$, sabiendo que: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) + f'''(x)]\cos x\,dx = 3$, así mismo f', f'', f''' son funciones continuas en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ y $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

23) Calcular $I = \int_{0}^{1} x^4 F^{iv}(x)\,dx$, sabiendo que $F'''(6) = 1$, $F''(6) = -4$, $F'(6) = 8$, $F(6) = -10$, $F(0) = -20$.

(24) Calcular $\int_0^{\pi} x^2 sig(\cos x)\,dx$ Rpta. $-\frac{\pi^3}{4}$

(25) Calcular $\int_0^{\frac{1}{3}} |6x^2-5x+1|\,dx$ Rpta. $\frac{7}{54}$

(26) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 2x}{(\operatorname{sen} x)^{\frac{4}{3}}}\,dx$ Rpta. 3

(27) Calcular el valor de la integral definida $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ siendo

$$f(x)=\begin{cases} |x|+x^2 & , \quad x\le 0 \\ [\![x]\!]x^2+\cos\pi & , \quad x>0 \end{cases}$$

(28) Sea f una función integrable en $[a,b]$ y $k\neq 0$, una constante real. Demostrar que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = k\int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} f(kx)\,dx$$

(29) Pruebe que $\int_0^1 x\,dx \ge \int_0^1 x^2 dx$ pero $\int_1^2 x\,dx \le \int_1^2 x^2 dx$, no evaluar la integral.

(30) Sea f acotada en $[a,b]$ y continua en $[a,b]$ excepto en un punto $c\in[a,b]$. Pruebe que f es integrable en $[a,b]$.

(31) Sea $c\in[a,b]$ y $\alpha\in\mathbb{R}$, definimos $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ por $f(x)=\begin{cases}\alpha & si \quad x=c\\ 0 & si \quad x\neq c\end{cases}$. Pruebe que f es integrable y que $\int_a^b f(x)\,dx=0$

(32) Por definición una función $f(x)$ es par sí $f(-x)=f(x)$, $\forall\, x$. Pruebe que sí $f(x)$ función par entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, $a>0$.

(33) Dadas las funciones siguientes:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ 2 & , \quad x\in\left\langle\frac{1}{2},2\right] \\ -2 & , \quad x\in\langle 2,3\rangle \\ x & , \quad x\in[3,4] \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} -x & , \quad x\in[0,1] \\ 1-x^2 & , \quad x\in\langle 1,2\rangle \\ 3-x & , \quad x\in[2,4] \end{cases}$$

Calcular $\int_0^4 f(x)g(x)\,dx$ Rpta. $-\frac{11}{6}$

(34) Si $n\in Z^+$, demostrar que:

a) $\int_0^n [\![t]\!]\,dt=\frac{n(n-1)}{2}$

b) $\int_0^n [\![t]\!]^2\,dt=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

c) $\int_0^{n^2} [\![\sqrt{t}]\!]\,dt=\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$

(35) Evaluar las siguientes integrales.

a) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 2x\,dx$ Rpta. 1

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{1}{2}+\cos t\right| dt$ Rpta. $\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\frac{t}{2}\,dt$ Rpta. 1

d) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2+8x+8}$ Rpta. $\frac{\pi}{16}$

e) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-4x-5}$ Rpta. $-\frac{1}{6}\ln 2$

f) $\int_0^{\pi} \operatorname{senh} x . \operatorname{sen} x \, dx$ **Rpta.** $\frac{\operatorname{senh} \pi}{2}$

g) $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x - \cos x| \, dx$ **Rpta.** $4\sqrt{2}$

(36) Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, sabiendo que $\int_{-6}^{6} f(t)\,dt = 6$. Calcular $\int_{-4}^{4} f(2x-2)\,dx$

(37) Si $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 2 \\ 2 & , \quad 2 \le x < 0 \\ \frac{x^2}{1+x^3} & , \quad x \ge 0 \end{cases}$, Calcular $\int_{-3}^{1} (f(x) - x)\,dx$

(38) Sean f y g dos funciones integrables sobre $[a,b]$, pruebe la desigualdad de CAUCHY SCHWARTZ. $\int_a^b (fg)^2 \le \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$

(39) Hallar $\int_0^2 f(x)\,dx$, si $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 2-x & , \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$

(40) Hallar $\int_0^1 f(x)\,dx$, si $f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \le x \le t \\ t.\frac{1-x}{1-t} & , \quad t < x \le 1 \end{cases}$

(41) Demostrar la igualdad. $\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x)\,dx$, $a > 0$

(42) Demostrar que si $f(x)$ es continua en $[0,1]$, entonces: $\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\,dx$

(43) Calcular la integral $\int_{\frac{1}{2}}^{2}(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx$, introduciendo la nueva variable $t=x+\frac{1}{x}$.

(44) Hallar la integral $\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)\,dx}{1+f(x)^2}$, sí $f(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$

(45) Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{-1}^{3}2[\![x]\!]dx$ **Rpta.** 4

b) $\int_{-1}^{3}\left([\![x]\!]+\left[\!\!\left[x+\frac{1}{2}\right]\!\!\right]\right)dx$ **Rpta.** 6

(46) Probar que: $\int_{a}^{b}[\![x]\!]dx+\int_{a}^{b}[\![-x]\!]dx=a-b$

(47) Demostrar que: $\int_{0}^{2}[\![t^2]\!]dt=5-\sqrt{2}-\sqrt{3}$

(48) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{1}{2}}dx}{(\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen}x+4)^{\frac{3}{2}}}$ **Rpta.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(49) $\int_{0}^{1}\frac{xe^x}{1+x^2}dx$ **Rpta.** $\frac{e-2}{2}$

(50) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^2-4x-5}$ **Rpta.** $-\frac{1}{6}\ln 2$

(51) Calcular $f(0)$ sabiendo que $f(\pi)=2$ y a su vez $\int_{0}^{\pi}(f(x)+f''(x))\operatorname{sen}x\,dx=5$

Rpta. 3

52) $\int_0^2 \frac{4x+5}{(x^2-2x+2)^{\frac{3}{2}}}dx$ **Rpta.** $9\sqrt{2}$

53) $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^5)^{\frac{1}{5}}dx}{x^6}$ **Rpta.** $\frac{5}{24}(80)^{\frac{6}{5}}$

54) Calcular $f(2)$ si f es continua y $\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\,dt = x$ **Rpta.** $\frac{1}{5}$

55) Calcular el valor de $\int_{-2}^4 g(x)dx$ donde $g(x) = \int_{-1}^{2x} f(t)dt$, $x \in R$ y

$$f(x) = \begin{cases} 12x-12, & si\ \ x \le 1 \\ 6x^2-6, & si\ \ x > 1 \end{cases}$$ **Rpta.** $\frac{3697}{4}$

56) Demostrar que $\int_0^t \frac{2x\,dx°}{1+x^2} = \int_0^{1+t^2} \frac{du}{u}$

57) Si $f(\pi) = 2$ y $\int_0^\pi [F(x)+F''(x)]sen\,x\,dx = 5$, calcular $f(0)$.

58) Si $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [F'(x)+F''(x)]\cos x\,dx = 90$, $F''(0) = 7$, calcular $F'(\frac{\pi}{2})$

59) Sabiendo que $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$, calcular $\int_0^1 \frac{arctg\,x}{1+x}dx$

60) Si $F(x + T) = F(x)$, probar que: $\int_{a+T}^{b+T} xF(x)dx = \int_a^b x\,F(x)dx + T\int_a^b F(x)dx$

61) Expresar el siguiente límite como una integral definida luego calcular el valor de la integral $\lim_{n\to\infty}[\frac{\pi}{n}sen(\frac{\pi}{n}) + \frac{2\pi}{n}sen(\frac{2\pi}{n}) + ... + \frac{n\pi}{n}sen(\frac{n\pi}{n})]\frac{1}{n}$

(62) Aplicando el primer teorema fundamental del cálculo, hallar la derivada de la integral definida.

a) $D_x(\int_1^{x^2}(t+1)^2\,dy)$

b) $D_x(\int_2^{x}\frac{t^{\frac{3}{2}}\,dt}{\sqrt{t^2+27}})$

c) $D_x(\int_{x^3}^{4} tg^2 t.\cos t\,dt)$

d) $D_x(\int_0^{x^2}(3t^3-1)dt)$

(63) Si $\int_1^3 f(x)dx=4$, y $\int_3^2 f(x)dx=3$, encontrar $\int_1^2 f(x)dx$ Rpta. 7

(64) Si $\int_1^4 f(x)dx=6$, $\int_2^4 f(x)dx=5$ y $\int_1^3 f(x)dx=2$, encontrar $\int_2^3 f(x)dx$

(65) Evaluar $\int_0^1 \frac{dx}{2^{-x}\sqrt{1-2^{2-x}+13.2^{-2x}}}$

(66) Evaluar: $\int_0^1 \left|\frac{3x+2}{3+x^2}\right| dx$

(67) Evaluar: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{sen^2 x\cos^2 x}$

(68) Evaluar: $\int_1^4 \frac{dx}{(2+\sqrt{x})^3}$

(69) Evaluar: $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{7}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x-1}\sqrt{2-x}(3\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x})^2}$

(70) Evaluar: $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$

(71) Evaluar: $\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{4x\,dx}{4+x^2}$

(72) Evaluar: $\int_{0}^{8} (4-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,dx$

(73) Evaluar: $\int_{0}^{\pi} \frac{(2x-\pi)\cos^2 x}{sen\,x+4}\,dx$

(74) Evaluar: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen^2 x\cos x\,dx}{\sqrt{25-16sen^2 x}}$

(75) Calcular $\int_{1}^{2} 12\,f(x)dx$ si $f(2x^3+1)=x^6$

(76) Calcular $\int_{0}^{\pi} \frac{x\,dx}{\cos x+\sec x} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi\cos x\,dx}{2\cos^2 x+sen^2 x}$

(77) Evaluar $\int_{1}^{4} \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}\,dx$

(78) Evaluar $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt[3]{tg\,x}+sen\,x.e^{\cos^2 x})dx$

(79) Evaluar: $\int_{0}^{f(x)} \frac{\ln(1+tg\theta)}{\sec\theta}\,d\theta$, si $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{x\cos x\;dx}{1+sen^2 x}$

(80) Evaluar: $\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$

(81) Evaluar: $\int_{0}^{1} \frac{(x^2-3)dx}{(x^2-2x+3)^2}$

(82) Evaluar: $\int_{0}^{1993} \left[\!\left[\frac{4x+7}{2(x^2+2)} \right]\!\right] dx$

(83) Evaluar: $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2}}$

(84) Evaluar: $\int_{-4}^{6} |x^2-4x|\,dx$

(85) Evaluar: $\int_{-1}^{\frac{3}{2}} \frac{|x-\frac{1}{2}|}{x^2+1}\,dx$

(86) Evaluar: $\int_{-4}^{-1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+8x+25}}\,dx$

(87) Evaluar: $\int_{3+2\sqrt{2}}^{1+\sqrt{15}} \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^4-14x^2+1}}$

(88) Evaluar: $\int_{6}^{9} \frac{dx}{(4x^2-24x+27)\sqrt{4x^2-24x+27}}$

(89) Evaluar: $\int_{-1}^{0} (x+1)^{\frac{5}{7}}(x^2+2x+2)\,dx$

(90) Use una sustitución trigonométrica adecuadamente para calcular $\int_{0}^{2} \frac{(4x+5)dx}{(x^2-2x+2)^{\frac{3}{2}}} + \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{x^3\,dx}{(x^2-1)^3}$

CAPÍTULO III

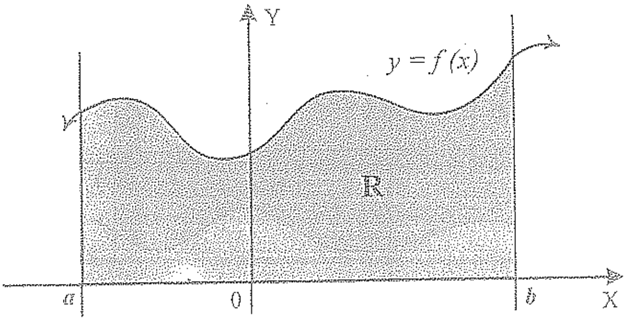
3. APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.-

3.1 AREAS DE REGIONES PLANAS.-

En el cálculo de área de regiones planas se consideran dos casos:

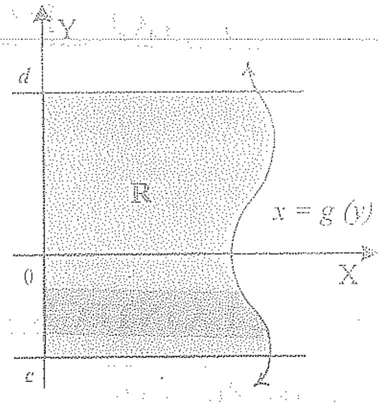
1^er^ *Caso.-* Consideremos una función $y=f(x)$ continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y además $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$. El área de la región R limitada por la curva $y=f(x)$, el eje X y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$, está dado por la expresión:

$$\boxed{A(R)=\int_a^b f(x)\,dx}$$



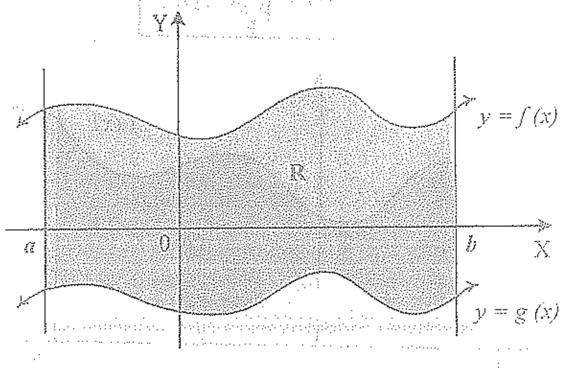
OBSERVACIÓN.- Si la región R es limitada por la curva $x=g(y)$ y las rectas $y=c$, $y=d$, entonces el área de la región R es expresado por:

$$\boxed{A(R)=\int_c^d g(y)\,dy}$$



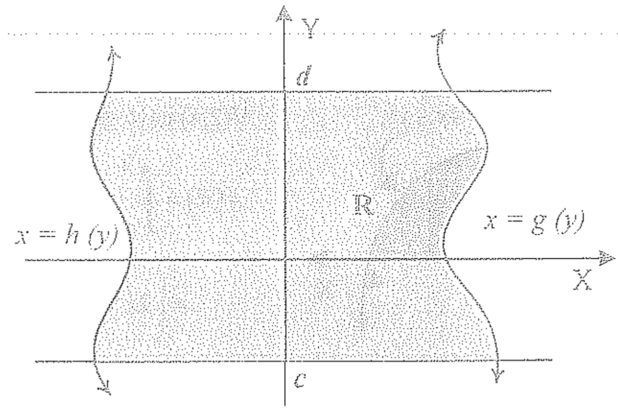
2^{do} *Caso.-* Consideremos dos funciones f y g continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ tal que $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, el área de la región R limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, está dado por la expresión.

$$\boxed{A(R) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$



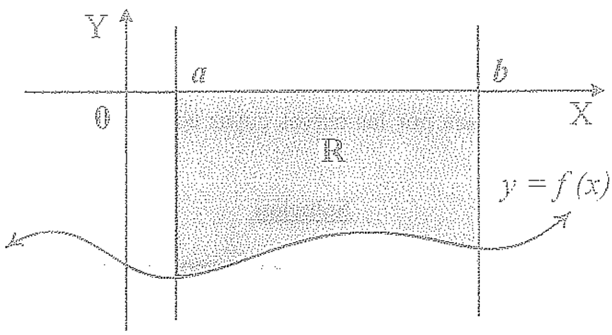
OBSERVACIÓN.- Si la región R es limitada por las curvas $x = g(y)$, $x = h(y)$ tal que $g(y) \geq h(y)$, $\forall y \in [c,d]$ y las rectas $y = c$, $y = d$, entonces, el área de la región R está dada por la expresión:

$$\boxed{A(R) = \int_c^d (g(y) - h(y))\,dy}$$



OBSERVACIÓN.- En el cálculo del área de una región R limitada por la curva $y = f(x)$ el eje X y las rectas $x = a, x = b$ la función $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$ pero en el caso en que $f(x) \leq 0$, la región R está debajo del eje X en este caso el área es calculado por:

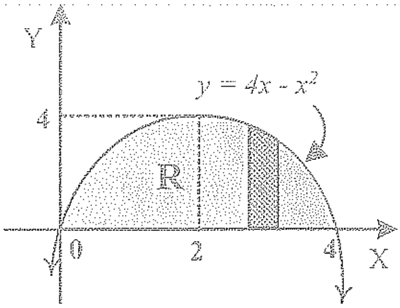
$$\boxed{A(R) = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|}$$



3.1.1 PROBLEMAS DESARROLLADOS.-

① Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = 4x - x^2$, y el eje de abscisas.

Solución



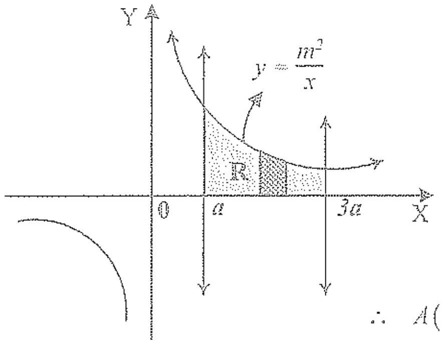
Como $y = 4x - x^2 \Rightarrow y - 4 = -(x-2)^2$, es una parábola de vértice en el punto V(2,4) cuyo gráfico es:

$$A(R) = \int_0^4 y\,dx = \int_0^4 (4x - x^2)dx$$

$$= \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3}u^2$$

(2) Hallar el área de la figura comprendida entre la hipérbola $xy = m^2$, las rectas verticales $x = a, x = 3a$ $(a > 0)$ y el eje X.

Solución



$xy = m^2 \Rightarrow y = \dfrac{m^2}{x}$, cuyo gráfico es:

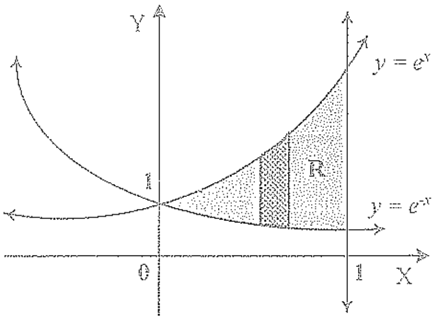
$$A(R) = \int_a^{3a} y\,dx = \int_a^{3a} \frac{m^2}{x}dx = m^2 \ln x\Big|_a^{3a}$$

$$A(R) = m^2 \ln 3a - m^2 \ln a$$

$$\therefore \quad A(R) = m^2 \ln 3\, u^2$$

(3) Encontrar el área acotada por las curvas cuyas ecuaciones son $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

Solución



La región comprendida por $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$ es la del gráfico siguiente.

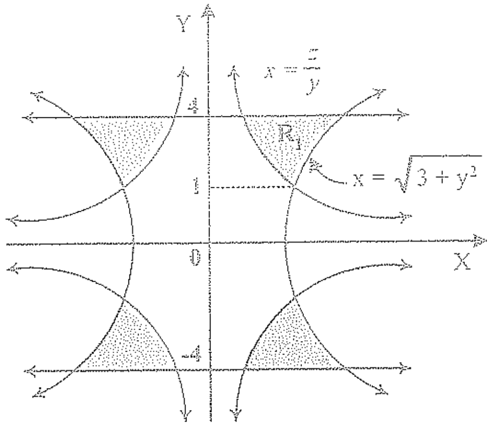
$$A(R) = \int_0^1 (e^x - e^{-x})dx = (e^x + e^{-x})\Big|_0^1 = e + e^{-1} - 2$$

$$= 2\left(\frac{e + e^{-1}}{2} - 1\right) = 2(\cosh 1 - 1)$$

$$\therefore \quad A(R) = 2(\cosh 1 - 1)u^2$$

(4) Hallar el área limitada por las curvas $x^2 - y^2 = 3$, $xy = \pm 2$, $y = \pm 4$.

<u>Solución</u>



Graficando la región se tiene:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

para $x = 2$, $y = 1$ por simetría se tiene:

$$A(R) = 4A(R_1)$$

$$A(R) = 4\int_1^4 \left[\sqrt{3+y^2} - \frac{2}{y}\right] dy, \text{ por la tabla de integración.}$$

$$A(R) = 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{3+y^2} + \frac{3}{2}\ln\left|y + \sqrt{3+y^2}\right| - 2\ln y\right]\Bigg|_1^4$$

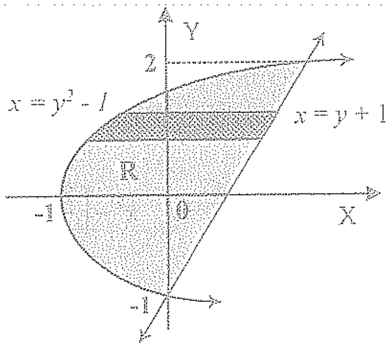
$$A(R) = 4\left[\left(2\sqrt{19} + \frac{3}{2}\ln\left|4\sqrt{19}\right| - 2\ln 4\right) - \left(\frac{1}{2}(2) + \frac{3}{2}\ln|1+2| - 0\right)\right]$$

$$\therefore \quad A(R) = \left(8\sqrt{19} - 4 + 6\ln\left|\frac{4+\sqrt{19}}{3}\right| - 16\ln 2\right)u^2$$

(5) Calcular el área de la figura limitada por las líneas cuyas ecuaciones son $y^2 = x + 1$, $x - y - 1 = 0$.

<u>Solución</u>

Calculando los puntos de intersección se tiene:



$$\begin{cases} y^2 = x+1 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-1-y-1=0 \\ y^2-y-2=0 \end{cases}$$

$$(y-2)(y+1)=0 \Rightarrow y=-1, y=2$$

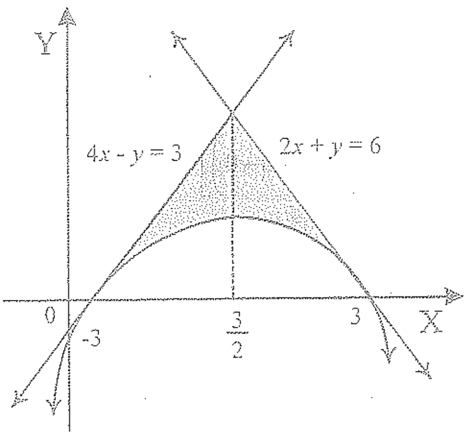
$$A(R)=\int_{-1}^{2}[(y+1)-(y^2-1)]dy$$

$$=\int_{-1}^{2}(-y^2+y+2)dy=\left(-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+2y\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$\therefore \quad A(R)=\frac{9}{2}u^2$$

(6) Hallar el área de la figura comprendida entre la parábola $y=-x^2+4x-3$ y las tangentes a ésta en los puntos (0,-3) y (3,0).

Solución



$$y=-x^2+4x-3=1-(x-2)^2$$

$$y-1=-(x-2)^2, \quad V(1,2)$$

$$y=-x^2+4x-3 \Rightarrow \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=3}=(-2x+4)|_{x=3}=-2$$

$L_1: y-0=-2(x-3)$ de donde $L_1: 2x+y=6$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}=(-2x+4)|_{x=0}=4$$

$L_2: y+3=4(x-0)$ de donde $L_2: 4x-y=3$

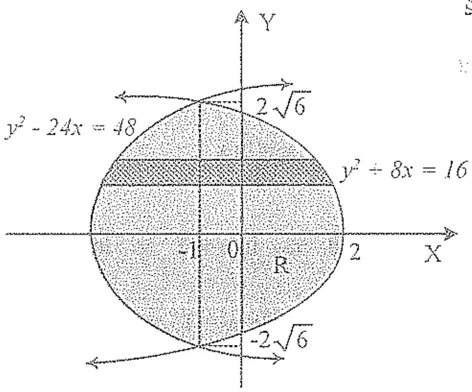
$$A(R)=\int_{0}^{\frac{3}{2}}[(4x-3)-(-x^2+4x-3)]dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}[(6-2x)-(-x^2+4x-3)]dx$$

$$A(R)=\int_0^{\frac{3}{2}} x^2dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}(x^2-6x+9)dx$$

$$A(R)=\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^{3}=\frac{9}{4}+\frac{9}{8}-\frac{9}{4}=\frac{9}{4} \qquad \therefore \quad A(R)=\frac{9}{4}u^2$$

(7) Calculando el área de la figura limitada por las parábolas $y^2+8x=16$, y $y^2-24x=48$.

Solución



$$\begin{cases} y^2+8x=16 \\ y^2-24x=48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=-8(x-2) \\ y^2=24(x+2) \end{cases}$$

Parábola de V(2,0) y Parábola de V(-2,0)

$$\begin{cases} y^2+8x=16 \\ y^2-24x=48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{16-y^2}{8} \\ x=\dfrac{y^2-48}{24} \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2-48}{24}=\frac{16-y^2}{8}$$

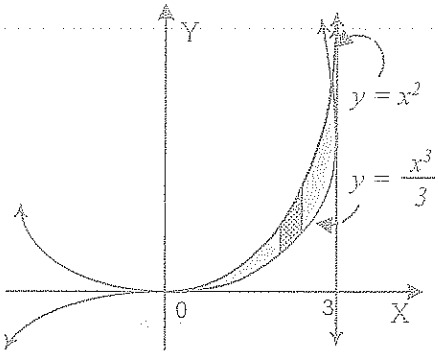
$$y^2-48=48-3y^2 \Rightarrow y^2=24 \Rightarrow y=\pm 2\sqrt{6}$$

$$A(R)=\int_{-2\sqrt{6}}^{2\sqrt{6}}\left(\frac{16-y^2}{8}-\frac{y^2-48}{24}\right)dy=\int_{-2\sqrt{6}}^{2\sqrt{6}}\left(4-\frac{y^2}{6}\right)dy=\left(4y-\frac{y^3}{18}\right)\Big|_{-2\sqrt{6}}^{2\sqrt{6}}=\frac{32}{3}\sqrt{6}$$

$$\therefore \quad A(R)=\frac{32}{3}\sqrt{6}\,u^2$$

(8) Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y=x^2$, $y=\frac{x^3}{3}$.

Solución



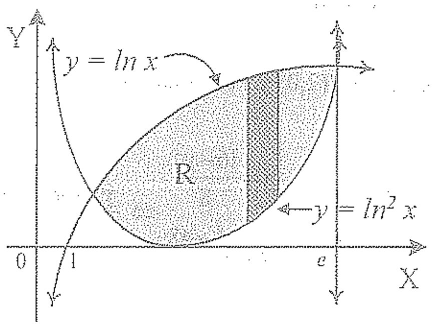
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{x^3}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^3}{3} = x^2 \Rightarrow x = 0,\ x = 3$$

$$A(R) = \int_0^3 (x^2 - \frac{x^3}{3})dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12}\right)\Big|_0^3$$

$$A(R) = 9 - \frac{27}{4} = \frac{9}{4} \quad \therefore \quad A(R) = \frac{9}{4}u^2$$

(9) Calcular el área de la figura limitada por las líneas $y = \ln x$ e $y = \ln^2 x$.

Solución



$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = \ln^2 x \end{cases} \Rightarrow \ln^2 x = \ln x$$

$$\ln(x)(\ln x - 1) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \ \vee\ \ln x - 1 = 0$$

$$x = e^0,\ x = e^1 \text{ de donde } x = 1,\ x = e$$

$$A(R) = \int_1^e (\ln x - \ln^2 x)dx = \left(3x\ln x - x\ln^2 x - 3x\right)\Big|_1^e$$

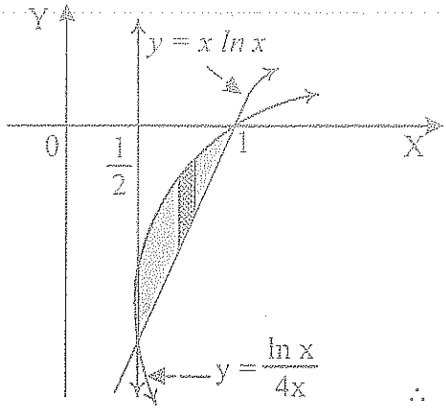
$$\therefore \quad A(R) = (3 - e)u^2$$

(10) Calcular el área de la figura limitada por las líneas $y = \frac{\ln x}{4x}$; $y = x \ln x$

Solución

$$\begin{cases} y = \dfrac{\ln x}{4x} \\ y = x\ln x \end{cases} \Rightarrow x\ln x = \frac{\ln x}{4x} \Rightarrow 4x^2\ln x = \ln x \text{ de donde } (4x^2 - 1)\ln x = 0 \text{ entonces}$$

$$4x^2 - 1 = 0 \ \vee\ \ln x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ \vee\ x = 1$$



$$A(R)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{\ln x}{4x}-x\ln x\right)dx$$

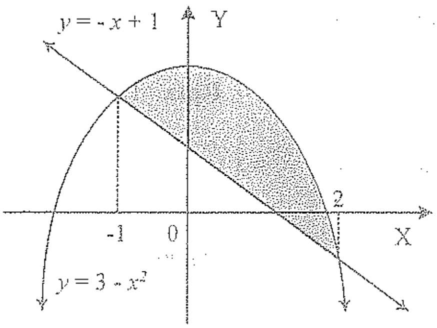
$$=\left(\frac{\ln^2 x}{8}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{1}{4}-\left(\frac{\ln^2 2}{8}+\frac{1}{8}\ln 2+\frac{1}{16}\right)$$

$$\therefore\quad A(R)=\frac{3-2\ln^2 2-2\ln 2}{16}u^2$$

(11) A un ingeniero civil se le encarga construir en un terreno que tiene la forma de la siguiente región en el plano, el cual está limitado por las curvas $y=3-x^2$ e $y=-x+1$, medido en decámetros ¿Cuál será el área techada en el primer piso si se quiere dejar un tercio del total del terreno para jardines?.

Solución



Para graficar la parábola, hallamos el vértice.

$$y-3=-x^2 \Rightarrow V(0,3)$$

ahora calculamos los puntos de intersección

$$\begin{cases} y=3-x^2 \\ y=-x+1 \end{cases} \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

de la región total se debe tomar los 2/3 por lo tanto el área techada es

$$A_T=\frac{2}{3}\int_{-1}^{2}[(3-x^2)-(-x+1)]dx=\frac{2}{3}\int_{-1}^{2}(2+x-x^2)dx$$

$$=\frac{2}{3}\left[\left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}\right]=\frac{2}{3}\left[\left(4+2-\frac{8}{3}\right)-\left(-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]=3$$

Luego transformando en metros tenemos: $A_T = 3(10)^2 = 300\,m^2$

(12) La forma de una piscina es como la región del plano dado por las curvas $x = y^2$, $x = y^3$ ¿Qué área ocupa la piscina? (es dado en decámetros).

Solución

$$A = \int_0^1 (y^2 - y^3)dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}\,dm^2 \text{, que en metros es:}$$

$$A = \frac{100}{12}m^2$$

3.1.2 PROBLEMAS PROPUESTOS.-

(1) Hallar el área de la figura limitada por la curva $y^3 = x$, la recta $y = 1$, la vertical $x = 8$.

Rpta. $\frac{17}{4}u^2$

(2) Hallar el área de la figura limitada por la curva $y = x^3$, la recta $y = 8$ y el eje Y.

Rpta. $12u^2$

(3) Hallar el área comprendida entre las curvas $y^2 = x^3$, $y^2 = x$

Rpta. $\frac{8}{15}u^2$

(4) Hallar el área de la superficie limitada por las curvas $y = 4 - x^2$, $y = 4 - 4x$

Rpta. $\frac{32}{3}u^2$

(5) Hallar el área de la superficie limitada por las curvas $y^2 = 4x$, $2x - y = 4$.

Rpta. $9u^2$

(6) Hallar el área de la figura limitada por la curva $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje X.

Rpta. $\frac{1}{2}u^2$

(7) Calcular el área de la región limitada por la gráfica $y = \frac{2|x|}{1+x^2}$, el eje X y las rectas $x = -2$, $x = 1$.

Rpta. $(\ln 10)u^2$

(8) Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = 2x - x^2$, y la recta $y = -x$.

Rpta. $\frac{9}{2}u^2$

(9) Calcular el área de la figura comprendida entre la línea $y = \frac{1}{1+x^2}$ y la parábola $y = \frac{x^2}{2}$.

Rpta. $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right)u^2$

(10) Determinar el área de la superficie limitada por los arcos de las tres parábolas $x^2 = 9y - 81$, $x^2 = 4y - 16$, $x^2 = y - 1$ y el eje de coordenadas.

Rpta. $12\ u^2$

(11) Encontrar el área de la región acotada por la curva $y = \frac{2}{x-3}$ el eje X y las rectas $x = 4$, $x = 5$.

Rpta. $(2\ln 2)u^2$

(12) Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y = x + 2$, $y = -3x + 8$.

Rpta. $\frac{23}{6}u^2$

(13) Encontrar el área de la figura plana que forman las curvas $y = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$; $y = \pm\sqrt{x}$.

Rpta. $\frac{61}{125}u^2$

(14) Calcular el área de la figura comprendida entre las parábolas $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, y la recta $y = 2x$. **Rpta.** $4u^2$

(15) Hallar el área mayor encerrada por las curvas $x^2 - 2y^3 = 0$, $x^2 - 8y = 0$, $y = 3$.

Rpta. $\left(\frac{16}{5} + 5\sqrt{2}\right)u^2$

(16) Hallar el área de la porción en el primer cuadrante limitada superiormente por $y = 2x$ e inferiormente por $y = x\sqrt{3x^2+1}$ **Rpta.** $\frac{2}{9}u^2$

(17) Hallar el área de la figura comprendida entre la hipérbola $x^2 - y^2 = 9$, el eje X y el diámetro que pasa por el punto (5,4). **Rpta.** $(9\ln 3)u^2$

(18) Calcular el área del trapecio mixtilineo limitado por la línea $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$ y el eje de abscisas. **Rpta.** $4u^2$

(19) Hallar el área de la superficie limitada por la parábola $y = 6 + 4x - x^2$ y la cuerda que une los puntos (-2, -6) y (4,6). **Rpta.** $36u^2$

(20) Hallar el área de la figura comprendida entre las curvas $yx^2 = 2$, $x + y = 4$, $x = 1$, $x = 2$. **Rpta.** $\frac{9}{4}u^2$

(21) Hallar el área limitada por las siguientes curvas:

a) $y^2 = 2x$, $y = -4 + x$ **Rpta.** $18u^2$

b) $x^2 = 4ay$, $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ **Rpta.** $\left(2a^2\pi - \frac{4a^2}{3}\right)u^2$

c) $y = x^2$, $y^3 = x$, $x + y = 2$ Rpta. $\frac{49}{12}u^2$

d) $y = \sqrt{x^2 - 3}$, $y = |x - 1|$, $y = 0$ Rpta. $\left(\frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\right)u^2$

e) $y = x^3 + x - 4$, $y = x$, $y = 8 - x$.

f) $y = 4 - \ln(x+1)$, $y = \ln(x+1)$, $x = 0$ Rpta. $2\left(e^2 - 3\right)u^2$

g) $y = x^2 - 2|x| + 2$, $y = \frac{5}{4}$ Rpta. $\frac{2}{3}u^2$

h) $y = x^3 - 3x$, $y = x$ Rpta. $8u^2$

i) $y^2 = 4x$, $x = 12 + 2y - y^2$ Rpta. $54.61\ u^2$

j) $y\left(x^2 + 4\right) = 4(2 - x)$, $y = 0$, $x = 0$ Rpta. $\left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right)u^2$

k) $x = e^y$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \ln 4$ Rpta. $3u^2$

l) $y = 2x + 2$, $x = y^2 + 1$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$ Rpta. $\left(15 + \frac{4}{3}\sqrt{2}\right)u^2$

ll) $y = \sec^2 x$, $y = \operatorname{tg}^2 x$, $x = 0$ Rpta. $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)u^2$

m) $y = x^2$, $y = 8 - x^2$, $4x - y + 12 = 0$ Rpta. $64u^2$

n) $y = 3x^{5/4} - x^{4/3}$, $y = 0$, $x = -1$, Rpta. $\frac{18}{7}u^2$

ñ) $y = x^2 - 3x$, $x = -1$, $x = 4$ Rpta. $\frac{49}{6}u^2$

22) Hallar el área de la región comprendida entre las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ con $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ Rpta. $2\sqrt{2}u^2$

(23) Hallar el área de la región limitada por los gráficos $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

Rpta. $\left(\sqrt{2}-1\right)u^2$

(24) Hallar el área de la figura limitada por la línea en donde $y^2 = x^2 - x^4$.

Rpta. $\frac{4}{3}u^2$

(25) Hallar el área comprendida entre las curvas $y = e^x$, $y = \ln x$, $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$

Rpta. $6.63u^2$

(26) Hallar el área de la región limitada por el astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Rpta. $\frac{3a^2\pi}{8}u^2$

(27) Hallar el área de la región comprendida entre las curvas $y = xe^{8-2x^2}$, $y = x$.

Rpta. $\frac{e^8-9}{2}u^2$

(28) Hallar el área de la región comprendida entre las curvas $y\left(x^2+4\right) = 8$, $3x^2 - 4y - 8 = 0$

Rpta. $2(\pi+2)u^2$

(29) Hallar el área de la figura comprendida entre las curvas $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$, $x = -1$, $x = 1$

Rpta. $3\sqrt[3]{2}\,u^2$

(30) Calcular el área de la figura comprendida entre las curvas $y = x^3 e^{8-x^2}$, $y = 4x$.

Rpta. $\frac{e^8-73}{4}u^2$

(31) Calcular el área de la figura comprendida entre la curva $y = \operatorname{tg} x$, el eje X y la recta $x = \frac{\pi}{3}$ **Rpta.** $(\ln 2)u^2$

(32) Calcular el área de la figura comprendida entre la línea $y = x(x-1)^2$ y el eje de las abscisas. **Rpta.** $\frac{1}{12}u^2$

(33) Hallar el área de la región limitada por los siguientes gráficos de $y = |x^3 - 4x^2 + x + 6|$, $3y + x^2 = 0$, $x = 0$, $x = 4$. **Rpta.** $\frac{455}{6}u^2$

(34) Hallar el área limitada por las curvas $y = x^3 + 3x^2 + 2$, $y = x^3 + 6x^2 - 25$.

Rpta. $108\ u^2$

(35) Hallar el área limitada por las líneas: $y = x^3 - 5x^2 - 8x + 12$, $y = x^3 - 6x^2 + 21$.

Rpta. $166\frac{2}{3}\ u^2$

(36) Calcular el área de la figura limitada por las curvas siguientes:

a) $y = |x-1|$, $y = x^2 - 2x$, $x = 0$, $x = 2$. **Rpta.** $\frac{7}{3}u^2$

b) $y = |x-2| - |x-6|$, $x - y = 4$ **Rpta.** 8

c) $y = |x-2|$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$, $x = 3$ **Rpta.** $\frac{65}{6}u^2$

d) $y = |x-5| - |x+3|$, $x + y = 2$ **Rpta.** $34u^2$

e) $y = x - x^2$, $y = -x$ **Rpta.** $\frac{4}{3}u^2$

f) $y = x^3 + x$, $x = 0$, $y = 2$, $y = 0$ **Rpta.** $\frac{5}{4}u^2$

g) $y=\dfrac{x^2-x}{1+x^2}$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$ **Rpta.** $\left[1+\dfrac{\pi}{2}-\text{arctg}\,2+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{8}{5}\right)\right]u^2$

i) $y=x^2$, $y=2x-1$, $y-4=0$ **Rpta.** $\dfrac{7}{12}u^2$

j) $x=0$, $y=\text{tg}\,x$, $y=\dfrac{2}{3}\cos x$ **Rpta.** $\left(\dfrac{1}{3}-\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)u^2$

k) $y=\text{arctg}\,x$, $y=\arccos\dfrac{3x}{2}$, $y=0$ **Rpta.** $\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)\right)u^2$

l) $y=\text{arsen}\,x$, $y=\arccos x$, $x=1$. **Rpta.** $\left(\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)u^2$

ll) $y=x^2$, $y=x^3$, $x=-1$, $x=2$ **Rpta.** $\dfrac{25}{12}u^2$

m) $y=\left|x^2-1\right|$, $y=3$ **Rpta.** $8\ u^2$

n) $y=3x-x^2$, $y=x^2-x$ **Rpta.** $\dfrac{8}{3}u^2$

(37) Calcular el área de la figura limitada por el eje de ordenadas y la línea $x=y^2(y-1)$

Rpta. $\dfrac{1}{12}u^2$

(38) Calcular el área del segmento de la parábola $y=x^2$, que corta la recta $y=3-2x$.

Rpta. $\dfrac{32}{3}u^2$

(39) Hallar el área de la superficie limitada por las curvas $y=x\left(\pm\sqrt{x}\right)$ y la recta $x=4$.

Rpta. $\dfrac{128}{5}u^2$

(40) Hallar el área de la figura limitada por $y = \left|20x + x^2 - x^3\right|$, $y = 0$

Rpta. $\frac{2321}{12}u^2$

(41) Hallar el área de la región limitada por las curvas:

a) $x + y - y^3 = 0$, $x - y + y^2 = 0$ Rpta. $\frac{37}{12}u^2$

b) $8x = 2y^3 + y^2 - 2y$, $8x = y^3$, $y^2 + y - 2 = 0$ Rpta. $\frac{37}{96}u^2$

(42) Calcular el área de la superficie del primer cuadrante limitada por el arco de la curva que va desde el eje Y hasta la primera intersección con el eje X.

a) $y = e^x \operatorname{sen} x$ Rpta. $\frac{e^{\pi}+1}{2}u^2$

b) $y = \operatorname{sen}(x+1)$ Rpta. $1.54\ u^2$

c) $x + y + y^2 = 2$ Rpta. $\frac{7}{6}u^2$

d) $y = e^{x/2}\cos 2x$ Rpta. $\frac{8e^{\frac{\pi}{8}} - 2}{17}u^2$

e) $y = x^3 - 8x^2 + 15x$ Rpta. $\frac{63}{4}u^2$

(43) Hallar el área de la figura limitada por las curvas $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

Rpta. $\frac{4a^2}{3}u^2$

(44) Hallar el área que encierra la curva $9ay^2 = x(x-3a)^2$ Rpta. $\frac{8\sqrt{3}}{5}a^2\ u^2$

(45) Encontrar el área de un lazo de la curva $a^2y^4 = x^4\sqrt{a^2-x^2}$.

Rpta. $\frac{4a^2}{5}u^2$

(46) Encontrar el área de un lazo de la curva $y^2(a^2+x^2) = x^2(a^2-x^2)$.

Rpta. $\frac{a^2}{2}(\pi-2)u^2$

(47) Encontrar el área de un lazo de la curva $a^2y^2(a^2+x^2) = (a^2-x^2)^2$

Rpta. $a^2\left(3\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-2\right)u^2$

(48) Encontrar el área de un lazo de la curva $6a^2y^4 = b^2x^2(a^2-2ax)$.

Rpta. $\frac{ab}{30}u^2$

(49) Calcular el área del trapecio mixtilineo limitado por la línea $y = e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2$, por el eje X y por dos rectas paralelas al eje Y trazadas de manera que pasan por los puntos extremos de la función Y.

Rpta. $\frac{3}{e}(e^3-4)u^2$

(50) Calcular las áreas de las figuras curvilíneas formadas por la intersección de la elipse $\frac{x^2}{4}+y^2 = 1$ y la hipérbola $\frac{x^2}{2}-y^2 = 1$.

Rpta. $s_1 = s_3 = \pi - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln 3 - 2\,\text{arcsen}\sqrt{\frac{2}{3}}$; $s_2 = 2(\pi - s_1)$

(51) Calcular el área de la región limitada por: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-1|} & , \ x \le 5 \\ (x-3)^2-2 & , \ x > 5 \end{cases}$, el eje X y las rectas $x = -3$ y $x = 7$

Rpta. $A = \frac{76}{3}u^2$

(52) Calcular el área de la figura comprendida entre la curva $y=|x^2-1|$, $-2 \leq x \leq 2$ y el eje X. **Rpta.** $4\ u^2$

(53) Calcular el área de la región limitada por la curva $y^2 = \dfrac{1-x}{1+x}$, y su asíntota.

Rpta. $A = 2\pi$

(54) Calcular el área del interior del ovalo de ecuación $(1+x^2)y^2 = 1-x^2$

(55) Hallar el área de la región acotada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje X.

Rpta. $8\ u^2$

(56) Hallar una fórmula para encontrar el área de la región limitada por la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$, $a > 0$, el eje X y una recta trazada del origen a un punto.

Rpta. $A = \dfrac{a^2}{2}\ln\left[\dfrac{x+y}{2}\right]$

(57) Hallar el área de la región limitada por las curvas $x = -y^2$, $y = x + 6$.

(58) Hallar el área de la región, en el primer cuadrante limitado por las curvas $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, $y = -x^3 + 4x^2 - 3x$ **Rpta.** $\dfrac{19}{12}u^2$

(59) Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ y $g(x) = -x^2 + 3x - 1$.

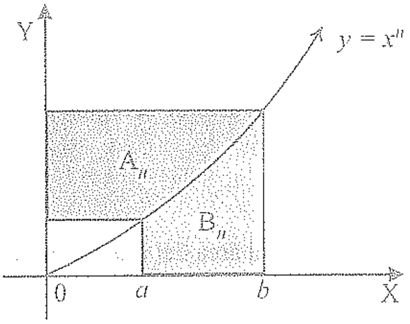
(60) Encontrar el área de la región R, ubicado en el segundo cuadrante y acotado por las gráficas de $y = x^2$, $x^2 = 4y$, $x - y + 6 = 0$. **Rpta.** $\dfrac{10}{3}u^2$

(61) Una parábola de eje vertical corta a la curva $y = x^3 + 2$ en los puntos (-1,1) y (1,3), sabiendo que la curva mencionada encierra una región de área $2\ u^2$. Halle la ecuación de la curva.

(62) Sostenemos que $\int_a^b x^n dx + \int_{a^n}^{b^n} \sqrt[n]{y}\, dy = b^{n+1} - a^{n+1}$.

a) Utilice la figura adjunta para justificar esto mediante un argumento geométrico.

b) Pruebe el resultado utilizando el teorema fundamental del cálculo.



c) Pruebe que $A_n = nB_n$.

(63) Hallar el área de la región comprendida entre las curvas $x^2 y + 4y - 8 = 0$ y $x^2 = 4y$.

(64) Calcular el área de la región comprendida por las curvas $x^2 + y^2 = 25$, $3y^2 = 16x$, $3x^2 = 18y$.

(65) El área comprendida entre $y = 10x - 5y^2$, el eje X es dividido en dos partes iguales por una recta que pasa por el origen. Hallar la ecuación de la recta.

(66) Hallar el área de la región limitada por las curvas $x = -y^2$, $y = x + 6$.

(67) Calcular el área de la región acotada por las curvas de ecuación: $4y = \pm(x-4)^2$ y $4y = \pm(x+4)^2$.

(68) Calcular el área de la figura comprendida entre las curvas $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$, $y = -\frac{a^3}{x^2 + a^2}$

(69) Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = x^3 + x - 1$, $g(x) = -x^2 + 3x$.

(70) Hallar el área de la región acotada por la gráfica $f(x) = |x^2 + 2x|$ y el eje X en el intervalo $[-2, 2]$

(71) Dado la parábola $y=3+2x-x^2$, Hallar el área de la región plana R, comprendida entre la parábola y la recta que pasa por los puntos $(2,3)$; $(2,-5)$.

(72) Hallar el área de la región R limitada por la curva $y=(x-3)(x-2)(x+1)$, las rectas $x=0$, $x=4$ y el eje X.

(73) Calcular el área de la región en el primer cuadrante limitado por las curvas $y=x^2$, $x^2=4y$ y la recta $x+y=b$.

(74) Calcular el área de la región R limitada por las curvas $y=x^2-2|x|+3$, $\frac{x^2}{2}-y+3=0$

(75) Encuentre el área de la región limitada por la curva $y=x^4-2x^3+2$ entre $x=-1$, $x=2$

(76) Hallas el área de la región acotada por las curvas $y=\begin{cases}\frac{4x-x^2}{4} & , \ x\geq 0\\ x & , \ x<0\end{cases}$,

$$y=\begin{cases}\frac{x^2+8x-48}{16} & , \ x>-4\\ -3x-16 & , \ x\leq -4\end{cases}$$

(77) Determine m de tal forma que la región sobre la recta $y=mx$ y bajo la parábola $y=2x-x^2$, tenga un área de 36 unidades cuadradas.

(78) Determine m de tal forma que la región sobre la curva $y=mx^2$, $m>0$, a la derecha del eje Y, y bajo la recta $y=m$, tenga un área de k unidades cuadradas ($k>0$).

(79) Hallar el área de la región R limitada por $y=\frac{2|x|}{1+x^2}$, el eje X y las dos rectas verticales correspondientes a las abscisas de los puntos máximos absolutos.

(80) Una parábola del eje vertical corta a la curva $y = x^3 + 2$, en los puntos (-1,1) y (1,3). Sabiendo que la curva mencionada encierra una región de área $2u^2$. Halle la ecuación de la curva.

(81) Determinar el área comprendida entre la curva $y^3 = x^2$ y las rectas $2x + y + 1 = 0$, y $x - y = 4$. **Rpta.** $\frac{183}{10}u^2$

(82) Determinar el área comprendida entre las líneas $y = x^2$, $y = x + 2$ y $y = -3x + 6$.

Rpta. $\frac{23}{6}u^2$

(83) Determinar el área comprendida entre la curva $y = x^3 - 3x^2 - 10x$ y la recta $y = -6x$. **Rpta.** $\frac{131}{4}u^2$

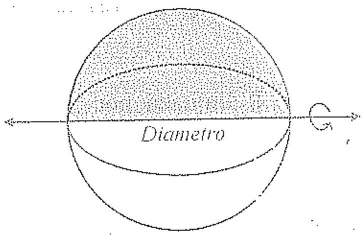
(84) Hallar el área de la región comprendida entre la línea

$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \le 2 \\ -x+6 & , \quad x > 2 \end{cases}$ y las rectas $x = 0$, $x = 3$. **Rpta.** $\frac{37}{6}u^2$

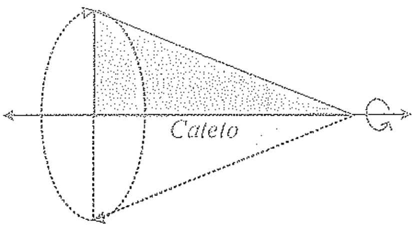
3.2 VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.-

DEFINICIÓN.- Un sólido de revolución es aquel que se obtiene al rotar una región plana alrededor de una recta en el plano, llamado eje de revolución.

Ejemplo.- Si a la región comprendida dentro de una semicircunferencia y su diámetro, se la hace girar alrededor de su diámetro, se obtiene una esfera.



Ejemplo.- Si a la región comprendida dentro de un triángulo, se la hace girar alrededor de uno de sus catetos, se obtiene un cono recto.

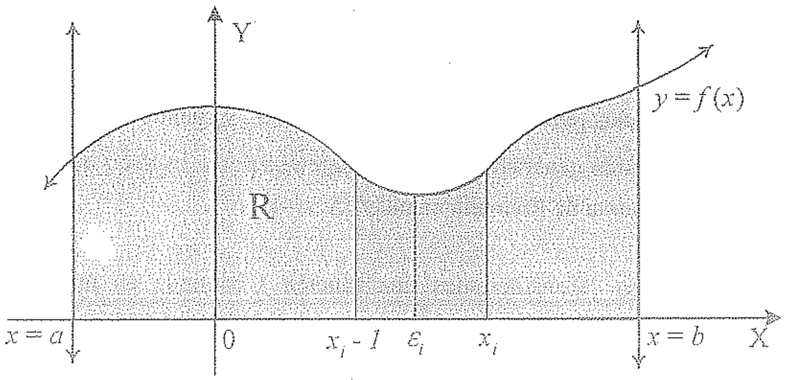


Para calcular el volumen de un sólido de revolución consideraremos los siguientes métodos.

3.2.1 MÉTODO DEL DISCO CIRCULAR.-

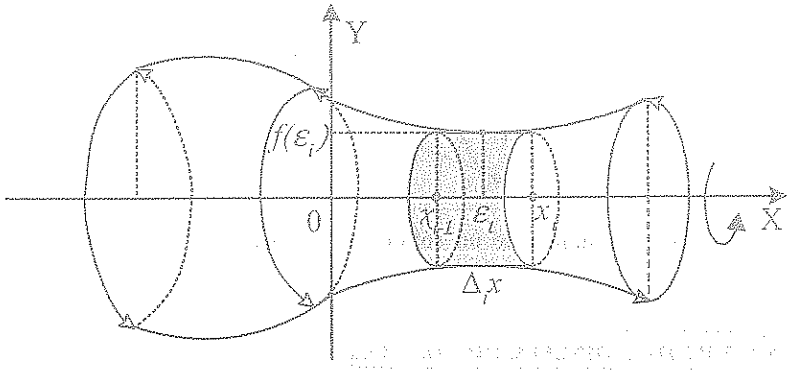
Consideremos una función f continua en el intervalo $[a,b]$ y que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Sea R la región plana acotada por la curva $y = f(x)$, el eje X y las rectas $x=a$ y $x = b$.



Consideremos una partición del intervalo cerrado $[a,b]$, $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, donde i-ésimo sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tiene longitud $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ y tomemos $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para i = 1,2,...,n, luego trazamos los rectángulos que tienen una altura $f(\varepsilon_i)$ unidades y ancho $\Delta_i x$ unidades.

Si se hace girar el i-ésimo rectángulo alrededor del eje X se obtiene un disco circular de la forma de un cilindro circular recto donde el radio de la base es $f(\varepsilon_i)$ y sus altura $\Delta_i x$.



El volumen del i-ésimo disco circular es: $\boxed{\Delta_i V = \Pi(f(\varepsilon_i))^2 \Delta_i x}$

Como son n discos circulares, entonces el volumen de los n discos circulares es:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} \Pi(f(\varepsilon_i))^2 \Delta_i x}$$

Esta expresión nos representa la suma de Riemann, y cuando $|\Delta_i x| \to 0$, se obtiene el volumen del sólido generado al cual denotaremos por v, es decir que v se define como el límite de la suma de Riemann cuando $|\Delta_i x| \to 0$.

DEFINICIÓN.- Consideremos una función f continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y suponiendo que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$ y sea S el sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje X la región R acotada por la curva $y = f(x)$ el eje X y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, y sea V el volumen del sólido S al cual definiremos por:

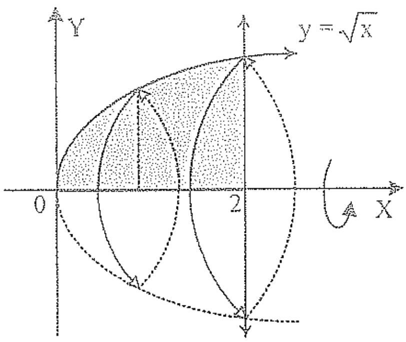
$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Pi(f(\varepsilon_i))^2 \Delta_i x = \Pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

$$\boxed{V=\Pi\int_a^b (f(x))^2\,dx}$$

(Método del disco circular).

Ejemplo.- Determinar el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar alrededor del eje X la región limitada por la curva $y=\sqrt{x}$, el eje X y la recta $x=2$.

Solución



$$V=\Pi\int_0^2 y^2\,dx=\Pi\int_0^2 x\,dx=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=2\Pi$$

$$\therefore\ V=2\Pi\ u^3$$

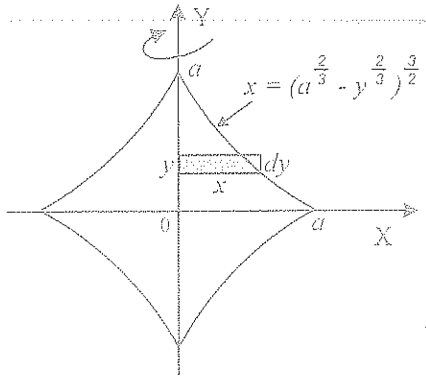
OBSERVACIÓN.- Si la región R está limitada por la curva $x=g(y)$, el eje Y y las rectas $y=c,\ y=d\ (c<d)$ entonces el volumen del sólido generado al girar la región R sobre el eje Y, está dado por la expresión.

$$\boxed{V=\Pi\int_c^d (g(y))^2\,dy}$$

Ejemplo.- Hallar el volumen del sólido generado al rotar la región acotada por $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ alrededor del eje Y.

Solución

$$V=2\Pi\int_0^a x^2\,dy=2\Pi\int_0^a (a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}})^3\,dy$$



$$V=2\Pi\int_0^a (a^2-3a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}-y^2)dy$$

$$V=2\Pi\left[a^2y-\frac{3a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+\frac{3a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}-\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^a$$

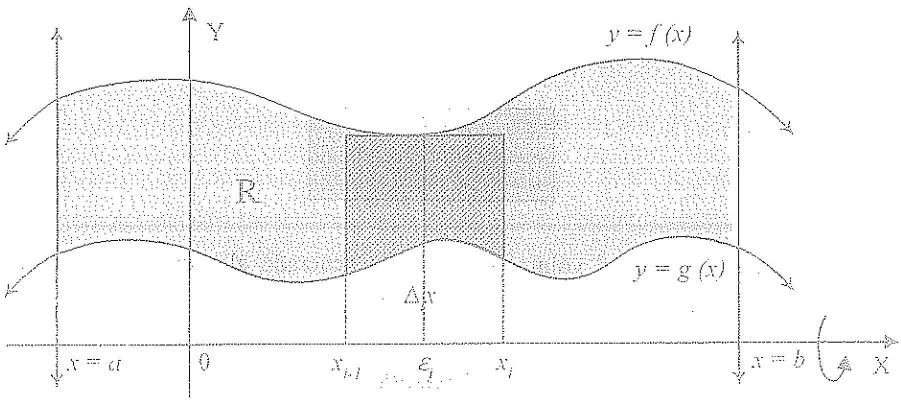
$$V=2\Pi\left[a^2y-\frac{9a^{4/3}y^{5/3}}{5}+\frac{9a^{2/3}y^{7/3}}{7}-\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^a$$

$$V=2\Pi\left[a^3-\frac{9a^3}{5}+\frac{9a^3}{7}-\frac{a^3}{3}\right]-0=2\Pi\left[\frac{2a^3}{3}-\frac{18a^3}{35}\right]=\frac{32a^3\pi}{105}u^3$$

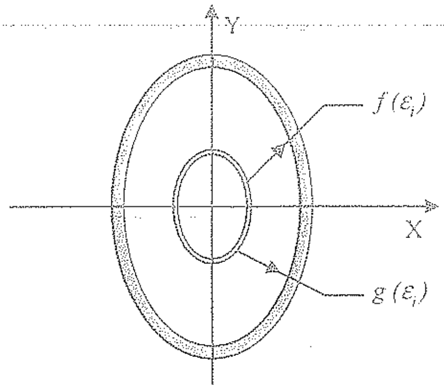
3.2.2 MÉTODO DEL ANILLO CIRCULAR.-

Consideremos dos funciones f y g continuas en un intervalo cerrado $[a,b]$ de tal manera que $f(x)\geq g(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$ y R la región acotada por las curvas $y=f(x)$, $y=g(x)$ y las rectas verticales $x=a \wedge x=b$.

Sea S el sólido obtenido al hacer girar la región R alrededor del eje X.



En el intervalo $[a,b]$ consideremos el i-ésimo sub-intervalo $[x_{i-1},x_i]$ y sea $\varepsilon_i\in[x_{i-1},x_i]$, cuando el i-ésimo rectángulo se hace girar alrededor del eje X, se obtiene un anillo circular.



La diferencia de las áreas de las dos regiones circulares es $\Pi\left[f^2(\varepsilon_i)-g^2(\varepsilon_i)\right]$ y el espesor de estas regiones es $\Delta_i x$, luego la medida del volumen del i-ésimo anillo circular es: $\boxed{\Delta_i V=\Pi\left[f^2(\varepsilon_i)-g^2(\varepsilon_i)\right]\Delta_i x}$

Como son n anillos circulares, entonces:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i V=\sum_{i=1}^{n}\Pi\left[f^2(\varepsilon_i)-g^2(\varepsilon_i)\right]\Delta_i x}$$

Que es la suma de Riemann, entonces el volumen del sólido S se define como el límite de la suma de Riemann cuando $|\Delta_i x|\to 0$.

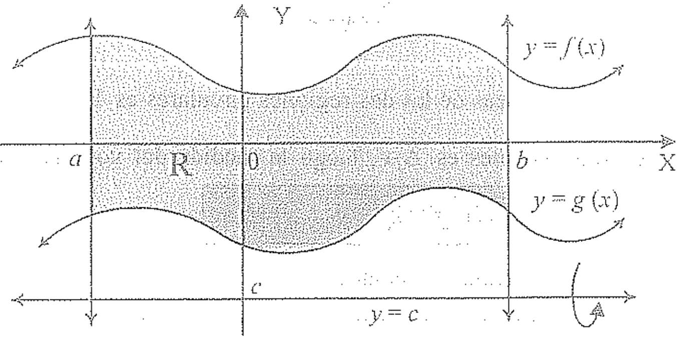
DEFINICIÓN.- Consideremos f y g dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ de tal manera que $f(x)\geq g(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$, entonces el volumen V del sólido de revolución S generado al rotar alrededor del eje X la región R acotada por las curvas $y=f(x)$, $y=g(x)$ y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ es dado por la fórmula.

$$V=\lim_{|\Delta_i x|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Pi\left[f^2(\varepsilon_i)-g^2(\varepsilon_i)\right]\Delta_i x$$

$$\boxed{V=\Pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx}$$

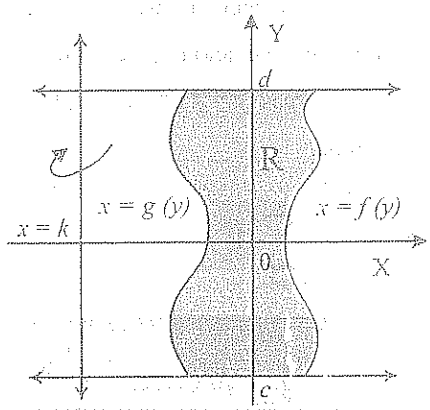
OBSERVACIÓN.- Si la región R limitada por las curvas $y=f(x)$, $y=g(x)$ de tal manera que $f(x)\geq g(x)$, $\forall x\in[a,b]$, y las rectas verticales $x=a$, $x=b$ gira alrededor de la recta $y=c$ donde $(g(x)\geq c)$, entonces el volumen del sólido generado al rotar la región R alrededor de la recta $y=c$, es expresado por la fórmula.

$$\boxed{V=\Pi\int_a^b\left[(f(x)-c)^2-(g(x)-c)^2\right]dx}$$



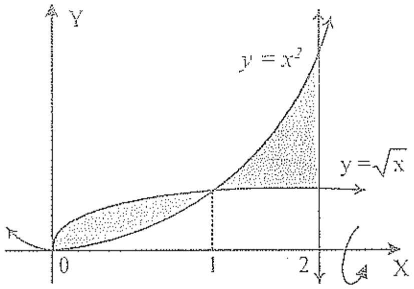
OBSERVACIÓN.- Si la región R limitada por las curvas $x=f(y)$, $x=g(y)$ y por las rectas horizontales $y=c$, $y=d$, gira alrededor de la recta vertical $x=k$, entonces el volumen del sólido de revolución obtenido es expresado por la fórmula.

$$\boxed{V=\Pi\int_c^d\left[(f(y)-k)^2-(g(y)-k)^2\right]dy}$$



Ejemplo.- Calcular el volumen del sólido obtenido al hacer girar alrededor del eje X, la región limitada por las gráficas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$.

<u>**Solución**</u>



$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \sqrt{x} \\ x = 0, \quad x = 1 \end{cases}$$

$$V = \Pi\left[\int_0^1 \left[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right]dx + \int_1^2 \left[(x^2)^2 - (\sqrt{x})^2\right]dx\right]$$

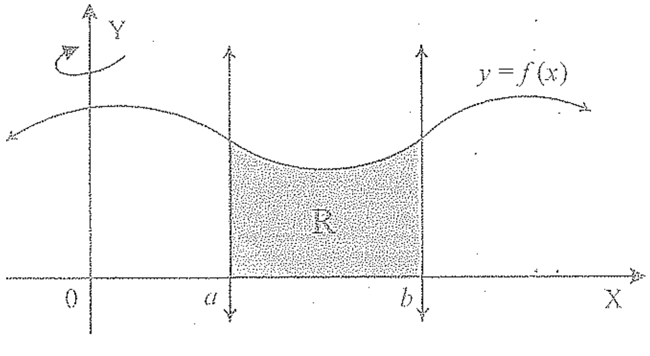
$$V = \Pi\left[\int_0^1 (x - x^4)dx + \int_1^2 (x^4 - x)dx\right]$$

$$V = \Pi\left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2\right] = \Pi\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - 0 + \left(\frac{32}{5} - 2\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \Pi(1 - 2 + 6) = 5\Pi \qquad \therefore \; V = 5\Pi \; u^3$$

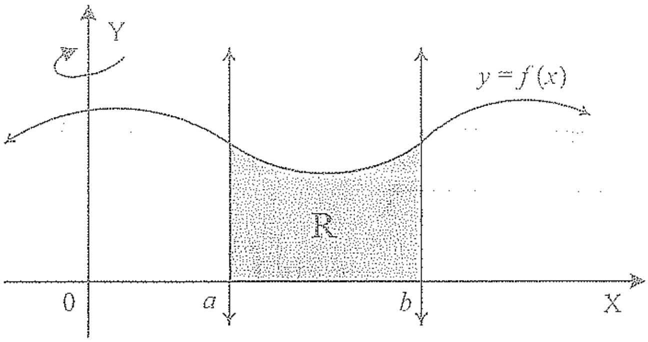
3.2.3 MÉTODO DE LA CORTEZA CILINDRICA.-

Consideremos una función $y = f(x)$ continua en $[a, b]$, donde $a \geq 0$, y $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ y sea R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje X y las rectas verticales $x = a, x = b$.



El volumen del sólido de revolución S engendrado al hacer girar alrededor del eje Y, la región R está dado por la fórmula:

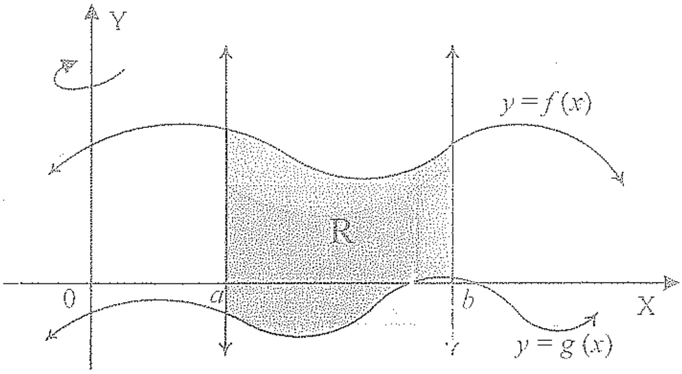
$$\boxed{V = 2\Pi \int_a^b x f(x)\,dx}$$



OBSERVACIÓN.-

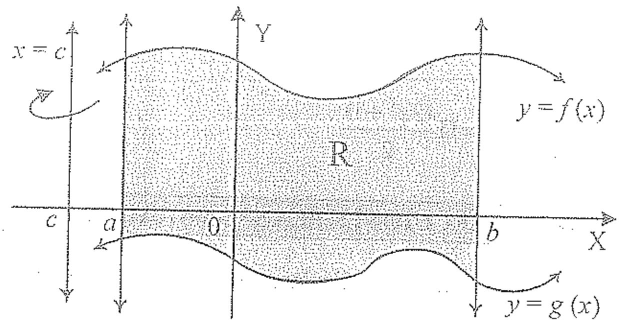
1) El volumen del sólido de revolución generado al hacer rotar alrededor del eje Y, la región R acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ tal que $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, $a \geq 0$ es dado por la fórmula:

$$\boxed{V = 2\Pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx}$$



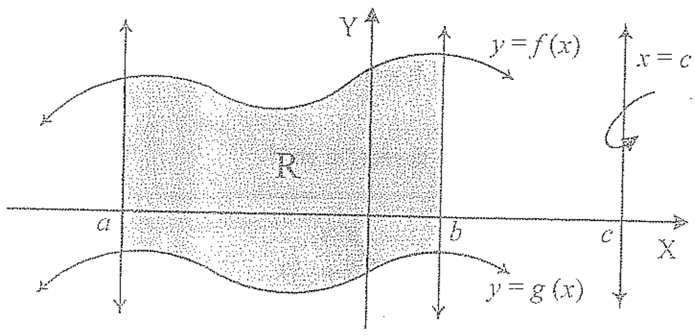
2) El volumen del sólido de revolución generado al hacer rotar alrededor de la recta $x = c$, la región R acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ donde $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ y las rectas verticales $x = a$, $x = b$, donde $a \geq c$ es expresado por la fórmula:

$$\boxed{V = 2\Pi \int_a^b (x-c)[f(x) - g(x)]\,dx}$$



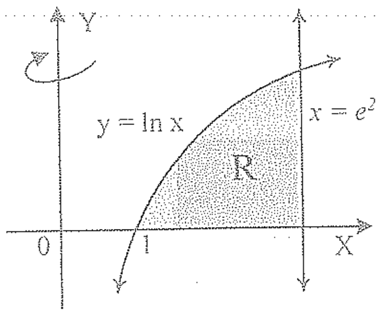
3) Cuando la región R está a la izquierda del eje de revolución, el volumen del sólido generado está dado por la fórmula.

$$\boxed{V = 2\Pi \int_a^b (c-x)(f(x) - g(x))\,dx}$$



Ejemplo.- Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región R limitada por las curvas $y = \ln x$, el eje X, $x = e^2$ alrededor del eje Y.

Solución



$$V = 2\Pi\int_1^{e^2} xy\,dx = 2\Pi\int_1^{e^2} x\ln x\,dx$$

$$V = 2\Pi\left(\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^{e^2}$$

$$V = 2\Pi\left[\left(\frac{e^4\ln e^2}{2} - \frac{e^4}{4}\right) - \left(0 - \frac{1}{4}\right)\right]$$

$$V = 2\Pi\left[e^4 - \frac{e^4}{4} + \frac{1}{4}\right] = \Pi\,\frac{(3e^4+1)}{2} \qquad \therefore\ V = \frac{3e^4+1}{2}\,\Pi\ u^3$$

3.2.4 MÉTODO DE LAS SECCIONES PLANAS PARALELAS CONOCIDAS.-

i) Si las secciones son perpendiculares al eje X, el volumen del sólido S es dado por la fórmula.

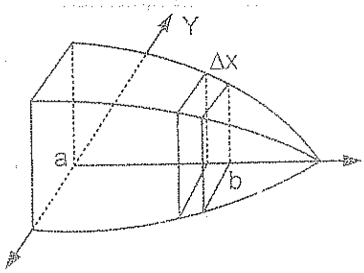
$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx}$$

donde A(x) es el área de la sección en x.

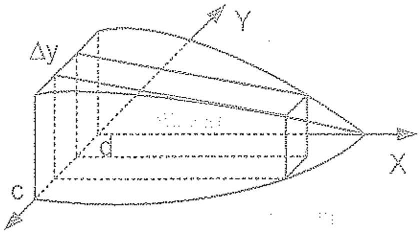
ii) Si las secciones son perpendiculares al eje Y, el volumen del sólido 5 es dado por la fórmula.

$$V = \int_c^d A(y)dy$$

donde A(y) es el área de la sección en Y.

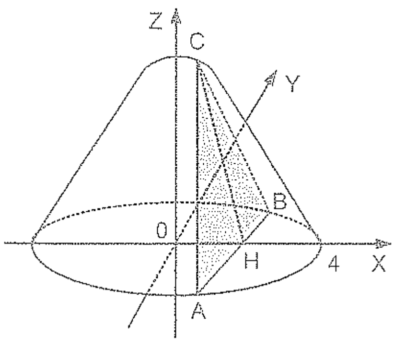


Sección perpendicular al eje X.



Sección perpendicular al eje Y.

Ejemplo.- Un sólido tiene una base circular de 4 unidades de radio. Encontrar el volumen del sólido si cada sección plana perpendicular al diámetro fijo es un triángulo equilátero.



Desarrollo

La ecuación del círculo es $x^2+y^2=16$ el lado del triángulo equilátero ABC que es la sección transversal es de 2y, como su área

$$A(x)=\frac{AB.CH}{2}$$

También se tiene $A(x)=\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$ para triángulo equilátero, entonces:

$A(x)=\frac{(2y)^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}y^2=\sqrt{3}(16-x^2)$, Luego por simetría se tiene.

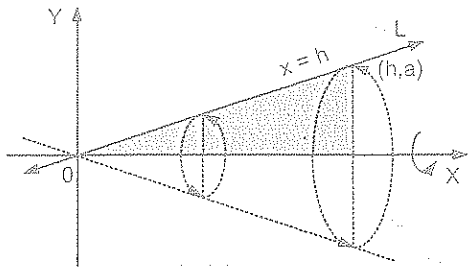
$$V=2\int_0^4 A(x)dx=2\int_0^4\sqrt{3}(16-x^2)dx=2\sqrt{3}\left(16x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=\frac{256}{3}\sqrt{3}\,u^3$$

$$\therefore\ V=\frac{256\sqrt{3}}{3}u^3$$

3.2.5 PROBLEMAS DESARROLLADOS.-

① Encontrar por integración el volumen de un cono circular recto de altura h unidades y de radio de la base "a" unidades.

Solución



La ecuación de la recta $L:\ y = \frac{a}{h}x$

$$V = \Pi\int_0^4 y^2\,dx = \frac{\pi a^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{\pi a^2 h}{3}u^3$$

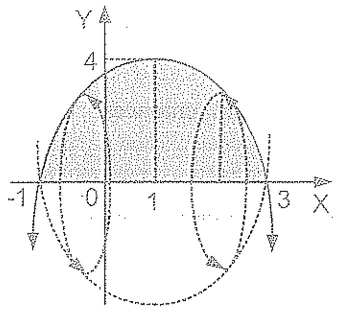
$$V = \frac{\pi a^2 h}{3}u^3$$

② Determinar el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar alrededor del eje X, la región limitada por el eje X y la curva $y = -x^2 + 2x + 3$.

Solución

$y = -x^2 + 2x + 3$, completando cuadrados.

$y - 4 = -(x-1)^2$ es una parábola de vértice V(1,4).



Para $y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 3$

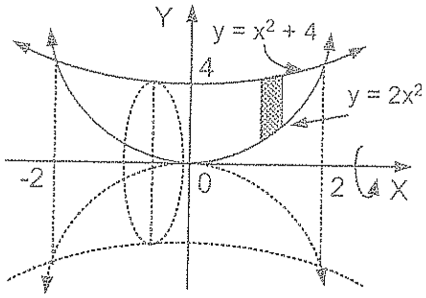
$$V = \pi\int_{-1}^{3} y^2\,dx = \pi\int_{-1}^{3}(-x^2 + 2x + 3)^2\,dx$$

$$V = \Pi\int_{-1}^{3}(x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 4)\,dx$$

$$\therefore\ V = \frac{512}{15}\Pi\ u^3$$

③ Encontrar el volumen del sólido generado por la rotación de la región entre las curvas $y = x^2 + 4$ e $y = 2x^2$ alrededor del eje X.

Solución



$$\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x^2 = x^2 + 4 \\ x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{array}$$

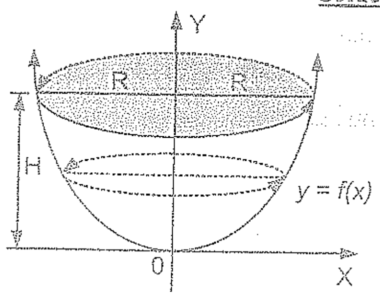
$$V = \Pi \int_{-2}^{2} [(x^2+4)^2 - (2x^2)^2] dx$$

$$V = \Pi \int_{-2}^{2} (-3x^4 + 8x^2 + 16) dx$$

$$V = \frac{1024}{15} \Pi \ u^3$$

(4) Hallar el volumen del paraboloide de revolución, si el radio de su base es R y su altura es H.

Solución



La ecuación de la parábola es $x^2 = ky$

como $x = R$, $y = H$

$$R^2 = kH \Rightarrow k = \frac{R^2}{H} \Rightarrow x^2 = \frac{R^2 y}{H}$$

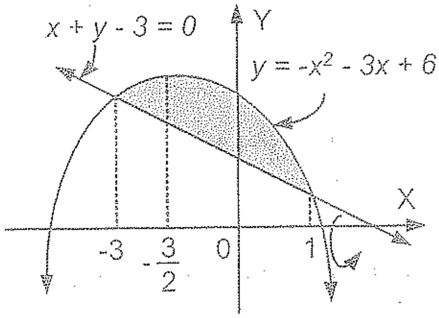
$$V = \Pi \int_0^H x^2 dy = \Pi \int_0^H \frac{R^2}{H} y \, dy = \frac{\Pi R^2}{H} \cdot \frac{y^2}{2} \Bigg|_0^H = \frac{\Pi R^2 H}{2} \qquad \therefore \ V = \frac{R^2 H \Pi}{2} u^3$$

(5) Encontrar el volumen cuando el área plana encerrada por $y = -x^2 - 3x + 6$, y $x + y - 3 = 0$ gira alrededor de $y = 0$.

Solución

$y = -x^2 - 3x + 6 \Rightarrow y - \frac{33}{4} = -(x + \frac{3}{2})^2$ parábola

$$\begin{cases} y = -x^2 - 3x + 6 \\ y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow -x^2 - 3x + 6 = 3 - x$$



$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

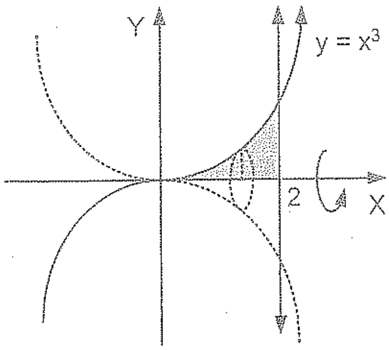
$$\Rightarrow x - 3 \text{ y } x = 1$$

$$V = \Pi \int_{-3}^{1} [(-x^2 - 3x + 6)^2 - (3 - x)^2]dx$$

$$V = \Pi \int_{-3}^{1} (x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 30x + 27)dx = \frac{1792}{15}\Pi\, u^3 \qquad \therefore\ V = \frac{1792}{15}\Pi\, u^3$$

6. Encontrar el volumen del sólido generado al rotar alrededor del eje X la región acotada por la curva $y = x^3$ y las rectas x = 0, x = 2.

Solución

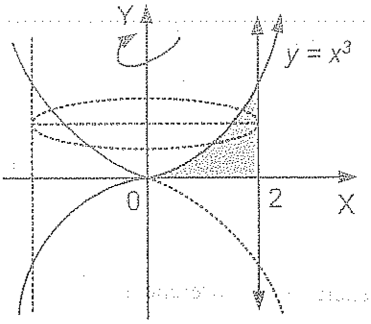


$$V = \Pi \int_{0}^{2} y^2 dx = \Pi \int_{0}^{2} x^6 x$$

$$\therefore\ V = \frac{128}{7}\Pi\, u^3$$

7. Encontrar el volumen del sólido generado al rotar la región del ejercicio 6 alrededor del eje Y.

Solución



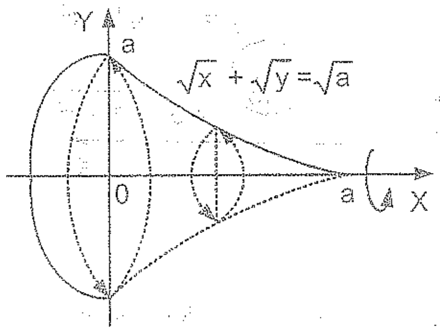
$$V = 2\Pi\int_0^2 x\,f(x)\,dx$$

$$V = 2\Pi\int_0^2 x^4\,dx$$

$$\therefore \quad V = \frac{64}{5}\Pi\ u^3$$

(8) Hallar el volumen del sólido engendrado haciendo girar alrededor del eje X, la superficie limitada por la curva $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, y la recta x = 0, y = 0.

Solución



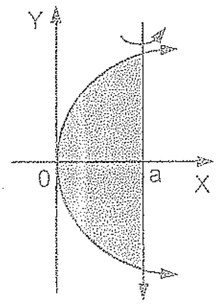
$$V = \pi\int_0^a y^2\,dx = \pi\int_0^a (\sqrt{a}-\sqrt{x})^4\,dx$$

$$= \pi\int_0^a (a-2\sqrt{x}\sqrt{a}+x)^2\,dx$$

$$\therefore \quad V = \frac{\pi a^3}{15}u^3$$

(9) Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor de la recta x = a, la parte de la parábola $y^2 = 4ax$, que se intercepta por la misma recta.

Solución



Aplicando el método de la corteza cilíndrica se tiene:

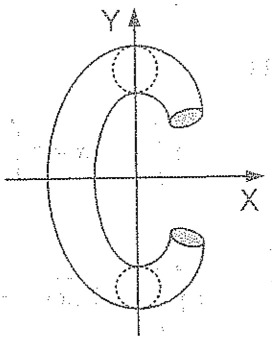
$$V = 2\left[2\Pi\int_0^a (a-x)y\,dx\right] = 4\Pi\int_0^a (a-x)\sqrt{4ax}\,dx$$

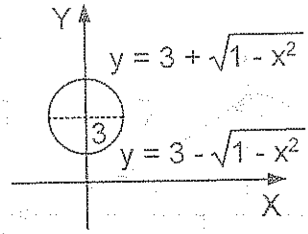
$$V=8\Pi\sqrt{a}\int_0^a (ax^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}})dx=9\Pi\sqrt{a}\left[\frac{2ax^{3/2}}{3}-\frac{2x^{5/2}}{5}\right]_0^a$$

$$=8\Pi\sqrt{a}\left[\frac{2a^{5/2}}{3}-\frac{2a^{5/2}}{5}\right]=\frac{32a^3\Pi}{15}u^3 \qquad \therefore\ V=\frac{32a^3\Pi}{15}u^3$$

(10) Calcular el volumen del sólido que genera la circunferencia $x^2+(y-3)^2=1$ al girar alrededor del eje X.

Solución





De la ecuación de la circunferencia $x^2+(y-3)^2=1$ despejamos y es decir:

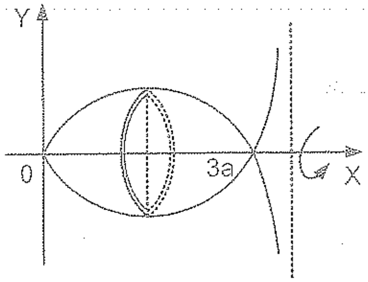
$(y-3)^2=1-x^2$, de donde tenemos: $y_1=3+\sqrt{1-x^2}$, $y_2=3-\sqrt{1-x^2}$

$$V=2\pi\int_0^1 (y_1^2-y_2^2)dx=2\pi\int_0^1 [(3+\sqrt{1-x^2})^2-(3-\sqrt{1-x^2})^2]dx$$

$$V=2\pi\int_0^1 12\sqrt{1-x^2}\,dx=24\Pi\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad \therefore\ V=6\pi^2u^3$$

(11) Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje X, el lazo de la curva $(x-4a)y^2=ax(x-3a)$, a > 0.

Solución



$(x-4a)y^2 = ax(x-3a)$, entonces:

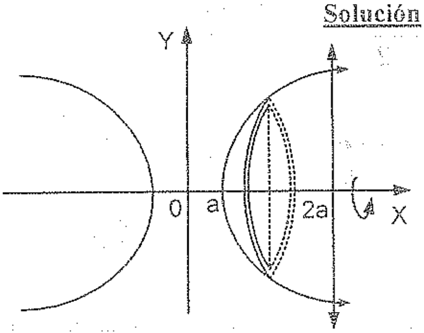
$y^2 = \dfrac{ax(x-3a)}{x-4a}$, de donde tenemos:

$$V = \int_0^{3a} y^2 dx = \Pi \int_0^{3a} \frac{ax(x-3a)}{x-4a} dx$$

$$V = \frac{15-16\ln 2a^2\Pi}{2} u^3$$

(12) Demostrar que el volumen de la parte del cuerpo de revolución engendrado al girar la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, alrededor del eje X, intercepta al plano x = 2a, es igual al volumen de la esfera de radio a.

Solución



$$V = \Pi \int_a^{2a} y^2 dx = \Pi \int_a^{2a} (x^2 - a^2) dx$$

$$V = \frac{4\Pi a^3}{3} u^3$$

Que es el volumen de la esfera.

(13) Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje Y, la región encerrada por las curvas $x^2 = 2y$ e $y = x^3 - 3x + 4$ y las rectas x = 0, x = 2.

Solución

La ecuación $x^2 = 2y$ es una parábola de vértice V(0,0)

Discutiendo la gráfica de $y = x^3 - 3x + 4$, para esto calculamos su derivada.

$\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ los puntos críticos.

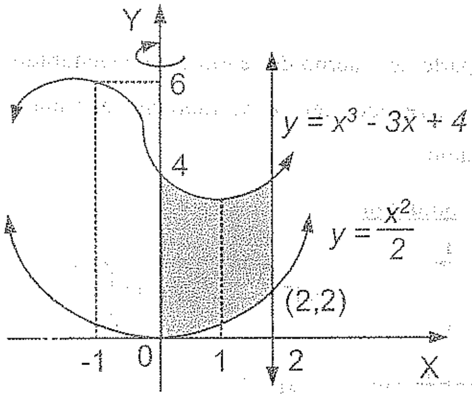
$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x \Rightarrow \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=-1} = -6 < 0 \Rightarrow \exists$ máximo en x = -1, de donde y = 6

Luego (-1,6) punto máximo.

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1} = 6 > 0 \Rightarrow \exists \text{ mínimo en } x = 1, \text{ de donde } y = 2$$

Luego (1,2) es el punto mínimo.

$$V = 2\Pi\int_0^2 x(f(x)-g(x))dx$$



$$= 2\Pi\int_0^2 x\left[(x^2-3x+4)-\frac{x^2}{2}\right]dx$$

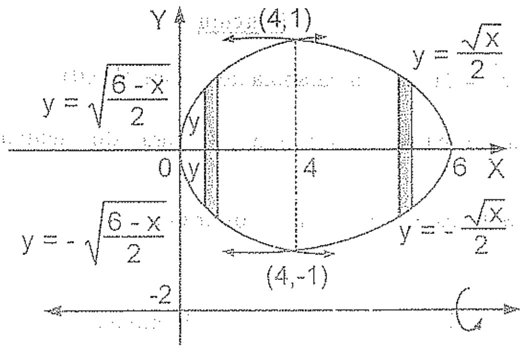
$$= 2\Pi\int_0^2 \left(x^3-\frac{x^3}{2}+3x^2+4x\right)dx$$

$$= 2\Pi\int_0^2 \left(x^4 . \frac{x^3}{2}-3x^2+4\right)dx$$

$$V = \frac{44}{5}\Pi u^3$$

(14) Sea R la región limitada por $x = 6-2y^2$, $x = 4y^2$. Hallar el volumen del sólido que se obtiene de rotar la región R alrededor de la recta y = -2.

Solución



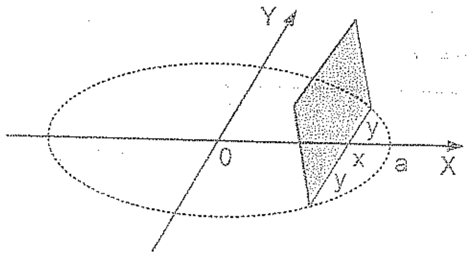
$$V=\Pi\left[\int_4^6\left[\left(\sqrt{\frac{6-x}{2}}-(-2)\right)^2-\left(-\frac{\sqrt{6x-2}}{2}-(-2)\right)^2\right]dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^4\left[\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-(-2)\right)^2-\left(-\frac{\sqrt{x}}{2}-(-2)\right)^2\right]dx\right]$$

$$V=\Pi\left[\int_0^4 8\frac{\sqrt{x}}{2}dx+\int_4^6 8.\frac{6-x}{2}dx\right]=\frac{64}{3}\Pi+\frac{32}{3}\Pi \qquad \therefore \quad V=32\Pi\ u^3$$

15) La base de un sólido es la región limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Hallar el volumen del sólido, suponiendo que las secciones transversales perpendiculares al eje X son cuadrados.

Solución



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

Calculando el área de la sección transversal.

$A(x)=(2y)^2=4y^2=\frac{4b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, luego el volumen es:

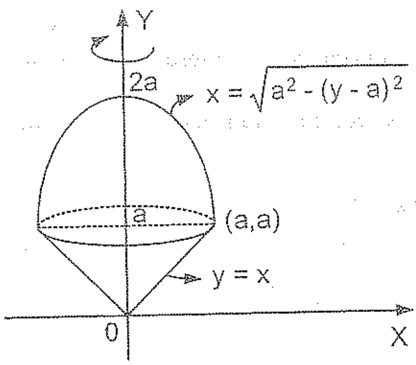
$$V=2\int_0^a A(x)dx=2\int_0^a\frac{4b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=\frac{8b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{8b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{16ab^2}{3}u^3$$

$$\therefore \quad V=\frac{16ab^2}{3}u^3$$

(16) Una comunidad agrícola ha tenido una sobre producción de papas que desean almacenar en un silo, le encargan el proyecto a un ingeniero civil; el se da cuenta de lo que desean para el silo es que las paredes laterales estén limitadas por un cono que se obtiene al girar la recta $y = x$ alrededor del eje Y, y el techo del silo por una semiesfera de radio a, que se obtiene al girar el arco de circunferencia de radio a y centro en $(0,a)$ alrededor del eje Y. Hallar el volumen que puede almacenar el silo.

Solución

Graficando:



El problema se resuelve trabajando en dos partes $V = V_1 + V_2$, donde:

$$V_1 = \pi\int_a^{2a} (\sqrt{a^2-(y-a)^2})^2\,dy$$

$$V_1 = \pi\int_a^{2a} (2ay - y^2)\,dy$$

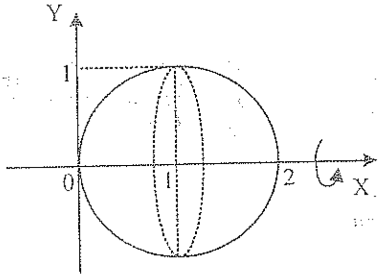
$$V_1 = \pi\left(ay^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_a^{2a} = \frac{2a^3\pi}{3}$$

$$V_2 = \pi\int_0^a y^2\,dy = \frac{\pi y^3}{3}\Bigg|_0^a = \frac{\pi a^3}{3}$$

$$\therefore \quad V = \frac{2a^3\pi}{3} + \frac{a^3\pi}{3} = a^3\pi$$

(17) Si el ingeniero que construyo la cisterna como una esfera de radio R = 1 desea hallar el volumen pero por el método del disco. ¿Cómo plantearía el problema?.

Solución



Para graficar solo necesitamos ubicar el centro de la circunferencia:

$C : (x-1)^2 + y^2 = 1$ de donde $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$

Ahora aplicamos el método del disco:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_0^2[1-(x-1)^2]dx=\pi\int_0^2(2x-x^2)dx$$

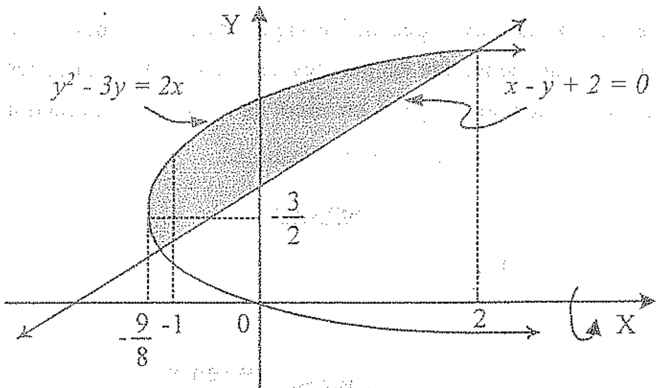
$$=\pi\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\pi\left[\left(4-\frac{8}{3}\right)-0\right]=\frac{4\pi}{3}m^3$$

(18) Un depósito de gasolina tiene la forma de un sólido de revolución que se tiene al girar la región en el plano limitado por las curvas $y^2-3y=2x$ y $x-y+2=0$ alrededor del eje X. ¿Cuál es le volumen del depósito?

Solución

$y^2-3y=2x$, completando cuadrado $y^2-3y+\frac{9}{4}=2x+\frac{9}{4}$

$\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=2\left(x+\frac{9}{8}\right)$ de donde $V\left(-\frac{9}{8},\frac{3}{2}\right)$



Calculando los puntos de intersección: $\begin{cases}y^2-3y=2x\\ x-y=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2-3y=2x\\ y=x+2\end{cases}$

$(x+2)^2-3(x+2)=2x$, simplificando tenemos: $x^2+4x+4-3x-6=2x$

$x^2-x-2=0\Rightarrow(x-2)(x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x=2\end{cases}$

$$y^2-3y=2x \quad \Rightarrow \quad y=\frac{3}{2}\pm\sqrt{2x+\frac{9}{4}}$$

$$V=\pi\left[\int_{-\frac{9}{8}}^{-1}\left[\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2x+\frac{9}{4}}\right)^2-\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2x+\frac{9}{4}}\right)^2\right]dx+\int_{-1}^{2}\left[\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2x+\frac{9}{4}}\right)^2-(x+2)^2\right]dx\right]$$

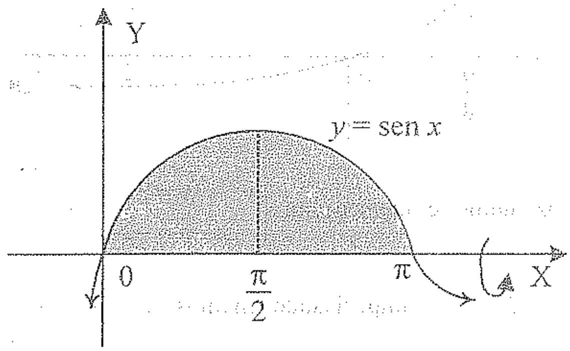
$$V=\pi\left[\int_{-\frac{9}{8}}^{-1}6\sqrt{2x+\frac{9}{4}}\,dx+\int_{-1}^{2}\left(\frac{29}{4}+3\sqrt{2x+\frac{9}{4}}-2x-x^2\right)dx\right]$$

$$V=\pi\left[\left(\frac{1}{2}\left(2x+\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{-\frac{9}{8}}^{-1}+\left(\frac{29x}{4}+\frac{1}{4}\left(2x+\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}\right]$$

$$V=\pi\left[\frac{1}{16}+\frac{503}{32}+\frac{41}{32}\sqrt{41}\right]u^3$$

19 Para una campaña publicitaria se desea hacer la cisterna de un camión para transportar yogurt de una forma muy especial. Un ingeniero civil acepta el reto de resolverles el problema, el se da cuenta que las paredes de la cisterna, están generadas por un sólido de revolución obtenido al girar un arco de $y=\operatorname{sen}x$ alrededor del eje X ¿Qué volumen de yogurt puede transportar el camión?.

Solución



$$V=\pi\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 x\,dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\operatorname{sen}2x}{2}\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}[\pi-0]=\frac{\pi^2}{2}u^3$$

3.2.6 PROBLEMAS PROPUESTOS.-

1. Hallar el volumen de tronco del cono generado al girar el área limitada por $2y = 6 - x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$ alrededor del eje X. **Rpta.** $\frac{52\pi}{3}u^3$

2. Hallar el volumen del sólido generado por la rotación de la región R limitada por la curva $y = e^x \operatorname{sen} e^x$, $x = 0$, $x = \ln\left(\frac{\pi}{4}\right)$ alrededor del eje X. **Rpta.** $\cos 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Hallar el volumen del sólido generado por la rotación de la región plana definida por $x^2 + y^2 \le 20$, $y^2 \le 8x$, $y \ge 0$, alrededor del eje X. **Rpta.** $\frac{\pi}{3}\left(80\sqrt{5} - 64\right)u^3$

4. Hallar el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor de la recta $y = -1$ la región comprendida entre las curvas $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$. **Rpta.** $\frac{29\pi}{30}u^3$

5. Hallar el volumen que genera la superficie limitada por la curva $y = 4 - x^2$, $y = 0$, al girar alrededor del eje X. **Rpta.** $\frac{512\pi}{15}u^3$

6. Hallar el volumen del sólido generado al girar sobre el eje X, la región limitada por las curvas $y = \sqrt{-x^2 + 1}$, $y = \sqrt{-x^2 + 4}$. **Rpta.** $\frac{28\pi}{3}u^3$

7. Calcular el volumen del sólido engendrado al rotar alrededor del eje Y la figura acotada por la curva $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{3}{2}} = 1$. **Rpta.** $\frac{4\pi a^2 b}{5}$

8. Hallar el volumen del sólido obtenido al rotar la región limitada por el primer lazo de la curva $y = e^{-x}\sqrt{\operatorname{sen} x}$, y el eje X positivo, alrededor de la recta $y = 0$.

   Rpta. $\frac{\pi}{5}(1 - e^{-2\pi})\ u^3$

(9) Hallar el volumen que genera la superficie limitada por $y^2 = x^3$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 4$ al girar alrededor del eje X. **Rpta.** $64\pi\ u^3$

(10) Dada la región plana R en el primer cuadrante limitada por $3y - 4x = 6$, $4y - 3x = 8$, $x^2 + (y-2)^2 = 25$. Hallar el volumen generado, si se rota R alrededor del eje X.

Rpta. $\dfrac{49\pi}{20} u^3$

(11) Hallar el volumen del sólido engendrado haciendo girar alrededor del eje Y, el arco de la parábola $y_1^2 = 2px$ comprendido entre el origen y el punto (x_1, y_1).

Rpta. $\dfrac{\pi x_1^2 y_1}{5} u^3$

(12) A la parábola $y^2 = 12x$, en el punto cuya abscisa es 6 se ha trazado una tangente. Calcular el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje X, la región limitada por la tangente trazada, el eje X y la parábola. **Rpta.** $72\delta\pi\, u^3$

(13) Calcular el volumen generado por la rotación de la superficie encerrada por $y^2 = 4x$, $x = y$ alrededor del eje X. **Rpta.** $\dfrac{32\pi}{3} u^3$

(14) Hallar el volumen engendrado por el área menor comprendida entre las curvas $x^2 + y^2 = 25$ y $3x^2 = 16y$ al girar alrededor del eje X. **Rpta.** $\dfrac{1072\pi}{15} u^3$

(15) Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje X, la superficie comprendida entre las parábolas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$. **Rpta.** $\dfrac{3\pi}{10} u^3$

(16) Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por las curvas $x + y^2 + 3y = 6$, $x + y = 3$ alrededor de la recta $y = 3$. **Rpta.** $\dfrac{40\pi}{3} u^3$

(17) Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por las curvas $(y-4)^2 = 4-4x$, $y+2x=2$ alrededor de la recta $y=-1$. **Rpta.** $108\pi u^3$

(18) Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por $y^2 = 4(2-x)$, $x=0$ alrededor de la recta $y=4$. **Rpta.** $\dfrac{128\sqrt{2}\pi}{3}u^3$

(19) Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por $y = \arccos x$, $y = \text{arcosen}\, x$, $x=1$ alrededor de la recta $y=-1$.

Rpta. $(16-\pi^2)\dfrac{\pi}{4}u^3$

(20) Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje X, la superficie limitada por la catenaria $y = a\cosh\left(\dfrac{x}{a}\right)$, el eje X y las rectas $x = \pm$ a.

Rpta. $\dfrac{a^3\pi}{4}\left(e^2+4-e^{-2}\right)u^3$

(21) Hallar el volumen engendrado por el área comprendida entre las curvas $y^2 = 9x$, $x^2 = 9y$ al girar alrededor del eje X. **Rpta.** $\dfrac{2187}{10}\pi u^3$

(22) Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje X, la curva $y = \text{sen}^2 x$ en el intervalo $x=0$ hasta $x=\pi$. **Rpta.** $\dfrac{3\pi^2}{8}u^3$

(23) La región limitada por las curvas $x^2y^2 = 1$; $y(x^2+3) = 4$ gira alrededor de la recta $y+1=0$. Hallar el volumen del sólido que se genera. **Rpta.** $\left(\dfrac{16\sqrt{3}}{27} - \dfrac{2}{3} - \ln 9\right)u^3$

(24) Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje X de la región limitada por las curvas $y = e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$. **Rpta.** $\dfrac{e^2-1}{2}\pi u^3$

(25) Calcular el volumen que genera la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, al girar alrededor del eje X.

Rpta. $8\pi u^3$

(26) Un ingeniero civil piensa que para almacenar agua, una cisterna debe tener la forma de una esfera y construye una en la azotea de su casa de radio R = 1m, y desea encontrar el volumen que puede almacenar pero planteándolo como un problema de integral definida por el método del anillo. Rpta. $V=\frac{4\pi}{3}u^3$

(27) Hallar el volumen, del sólido engendrado por la rotación de la región entre las curvas $y=\operatorname{tg} x$, $x=\frac{\pi}{3}$, $y=0$, rota alrededor del eje X. Rpta. $\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)\pi u^3$

(28) Calcular el volumen del sólido engendrado por la rotación de la región entre $y=\operatorname{sen} x$, $y=\operatorname{sen}^2 x$, el eje X y $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ y rota alrededor del eje X. Rpta. $\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 u^3$

(29) Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación alrededor del eje X, de la superficie limitada por el eje X y la parábola $y=ax-x^2$, $a>0$. Rpta. $\frac{a^5\pi}{30}u^3$

(30) Determinar el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar la Cisoide de Diocles $y^2(a-x)=x^3$ alrededor del eje X entre $x=0$ hasta $x=\frac{a}{2}$.

Rpta. $a^3\left(\ln 2-\frac{2}{3}\right)\pi u^3$

(31) Hallar el volumen del toro de revolución engendrado por la rotación del círculo $x^2+(y-b)^2=a^2$, alrededor del eje X, con b ≥ a. Rpta. $2a^2b\pi^2 u^3$

(32) Hallar el volumen generado en la rotación del área limitada por $y=x^2$, $y=4x-x^2$ alrededor de la recta $y=6$. Rpta. $\frac{64\pi}{3}u^3$

(33) Encuentre el volumen del sólido que se genera si la región acotada por la curva $y = \operatorname{sen}^2 x$ y el eje X de $x = 0$ hasta $x = \pi$, gira alrededor de la recta $y = 1$.

Rpta. $\frac{5\pi^2}{8} u^3$

(34) Calcular el volumen del sólido engendrado al hacer girar la región limitada por la gráfica $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = 0$, $x = -1$; alrededor del eje Y. **Rpta.** $\frac{\pi(\pi+2)}{4} u^3$

(35) Hallar el volumen generado al hacer girar la curva $y = x^2 + 1$ alrededor del eje Y desde $y = 1$ hasta $y = 5$. **Rpta.** $8\pi\ u^3$

(36) Encuentre el volumen del sólido generado al girar la región acotada por la curva $y = \operatorname{sen}^2 x$ y el eje X de $x = 0$ hasta $x = \pi$ gira alrededor de la recta $x = 4$.

Rpta. $\frac{64\pi}{5} u^3$

(37) Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje Y, la parte de la parábola $y^2 = 4ax$, que intercepta la recta $x = a$. **Rpta.** $\frac{16\pi}{5} a^3\ u^3$

(38) Calcular el volumen engendrado por el área menor comprendida entre el círculo $x^2 + y^2 = 25$ y la recta $x = 4$ al girar alrededor de la recta $x = 6$.

Rpta. $2\left(150 \operatorname{arcsen}\frac{3}{5} - 90\right)\pi\, u^3$

(39) Encuentre el volumen del sólido generado al girar sobre el eje Y, la región limitada por la curva $y = (x-1)^2$, el eje X y la recta $x = 3$. **Rpta.** $\frac{7\pi}{5} u^3$

(40) Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje Y, el área comprendida entre las curvas $y = x^3$, $y^2 = 2 - x$, $x = 0$. **Rpta.** $\frac{32\sqrt{2} - 34}{15} \pi\, u^3$

(41) Hallar el volumen del cono elíptico recto cuya base es una elipse de semi-ejes a y b y cuya altura es igual a h. Rpta. $\frac{abh}{3}\pi u^3$

(42) Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar alrededor de la recta $x = 1$, la región limitada por los gráficos de $y = |x^2 - 2x - 3|$, $y + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$. Rpta. $17\pi\ u^3$

(43) Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por $a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2$, $|x| = a$, alrededor del eje Y. Rpta. $\frac{4a^2b(\sqrt{8}-1)\pi}{3}u^3$

(44) Hallar el volumen del conoide elíptico cuya base es una elipse $x^2 + 2y^2 = 12$ y cuya altura es 10. Rpta. $20\sqrt{2}\pi u^3$

(45) Calcular el volumen del sólido generado por la rotación, alrededor del eje Y, de la gráfica acotada por la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Rpta. $\frac{32\pi}{105}a^3u^3$

(46) Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación del eje Y, de la región exterior a la curva $y = x^2$, y entre las rectas $y = 2x - 1$, $y = x + 2$. Rpta. $\frac{7\pi}{2}u^3$

(47) Calcular el volumen del sólido engendrado por la rotación de la región entre $x^2 + y^2 = 9$ y $4x^2 + 9y^2 = 36$ (región en el primer cuadrante) alrededor del eje Y.

Rpta. $6\pi u^3$

(48) Calcular el volumen del sólido engendrado por la rotación de la región entre las curvas $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, donde x es mayor igual a cero y menor igual a $\frac{\pi}{2}$, rota alrededor del eje Y. Rpta. $\pi(\pi - 2)u^3$

(49) Hallar el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar alrededor de la recta $x = -5$, la región acotada por la curva $y = x^2 - 6x + 13$ y la recta $x - y + 3 = 0$.

Rpta. $\frac{153\pi}{2}u^3$

(50) Hallar el volumen generado en la rotación del área limitada por $y = -x^2 - 3x + 6$, y la recta $x + y - 3 = 0$ alrededor de la recta $x = 3$. Rpta. $\frac{256\pi}{3}u^3$

(51) El segmento de la recta que une el origen de coordenadas con el punto (a,b) gira alrededor del eje Y. Hallar el volumen del cono obtenido. Rpta. $\frac{a^2 b\pi}{3}u^3$

(52) Hallar el volumen generado en la rotación del área limitada por $x = 9 - y^2$, $x - y - 7 = 0$ alrededor de la recta $x = 4$. Rpta. $\frac{153\pi}{5}u^3$

(53) Hallar el volumen generado en la rotación del área limitada por $x^2 - 4 = y$, $y = -3x$ alrededor de la recta $x = 1$. Rpta. $\frac{625\pi}{6}u^3$

(54) El área acotada por las curvas $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$ entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$ es rotada alrededor del eje $x = \frac{\pi}{2}$. ¿Cuál es el volumen V del sólido generado?.

Rpta. $2\pi - \pi^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)u^3$

(55) Calcular el volumen del sólido generado por la región que quede debajo de $y = 1 + \operatorname{sen} x$, sobre el eje X entre $x = 0$ y $x = 2\pi$ rotado alrededor del eje Y.

Rpta. $4\pi^2(\pi - 1)u^3$

(56) Calcular el volumen generado por la región comprendida entre las curvas $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, al girar alrededor de la recta $x = -3$. Rpta. $12\pi^2\ u^3$

(57) Calcular el volumen generado al rotar la región encerrada por la curva $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ alrededor de la recta $x=4$. **Rpta.** $3\pi^2\ u^3$

(58) Sea R la región plana limitada por $L_1:\ 3x+4y=8$, $L_2:\ 4x+3y=6$, y la curva de curvatura constante $k=\frac{1}{5}$ con respecto a la intersección de L_1 y L_2. Calcular el volumen de sólido que se obtiene al rotar R alrededor de la recta $x=0$ (considere $x\le 0$). **Rpta.** $\left(\frac{50}{3}\pi+\frac{65}{9}\pi^2\right)u^3$

(59) Hallar el volumen generado por la rotación de la región limitada por las curvas $y=x^3+2$, $2y=x^2+2x+1$, alrededor de la recta $x=4$. **Rpta.** $\frac{1007\pi}{60}u^3$

(60) Hallar el volumen del sólido obtenido al rotar la región acotada por $y=x^2$, al eje X y la recta $x=1$, alrededor de la recta $y=2$. **Rpta.** $\frac{17\pi}{15}u^3$

(61) Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región R limitado por $x^2+(y-3)^2=1$ alrededor de la recta $y=0$. **Rpta.** $6\pi^2u^3$

(62) Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al rotar alrededor de la recta $x=4$, la región acotada por $y=x^3-6x^2+8x$, $y=x^2-4x$, donde en ambos casos $x\in[0,4]$. **Rpta.** $60.86\pi u^3$

(63) Calcular el volumen generado al rotar la curva $y=x^2e^{-x^2}$ alrededor de su asíntota.

Rpta. $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3\pi\sqrt{2\pi}}{32}u^3$

(64) Calcular el valor del sólido obtenido al hacer girar la región R limitada por $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ alrededor de la recta $x=0$. **Rpta.** $\frac{28\pi}{3}u^3$

(65) Hallar el volumen obtenido al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ alrededor de:

a) el eje X   b) el eje Y   c) la recta $x=0$ d) la recta $y=b$

Rpta. a) $\frac{4\pi ab^2}{3}$ b) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ c) $2\pi^2 a^2 b$ d) $2\pi^2 ab^2$

(66) Calcular el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región R limitada por las curvas $x=y^2$, $x=8-y^2$ alrededor de la recta $x=0$.   **Rpta.** $\frac{256}{3}\pi u^3$

(67) Calcular el volumen generado por el área comprendida entre las curvas $y=\frac{x^2}{4}$, $y=2\sqrt{x}$, al girar alrededor del eje Y.   **Rpta.** $\frac{96\pi}{5}u^3$

(68) Calcular el volumen generado por el área comprendida entre las curvas $x^2y^2+16y^2=16$, $x=0$, $y=0$, $x=0$, al girar alrededor del eje X.   **Rpta.** $\pi^2 u^3$

(69) Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por las curvas dadas alrededor de la recta dada:

a) $y^2=x$, $y=x^2$ alrededor de $x=-2$.   **Rpta.** $\frac{49\pi}{30}u^3$

b) $y=4-x^2$, $y=0$ alrededor de $x=-2$.   **Rpta.** $\frac{128\pi}{3}u^3$

c) $y=x^3-5x^2+8x-4$, $y=0$ alrededor de $y=0$ **Rpta.** $\frac{\pi}{105}u^3$

d) $y=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ alrededor de $y=0$.   **Rpta.** $\left(\ln 4+\frac{3}{2}\right)\pi u^3$

e) $y=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ alrededor de $y=-2$.   **Rpta.** $\left(\ln 4+\frac{145}{6}\right)\pi u^3$

f) $y=e^{x^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ alrededor de $x=0$. **Rpta.** $(e-1)\pi u^3$

g) $y=x+2$, $y^2-3y=2x$ alrededor de $y=0$. **Rpta.** $\frac{45}{4}\pi\ u^3$

h) $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=1$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$ alrededor de $y=0$. **Rpta.** $2\pi\sqrt{3}\ u^3$

i) $x+y=1$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ alrededor de $x=0$. **Rpta.** $\frac{4}{5}\pi\ u^3$

j) $y=3x^2$, $y=4-6x^2$ alrededor de $x=0$. **Rpta.** $\frac{8\pi}{9}u^3$

k) $x^2y^2+16y^2=16$, $x=0, y=0$ alrededor de $x=4$. **Rpta.** $32\pi\left[1-\sqrt{2}+\ln\left(\frac{17}{\sqrt{2}}\right)\right]u^3$

(70) La base de un sólido es un círculo de radio a, si todas las secciones planas del sólido perpendiculares a un diámetro fijo de la base son cuadrados, hallar el volumen del sólido. **Rpta.** $\frac{16a^3}{3}u^3$

(71) Un círculo deformable se mueve de manera que uno de los puntos de sus circunferencias se encuentra en el eje X, el centro describe una elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y el plano del círculo es perpendicular al eje X. Calcular el volumen del sólido.

Rpta. $\frac{8\pi\, ab^2}{3}u^3$

(72) La base de un sólido es un círculo de radio r. Todas las secciones transversales del sólido, perpendiculares a un diámetro fijo de la base son cuadrados. Determine el volumen del sólido. **Rpta.** $\frac{16}{3}r^3u^3$

(73) Hallar el volumen del sólido, cuya base es un círculo de radio 3 y cuyas secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo son triángulos equiláteros.

Rpta. $36\sqrt{3}\,u^3$

(74) Un cilindro circular recto de radio r es cortado por un plano que pasa por el diámetro de la base bajo un ángulo α respecto al plano de la base. Hallar el volumen de la parte separada. **Rpta.** $\left(\frac{2r^3}{3}\operatorname{tg}\alpha\right)u^3$

(75) La base de un sólido es la región limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, hallar el volumen del sólido, sabiendo que las secciones transversales perpendiculares al eje X, son triángulos equiláteros. **Rpta.** $\frac{4ab^2}{\sqrt{3}}u^3$

(76) La base de un cilindro es un círculo de radio 3. Todo plano perpendicular a un diámetro dada intercepta al sólido en un cuadrado que tiene un lado en la base del sólido. Calcular el volumen del sólido. **Rpta.** $144\ u^3$

(77) Un círculo móvil se encuentra en un plano perpendicular al plano XY de modo que los extremos de un diámetro están sobre las parábolas de ecuaciones $(x-2)^2=2(y+1)$, $3(x-2)^2=8(y-1)$, Hallar el volumen del sólido que genera dicho círculo móvil si el diámetro en mención es paralelo al eje Y y se mueve en la región encerrada por ellas. **Rpta.** $\frac{64\pi}{15}u^3$

(78) Dos cilindros de radio R se cortan perpendicularmente. Hallar el volumen de su intersección. **Rpta.** $\frac{16}{3}R^3$

(79) Un sólido tiene por base un círculo de radio 1 y sus intersecciones con planos perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos rectángulos isósceles cuyas hipotenusas son las respectivas cuerdas de los círculos. Determinar el volumen del sólido. **Rpta.** $\frac{4}{3}u^3$

(80) La base de un sólido es un círculo limitado por $x^2+y^2=25$ y las secciones transversales perpendiculares al eje Y son triángulos equiláteros. Calcular su volumen.

(81) La base de un sólido es un círculo de radio 2, si las secciones transversales perpendiculares a la base son triángulo isósceles con un cateto como base. Hallar el volumen del sólido generado. Rpta. $\frac{32}{3}u^3$

(82) La base de un sólido es una elipse cuyos ejes miden 20 y 10 unidades; la intersección de ese sólido con un plano perpendicular al eje mayor de la elipse es un cuadrado. Calcular el volumen del sólido. Rpta. $\frac{32000}{3}u^3$

(83) La base de un sólido es la región entre las parábolas $y=x^2$, $y=3-2x^2$. Hallar el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje Y son triángulos rectángulos isósceles, cada uno de ellos con la hipotenusa sobre el plano XY. Rpta. $\frac{3}{2}u^3$

(84) La base de un sólido es la región limitada por $y=1-x^4$. Las secciones transversales del sólido determinadas por planos perpendiculares al eje X son cuadrados. Encontrar el volumen del sólido. Rpta. $\frac{16}{315}u^3$

(85) A una naranja de forma esférica y de radio a por medio de dos semiplanos, que pasan por un mismo diámetro formando entre si un ángulo de 30° se le extrae una tajada. Determine el volumen del resto de la naranja. Rpta. $\frac{11\pi}{9}a^3u^3$

(86) Encontrar el volumen del sólido encerrado por el paraboloide $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=z$ y el plano $z=10$. Rpta. $1000\pi u^3$

(87) Hallar el volumen del segmento parabólico elíptico $\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2p}=x$ interceptado por el plano $x=a$. Rpta. $a^2\sqrt{pq}\,\pi u^3$

(88) El sólido de revolución se forma por la rotación alrededor del eje Y, de la región por la curva $y=\sqrt[3]{x}$, el eje X y la recta $x=c$ $(c>0)$. Considere los elementos rectangulares de áreas paralelas al eje de revolución para determinar el valor de c que dará un volumen de $12\pi u^3$. **Rpta.** $c=\sqrt[7]{2744}$

(89) Se hace un agujero de 2 cm. de radio a través de un sólido de forma esférica con un radio de 6 cm; siendo su eje un diámetro de la esfera. Encuentre el volumen de la parte restante del sólido. **Rpta.** $\frac{184\pi}{3}u^3$

(90) Se hace un hoyo de $2\sqrt{3}$ pulgadas de radio a través del centro de un sólido de forma esférica con un radio de 4 pulgadas. Encuentre el volumen de la porción del sólido que fue cortada. **Rpta.** $\frac{224\pi}{3}u^3$

(91) Hallar el volumen del obelisco cuyas bases paralelas son rectángulos de lados A, B y a, b respectivamente y la altura h. **Rpta.** $\frac{h}{3}\left(ab+\frac{Ab+aB}{2}+ab\right)u^3$

(92) La base de un sólido de un círculo con un radio de 9 pulgadas y cada sección plana perpendicular a un diámetro fijo de la base es un cuadrado que tiene una cuerda del círculo como diagonal. Encontrar el volumen del sólido. **Rpta.** $1944\ pu\lg^3$

(93) Encontrar el volumen del tetraedro que tiene tres caras mutuamente perpendiculares y tres aristas mutuamente perpendiculares cuyas longitudes tienen medidas a, b y c.

Rpta. $\frac{abc}{6}u^3$

(94) Hallar el volumen del sólido de revolución formado al girar alrededor del eje X, la región D acotada por las gráficas de las curvas $F(x)=4-\frac{1}{9}(x-4)^2$, $G(x)=1+\frac{2}{9}(x-4)^2$ y las rectas $x=2$, $x=6$. **Rpta.** $\pi\left[60-64\left(\frac{144}{1215}\right)\right]u^3$

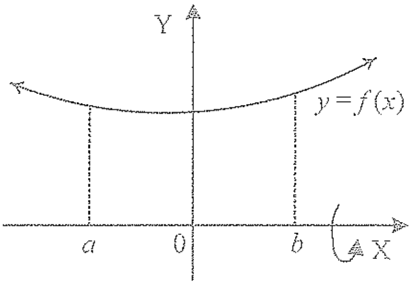
(95) Hallar el volumen del sólido generado, al rotar alrededor del eje X la región limitada por las curvas $C: \ y = ax - x^2, \ a > 0, \ C_1: \ y = 0$.

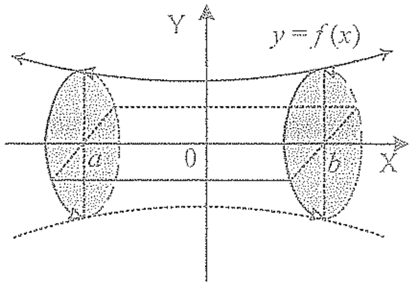
(96) La región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$, girar alrededor de la recta $y = 3$, calcular el volumen del sólido generado.

3.3 ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN.-

DEFINICIÓN.- El área de una superficie S obtenida por la rotación alrededor del eje X, del arco de la curva $y = f(x)$ entre los puntos $x = a$ y $x = b$ es definida por medio de la fórmula:

$$\boxed{A(S_x) = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}$$

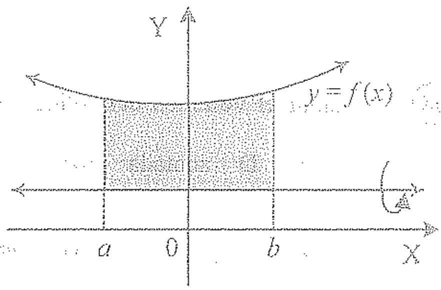




OBSERVACIÓN.

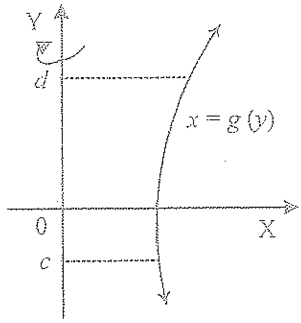
1) Si la curva $y = f(x)$ se hace rotar alrededor de la recta $y = c$ se obtiene una superficie de revolución, cuya área es expresado por la fórmula:

$$\boxed{A(S_x) = 2\pi \int_a^b |y - c|\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}$$



2) Si la ecuación del arco de una curva está dado por la ecuación $x = g(y)$, $\forall\, y \in [c, d]$ en donde g es una función con derivada continua en $[c, d]$ entonces el área de la superficie engendrada por la rotación alrededor del eje Y del arco de la curva $x = g(y)$ entre los puntos $y = c$, $y = d$ es expresado por la fórmula:

$$\boxed{A(S_y) = 2\pi \int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy}$$



3) Si la curva $x = g(y)$ se hace girar alrededor de la recta $x = k$, el área de la superficie de revolución está expresada por la fórmula:

$$\boxed{A(S_y) = 2\pi \int_c^d |x-k|\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy}$$

Ejemplo.- Hallar el área de la superficie del "Huso", que resulta al girar una semi-onda de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ alrededor del eje X.

Solución

$$y = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \cos x$$

Como $A(S_x) = 2\pi \displaystyle\int_0^\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\pi \int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}\,\operatorname{sen} x\,dx$

$$= -2\pi\left(\frac{\cos x}{2}\sqrt{\cos^2 x + 1} + \frac{1}{2}\ln\left|\cos x + \sqrt{1+\cos x}\right|\right)\Bigg|_0^\pi$$

$$A(S_x) = -\pi\left[-2\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \ln(-1+\sqrt{2})\right]$$

$$\therefore \quad A(S_x) = 2\pi\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right]u^2$$

Ejemplo.- Hallar el área de la superficie engendrada al rotar alrededor del eje Y, la hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

Solución

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}$$

Como: $A(S_y) = 2\pi\int_0^a x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = 2\pi\int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}}\,dy$

$$= 2\int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \frac{a^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{3}}}\,dy = 6\pi a^{\frac{1}{3}}\left[\frac{(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]\Bigg|_0^a$$

$$\therefore \quad A(S_y) = \frac{12a^2\pi}{5}u^2$$

3.3.1 PROBLEMAS PROPUESTOS.-

① Hallar el área de la superficie generada haciendo girar la curva $y = 2\sqrt{6-x}$, $x \in [3,6]$ alrededor del eje X. **Rpta.** $\frac{56\pi}{3}u^2$

② Hallar el área de la superficie engendrada por la rotación, alrededor del eje X, del arco de la curva $y = e^{-x}$ comprendida entre $x = 0$ y $x = +\infty$.

Rpta. $\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right]\pi u^2$

③ Hallar el área de la superficie del tronco engendrado por la rotación del círculo $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ alrededor del eje X $(b > a)$. **Rpta.** $4ab\pi^2 u^2$

(4) Hallar el área del elipsoide de revolución que se obtiene al hacer girar la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ alrededor de:

a) Su eje mayor. Rpta. $2\left(16+\frac{100}{3}\operatorname{arcsen}\frac{2}{3}\right)\pi\, u^2$

b) Su eje menor. Rpta. $\left(50+\frac{80}{3}\ln 4\right)\pi\, u^2$

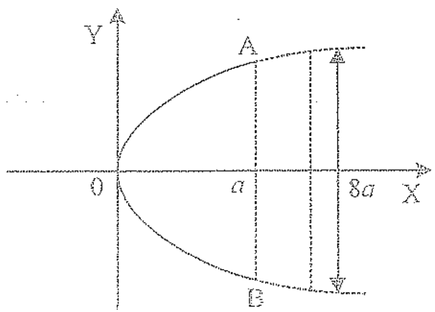
(5) Calcular el área de la superficie formada por la rotación alrededor del eje X del arco de la curva $4y=x^2-2\ln x$ entre $x=1$ y $x=4$. Rpta. $24\pi\ u^2$

(6) Calcular el área de la superficie de revolución que se obtiene al rotar, alrededor del eje X, el lazo de la curva $9ay^2=x(3a-x)^2$ Rpta. $3a^2\pi\ u^2$

(7) Hallar el área de la superficie engendrada por la rotación de la parte de la tangentoide de $y=\operatorname{tg}x$, comprendida entre $x=0$ y $x=\frac{\pi}{4}$ alrededor del eje X.

Rpta. $\left[\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\pi\ln\left(\frac{2(\sqrt{2}+2)}{\sqrt{5}+1}\right)\right]u^2$

(8) En la figura se dan las dimensiones de un espejo parabólico AOB. Hallar la superficie de este espejo.



Rpta. $\frac{16a^2}{3}(5\sqrt{5}-8)\pi\, u^2$

(9) Hallar el área de la superficie (denominada Catenoide), engendrada por la rotación de la catenaria $y = a.\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ alrededor del eje X, entre los limites $x = 0$ y $x = a$.

Rpta. $\frac{a^2}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)\pi u^2$

(10) Hallar el área de la superficie engendrada por la rotación del eje Y, del arco de la curva $y = a\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ desde $x = a$ hasta $x = a\cosh 1$.

Rpta. $\frac{a^2}{2}(2 + \operatorname{senh} 2)\pi u^2$

(11) Hallar el área de superficie de revolución de la curva $x = \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2}\ln y$, alrededor del eje X, comprendida entre $y = 1$, $y = e$. Rpta. $\frac{e^4 - 9}{16}\pi u^2$

(12) Hallar el área de la superficie cuando la curva $2x = y\sqrt{y^2 - 1} + \ln\left|y + \sqrt{y^2 - 1}\right|$, $y \in [2,5]$, gira alrededor del eje X. Rpta. $78\pi u^2$

(13) Hallar el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje X, la curva dada por $y^2 = 4ax$, desde $x = 0$ hasta $x = 3a$. Rpta. $\frac{56}{3}a^2\pi u^2$

(14) Calcular el área de la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar el arco de la curva $y = 2 - e^x$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$ alrededor de la recta $y = 2$.

Rpta. $\left[e^2\sqrt{1+e^4} - \sqrt{2} + \ln\left(\frac{e^2 + \sqrt{1+e^4}}{1+\sqrt{2}}\right)\right]\pi u^2$

(15) Hallar el área de la superficie de revolución formada cuando la curva indicada gira alrededor del eje dado:

a) $y = x^3$, $x \in [1,2]$ alrededor de $y = -1$.

b) $y = \ln(x-1)$, $x \in [2, e^2+1]$ alrededor de $x = 1$.

c) $y = 2x$, $x \in [0,2]$ alrededor de $x = 1$.

d) $y = 4 + e^x$, $x \in [0,1]$ alrededor de $y = 4$.

(16) Hallar el área de la superficie generada por la rotación entorno al eje Y, de cada una de las siguientes curvas:

a) $x = y^3$, $y \in [0,3]$ **Rpta.** $\frac{\pi}{27}[(730)^{\frac{3}{2}} - 1]u^2$

b) $2y = x\sqrt{x^2-1} + \ln(x - \sqrt{x^2-1})$, $x \in [2,5]$ **Rpta.** $78\pi u^2$

(17) Hallar el área de la superficie engendrada al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b)$ alrededor de:

a) El eje X. **Rpta.** $2\pi b^2 + \frac{2ab\pi}{E}\operatorname{arcsen} E$, donde $E = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

b) El eje Y. **Rpta.** $2\pi a^2 + \frac{b^2\pi}{E}\ln\left(\frac{1+E}{1-E}\right)$, donde $E = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

(18) Hallar el área de la superficie generada cuando la curva $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$, $x \in [0,4]$ gira alrededor del eje X. **Rpta.** $\frac{424\pi}{15}u^2$

(19) Hallar el área de la superficie generada por la curva $y^2 - 2\ln y = 4x$, al girar alrededor del eje X. **Rpta.** $\frac{10\pi^2}{3}u^2$

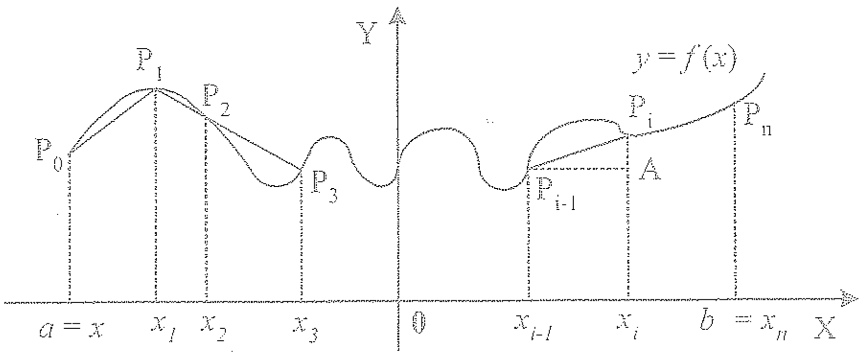
(20) Hallar el área de la superficie generada por la rotación de la curva $6c^2xy = y^4 + 3c^4$ es de $x = c$ hasta $x = 3c$, alrededor del eje X. **Rpta.** $c^2\pi(20 + \ln 3)u^2$

(21) Hallar el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje X, la región R limitada por las curvas $y^2+4x=2\ln y$, $y=1$, $y=2$ Rpta. $\frac{10}{3}\pi$

(22) Hallar el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje X, la región R limitada por las curvas $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$, $x\in[1,3]$ Rpta. $\frac{208}{9}\pi$

3.4 LONGITUD DE ARCO.-

Consideremos una función f con derivada continua en el intervalo $[a,b]$ y una partición $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ del intervalo $[a,b]$ que defina una poligonal formada por los segmentos rectilíneos desde $P_{i-1}(x_{i-1},f(x_{i-1}))$ hasta $P_i(x_i,f(x_i))$ para $i=1,2,\ldots,n$.



La longitud del i-ésimo segmento definido por la partición P es:

$$\boxed{\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right|=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}}$$

por lo tanto la longitud de la poligonal definida por la partición P es:

$$\boxed{L_P=\sum_{i=1}^{n}\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right|=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}}$$

DEFINICIÓN.- Sea $f\colon [a,b] \longrightarrow R$ una función con derivada continua en $[a,b]$; si existe un número L de tal manera que:

$$\boxed{L = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}}$$

entonces diremos que el arco P_0P_n de la curva $y = f(x)$ es rectificable y al número L se le llama la longitud del arco de la curva $y = f(x)$ desde el punto $P_0(a, f(a))$ hasta el punto $P_n(b, f(b))$.

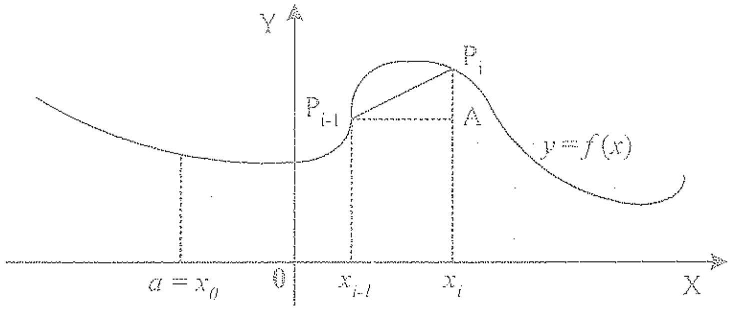
TEOREMA.- Sea $f\colon [a,b] \longrightarrow R$ una función con derivada continua en $[a,b]$, entonces la longitud del arco de la curva $y = f(x)$ desde el punto cuya abscisa es a hasta el punto cuyo abscisa es b es expresado por la fórmula.

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}$$

Demostración

Consideremos una partición $P = \{x_0, x_i, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a,b]$ tal que:

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.



del triángulo rectángulo P_{i-1} A P_i de la figura se tiene:

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2} \qquad \ldots (1)$$

donde: $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta_i y = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Luego a la ecuación (1) podemos escribir así:

$$\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2}\,\Delta_i x \qquad \ldots (2)$$

Como *f* es continua en $[x_{i-1}, x_i]$ y $f'(x)$ existe en $[x_{i-1}, x_i]$, entonces por el teorema del valor medio $\exists\, c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que:

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} \qquad \ldots (3)$$

Luego de (3) y (2) se tiene: $\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,\Delta_i x$ entonces:

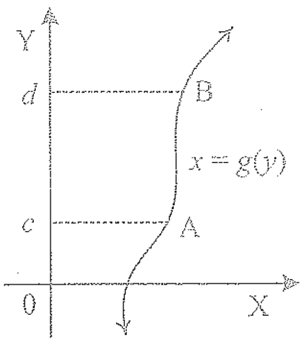
$$L = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,\Delta_i x = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

$$\therefore \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

◈ ◈ ◈

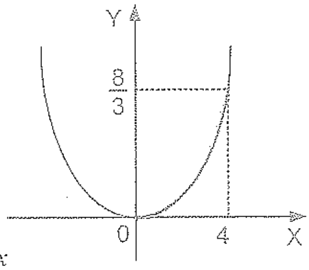
OBSERVACIÓN.- Si $g: [c,d] \longrightarrow R$ es una función continua en $[c,d]$, entonces la longitud del arco de la curva $x = g(y)$ desde el punto $A(g(c), c)$ hasta el punto $B(g(d), d)$ es expresado por la fórmula:

$$\boxed{L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy}$$



3.4.1 PROBLEMAS DESARROLLADOS.-

1. Hallar la longitud del arco de la parábola $6y = x^2$ desde el origen de coordenadas al punto $\left(4, \frac{8}{3}\right)$.



<u>Solución</u>

Como. $6y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{3}$, de donde

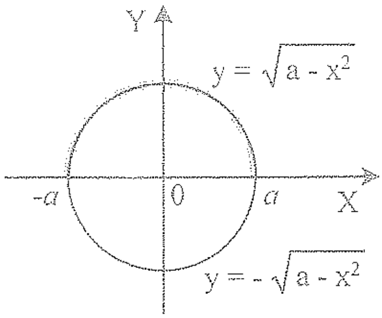
$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{x^2}{9}}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^4 \sqrt{9 + x^2}\, dx$$

$$L = \frac{1}{3}\left[\frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + 9}\right|\right]\Bigg|_0^4 = \frac{1}{3}\left[\left(10 + \frac{9}{2}\ln 9\right) - \left(0 + \frac{9}{2}\ln 3\right)\right] = \frac{1}{3}\left[10 + \frac{9}{2}\ln 3\right]$$

$$\therefore \quad L = \frac{1}{3}\left(10 + \frac{9}{2}\ln 3\right) u$$

2. Encontrar la longitud de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$

<u>Solución</u>



$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$L = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx$$

$$L = 2a\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2a \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\Bigg|_{-a}^{a} = 2a\left[\operatorname{arcsen}(1) - \operatorname{arcsen}(-1)\right] = 2a\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \quad L = 2\pi\, a\, u$$

(3) Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ desde el origen del coordenadas hasta el punto cuyas coordenadas son $x = 4$, $y = 8$.

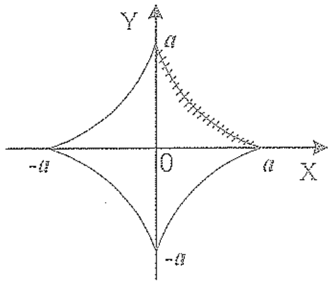
Solución

$$y^2 = x^3 \Rightarrow y = x^{3/2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,dx = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)u$$

(4) Hallar la longitud total de la hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

Solución



$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}$$

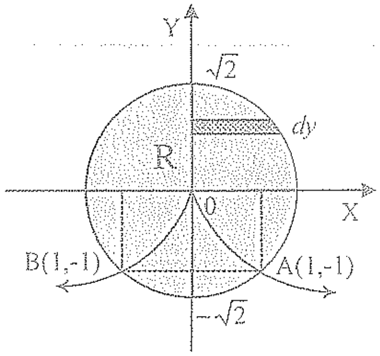
$$L = 4\int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$L = 4\int_0^a \sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})}\,dx = 4\int_0^a \sqrt{x^{-\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}}\,dx = 4\int_0^a x^{-\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\,dx = 6x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}\Big|_0^a = 6a$$

(5) Sea R la región del plano limitado superiormente por $x^2 + y^2 = 2$ e inferiormente por $x^2 = -y^3$. Halle la longitud del contorno de la región R.

Solución

Calcular los puntos de intersección.



$$\begin{cases} x^2 = -y^3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad y^3 - y^2 + 2 = 0$$

de donde $y = -1$

$\therefore\quad A(1,-1)$ y $B(-1,-1)$

del gráfico por simetría se tiene: $L = 2\left(L_{\overline{AB}} + L_{\overline{OA}}\right)$ ... (α)

Calculando $L_{\overline{AC}}$ se tiene $x = \sqrt{2-y^2}$, $x \geq 0$

$$L_{\overline{AC}} = \int_{-1}^{\sqrt{2}} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_{-1}^{\sqrt{2}} \sqrt{1+\left(\frac{-y}{\sqrt{2-y^2}}\right)^2}\, dy = \int_{-1}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}dy}{\sqrt{2-y^2}} = \sqrt{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{-1}^{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}\left[\operatorname{arcsen}(1) - \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right] = \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad L_{\overline{AC}} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}u \qquad \text{... (1)}$$

Calculando $L_{\overline{OA}}$ se tiene $x = \sqrt{-y^3}$, $x \geq 0$

$$L_{\overline{OA}} = \int_{-1}^{0} \sqrt{1+\left(\frac{-3y^2}{2\sqrt{-y^3}}\right)^2}\, dy = \int_{-1}^{0} \sqrt{1-\frac{9y}{4}}dy, \text{ integrando:}$$

$$L_{\overline{OA}} = \frac{1}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right) \qquad \text{... (2)}$$

reemplazando (1) y (2) en (α) se tiene:

$$L = 2\left(\frac{3\sqrt{2}\pi}{4} + \frac{13\sqrt{13}-8}{27}\right) \text{ de donde: } L = \left(\frac{3\sqrt{2}\pi}{4} + \frac{26\sqrt{13}-16}{27}\right)u$$

(6) Hallar la longitud del arco de la curva $8y = x^4 + \frac{2}{x^2}$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$.

Solución

$$8y = x^4 + \frac{2}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$$

Como $L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x^6 - 2 + \frac{1}{x^6}\right)}dx$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^6 + 2 + \frac{1}{x^6}\right)}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(4 - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{31}{8} + \frac{1}{4}\right] = \frac{33}{16}u$$

3.4.2. PROBLEMAS PROPUESTOS.-

(1) Hallar la longitud del arco de la curva $y^2 = 4x - x^2$, comprendido entre los dos puntos en que corta al eje X. Rpta. $L = 2\pi$ u.

(2) Hallar la longitud del arco de la curva $y = \ln x$ desde $x = \sqrt{3}$ hasta $x = \sqrt{8}$.

Rpta. $\left(1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\right)u$

(3) Hallar la longitud del arco de la parábola semicúbica $5y^3 = x^2$ comprendida dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 6$ Rpta. $\frac{134}{27}u$

(4) Calcular la longitud del arco de la curva $y = e^x$ entre los puntos (0,1) y (1,e).

Rpta. $\sqrt{e^2+1} + \ln\frac{(\sqrt{e^2+1}-1)(\sqrt{2}+1)}{e} - 2$

(5) Encontrar la longitud del arco de la parábola $y^2 = 4px$ desde el vértice hasta un extremo del lado recto. **Rpta.** $\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]p$

(6) Si $f(x)=\int_0^x \sqrt{\cos t}\,dt$, encuentre la longitud del arco de la gráfica de f desde el punto donde $x=0$ hasta $x=\pi$. **Rpta.** $2\sqrt{2}\ u$

(7) Hallar la longitud de la curva $y=\ln(1-x^2)$ desde $x=\frac{1}{4}$ a $x=\frac{3}{4}$.

Rpta. $\left(\ln\left(\frac{21}{5}\right)-\frac{1}{2}\right)u$

(8) Encuentre la longitud del arco de la curva $9y^2 = 4x^3$ del origen al punto $(3,2\sqrt{3})$.

Rpta. $\frac{14}{3}u$

(9) Hallar la longitud del arco de la curva cuya ecuación es $y^3 = x^2$, comprendida entre los puntos (0,0) y (8,4). **Rpta.** $\frac{8}{37}(10\sqrt{10}-1)u$

(10) Hallar la longitud total del lazo de la curva $6y^2 = x(x-2)^2$ si $x\in[0,2]$.

Rpta. $\frac{8}{3}\sqrt{3}\ u$

(11) Calcular la longitud total de la curva $8y^2 = x^2(1-x^2)$. **Rpta.** $\sqrt{2}\,\pi\ u$

(12) Calcular la longitud total del arco de la parábola $y=2\sqrt{x}$ desde $x=0$ hasta $x=1$.

Rpta. $\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]u$

(13) Hallar la longitud del arco de la parábola $ay^2 = x^3$ desde el origen hasta $x=5a$.

Rpta. $\frac{335}{27}a$

(14) Hallar la longitud del arco de la curva $x=\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2}\ln y$ desde $y=1$ hasta $y=e$.

Rpta. $\frac{e^2+1}{4}u$

(15) Hallar la longitud del arco de la curva $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ desde $x=3$ hasta $x=5$. **Rpta.** 8 u.

(16) Calcule la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$ comprendida dentro de la parábola $y^2=\frac{x}{3}$. **Rpta.** $\frac{1}{9}\left(10\sqrt{10}-8\right)u$

(17) Hallar la longitud de la catenaria $y=a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ desde el vértice A$(0,a)$ hasta el punto B(b,h). **Rpta.** $a\,\text{senh}\left(\frac{b}{a}\right)$

(18) Hallar la longitud del arco de la rama derecha de la tractriz $x=-\sqrt{a^2-y^2}+a.\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right|$, desde $y=a$ hasta $y=b$, $(0<b<a)$.

Rpta. $a\ln\left(\frac{a}{b}\right)$

(19) Calcular la longitud del arco de la curva $(\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}+(\frac{y}{b})^{\frac{2}{3}}=1$, en el primer cuadrante.

Rpta. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}u$

(20) Hallar la longitud del arco de la curva cuya ecuación es $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$ desde el punto de abscisa $x=1$ al punto de abscisa $x=3$. **Rpta.** $\frac{14}{3}u$

(21) Hallar la longitud del arco de la parábola $y^2 = 2px$ desde el vértice a un extremo del lado recto. **Rpta.** $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right]p$

(22) Calcular la longitud del arco de la curva $x=\ln(\sec y)$ comprendido entre $y=0$ e $y=\frac{\pi}{3}$. **Rpta.** $\ln(2+\sqrt{3})u$

(23) Hallar la longitud de la curva $y=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$ entre las abscisas $x=1$ y $x=2$. **Rpta.** $(\ln(e^2+1)-1)u$

(24) Hallar la longitud total de la curva $(y-\text{arcsen}\,x)^2=1-x^2$. **Rpta.** 8 u

(25) Calcular la longitud de la parábola semicúbica $2y^3=x^2$ comprendida dentro de la circunferencia $x^2+y^2=20$. **Rpta.** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)u$

(26) Hallar la longitud del arco de la curva $y=\sqrt{x-x^2}+\text{arcsen}\sqrt{x}$. **Rpta.** 2 u

(27) Halle la longitud del arco de la curva $8y=x^4+2x^{-2}$ desde el punto donde $x=1$ al punto donde $x=2$. **Rpta.** $\frac{33}{16}u$

(28) Determinar la longitud de la curva $y^2(2a-x)=x^3$ (Cisoide de Diocles) entre $x=0$ y $x=a$. **Rpta.** $2a(\sqrt{5}-2)+\sqrt{3}a\ln\left|\frac{4-2\sqrt{15}}{7-4\sqrt{3}}\right|$

(29) Hallar la longitud de la curva $y=\sqrt{\sec^2 x+1}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{\sec^2 x+1}}{\sec x}\right|$ desde $x=\frac{\pi}{4}$ hasta $x=\frac{\pi}{3}$. **Rpta.** $(\sqrt{3}-1)u$

(30) Hallar la longitud del arco de la parábola $y = \ln\left|c\operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ desde $x = a$ hasta $x = b$ $(0 < a < b)$. **Rpta.** $a - b + \ln\left(\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}\right)$

(31) Calcular la longitud del arco de la curva $9ay^2 = x(x-3a)^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 3a$.

Rpta. $2\sqrt{3}\,a\ u$

(32) Hallar la longitud total de la curva $8a^2y^2 = x^2(a^2 - 2x^2)$. **Rpta.** $a\pi\,u$.

(33) Encuentre la longitud de la curva $6y^2 = x(x-2)^2$ de (2,0) a $(8, 4\sqrt{3})$.

Rpta. $\frac{16}{3}\sqrt{3}\ u$

(34) Encuentre la longitud de la curva $(\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}} + (\frac{y}{b})^{\frac{2}{3}} = 1$, en el primer cuadrante desde el punto donde $x = \frac{a}{8}$ hasta donde x = a. **Rpta.** $\frac{8a^3 - (a^2 + 3b^2)^{\frac{3}{2}}}{8(a^2 - b^2)}u$

(35) Halle la longitud de la curva $9y^2 = x(x-3)^2$, en el primer cuadrante, desde x = 1, hasta x = 3. **Rpta.** $\frac{6\sqrt{3}-4}{3}u$

(36) Determinar la longitud del arco de curva descrito por $y = \sqrt{e^{2x}-1} - arc\sec(e^x) - 1$, x ∈ [0,4]. **Rpta.** $\frac{1}{2}(e^8 - 1)$

(37) Determinar la longitud del arco de la curva descrito por $y = \ln(1-x^2)$ desde x = 0 hasta $x = \frac{1}{2}$. **Rpta.** $-\frac{1}{2} + \ln 3$

(38) Determinar la longitud del arco de la curva descrito por $y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}$, $x\in[1,2]$

Rpta. $\frac{59}{24}$

(39) Determinar la longitud de arco de la curva descrito por $y=\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x-\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$, $x\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Rpta. $\frac{4\pi+\sqrt{2}}{16}$

(40) Determinar la longitud de arco de la curva descrito por $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$, $x\in[2,5]$

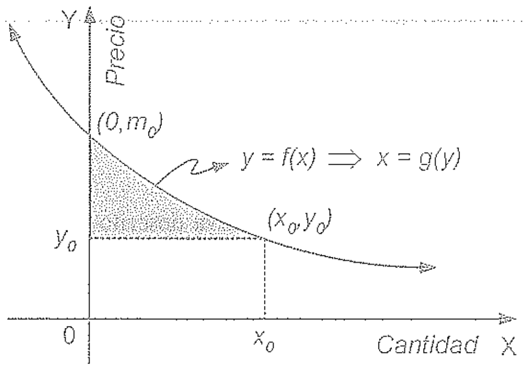
Rpta. $\frac{383}{20}$

3.5. APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN ADMINISTRACIÓN Y ECONOMIA.

Como la integral definida tiene muchas aplicaciones en administración y en Economía, por lo tanto en esta sección trataremos del excedente del consumidor y el excedente del productor, así como también en el análisis del ingreso frente al costo.

3.5.1. EXCEDENTE (O SUPERÁVIT) DEL CONSUMIDOR.-

Las cantidades de un artículo que podrían comprarse a diversos precios, se representan mediante la función de demanda. Cuando el precio en el mercado es y_0 y la correspondiente cantidad demandada es x_0, entonces los consumidores que estuviesen dispuestos a pagar un precio mayor que el del mercado, se benefician por el hecho de que el precio es solamente y_0 y que ilustraremos en el gráfico siguiente.



De acuerdo a ciertas hipótesis económicas, la ganancia total del consumidor esta representada por el área bajo la línea de demanda y = f(x) y sobre al recta $y = y_0$ y que conoce como excedente (o superávit) del consumidor y que es calculado así:

$$\boxed{\text{Excedente del Consumidor } = \int_0^{x_0} f(x)dx - x_0 y_0}$$

La otra forma de calcular es:

$$\boxed{\text{Excedente del Consumidor} = \int_{y_0}^{m_0} g(y)dy}, \text{ es decir:}$$

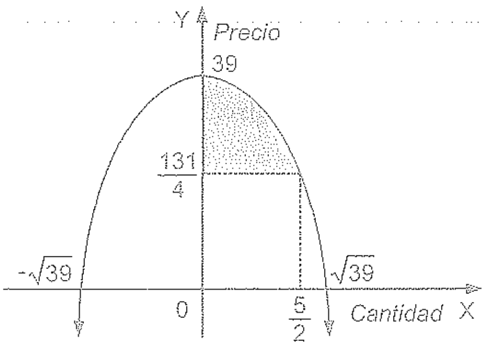
$$\text{Excedente del consumidor } = \int_0^{x_0} f(x)dx - x_0 y_0 = \int_{y_0}^{m_0} g(y)dy$$

Ejemplo.- Si la función de demanda es $y = 39 - x^2$, evalué el excedente del consumidor si:

a) $x_0 = \dfrac{5}{2}$ b) Si el artículo es gratuito (es decir $y_0 = 0$)

Solución

Llamaremos EC al Excedente del Consumidor.

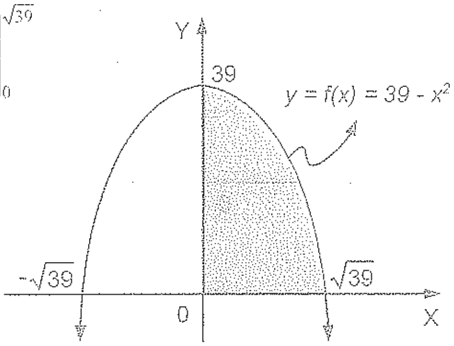


a) $$EC = \int_0^{\frac{5}{2}} (39 - x^2)\,dx - (\frac{131}{4})(\frac{5}{2})$$

$$= \left(39x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{5}{2}} - \frac{655}{8} = \frac{275}{12}$$

b) $$EC = \int_0^{\sqrt{39}} (39 - x^2)\,dx = \left(30x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{39}}$$

$$= 39\sqrt{39} - 13\sqrt{39} = 26\sqrt{39}$$



Ejemplo.- La cantidad vendida y el precio en un mercado monopólico, se determinan por las funciones de demanda $y = 20 - 4x^2$ y el costo marginal $y' = 2x + 6$, de manera que se maximice la utilidad. Determine el correspondiente excedente del consumidor.

<u>Solución</u>

Ingreso total = $R = xy = 20x - 4x^3$

Ingreso marginal = $IM = R'(x) = 20 - 12x^2$

Costo marginal = $CM = y' = 2x + 6$

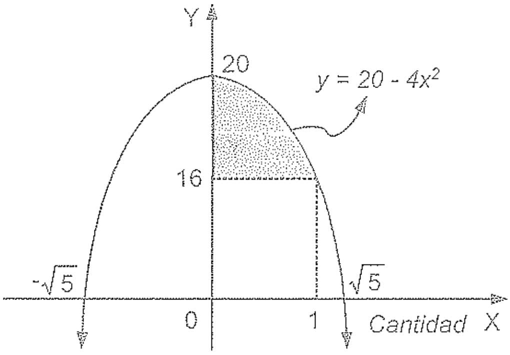
La ganancia máxima se obtiene cuando IM = CM; es decir:

$20 - 12x^2 = 2x + 6$ de donde $6x^2 + x - 7 = 0$, factorizando

$(6x+7)(x-1)=0$ entonces $x=1$, $x=-\frac{7}{6}$

se considera $x=1$ y se desprecia $x=-\frac{7}{6}$ por ser negativo.

Como $y=20-4x^2$, para $x_0=1$, $y_0=16$



Llamaremos EC al Excedente del Consumidor.

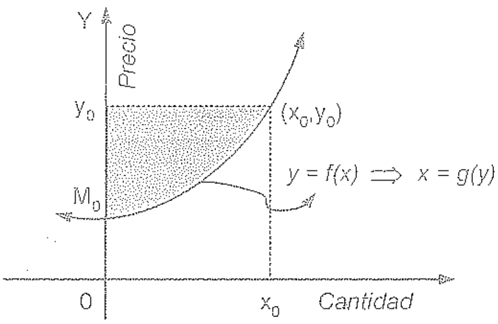
$$EC=\int_0^1 (20-4x^2)dx-(1)(16)$$

$$=\left(20x-\frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^1-16=20-\frac{4}{3}-16$$

$$=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

3.5.2. EXCEDENTE (O SUPERÁVIT) DEL PRODUCTOR.-

Las cantidades de un artículo que se ofrecen en el mercado a diversos precios, se representan mediante la función de oferta. Cuando el precio en el mercado es y_0 y la correspondiente cantidad ofrecida en dicho mercado es x_0, entonces los productores que estuviesen dispuestos a vender el artículo a un precio inferior al del mercado, se benefician por el hecho que el precio es y_0 y que ilustraremos mediante el siguiente gráfico.



De acuerdo a ciertas hipótesis económicas, la ganancia total del productor está representado por el área sobre la curva de oferta y = f(x) y bajo la recta $y = y_0$, llamado excedente (o superávit) del productor y que está calculado así:

$$\boxed{\text{Excedente del Productor} = x_0 y_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx}$$

La otra forma de calcular es así:

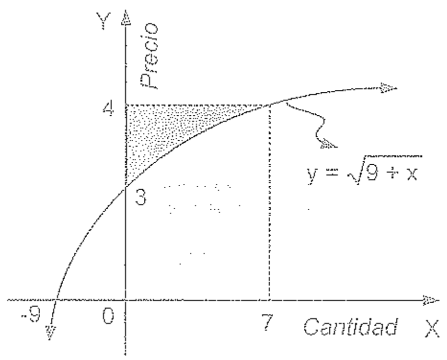
$$\boxed{\text{Excedente del productor} = \int_{M_0}^{y_0} g(y)dy}\text{, es decir:}$$

$$\text{Excedente del productor} = x_0 y_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx = \int_{M_0}^{y_0} g(y)dy$$

Ejemplo.- Si la función de oferta es $y = \sqrt{9+x}$ y $x_0 = 7$, obtenga el excedente del productor.

<u>**Solución**</u>

Graficando la función de oferta $y = f(x) = \sqrt{9+x}$



$$\text{Excedente del productor} = x_0 y_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx$$

$$= (7)(4) - \int_0^7 \sqrt{9+x}\,dx = 28 - \frac{2}{3}(9+x)^{3/2}\Big|_0^7$$

$$= 28 - \frac{2}{3}(64-27) = 28 - \frac{2}{3}(37) = 28 - \frac{74}{3} = \frac{10}{3}$$

Ejemplo.- Las funciones de demanda y oferta en un mercado de competencia pura son respectivamente $y = 14 - x^2$, $y = 2x^2 + 2$. Determine.

a) El excedente del consumidor b) El excedente del productor

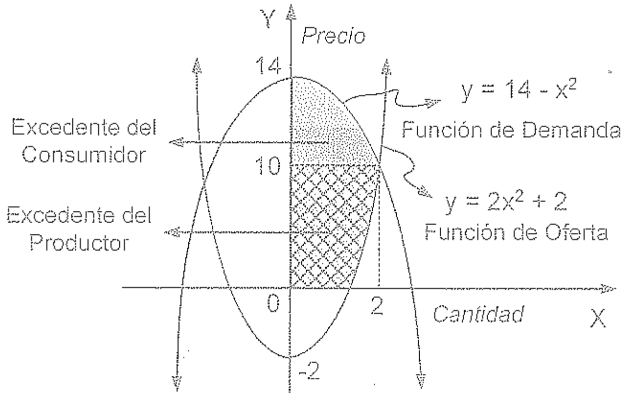
Solución

En estos casos se determina el precio de equilibrio, que se obtiene calculando el punto de intersección de la curva de demanda y de la curva de oferta, es decir:

$$\begin{cases} y = 14 - x^2 \\ y = 2x^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 2 = 14 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \quad \text{de donde } x = \pm 2$$

se considera x =2 por estar en el intervalo de interés.

Luego entonces para $x_0 = 2$, $y_0 = 10$



Excedente del Consumidor $= \int_0^2 (14 - x^2)dx - x_0 y_0 = \int_0^2 (14 - x^2)dx - (2)(10)$

$$= \left(14x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 - 20 = (28 - \frac{8}{3}) - 20 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\text{Excedente del Productor } = x_0 y_0 - \int_0^2 (2x^2 + 2)dx = (2)(10) - \left(\frac{2x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_0^2$$

$$= 20 - \frac{16}{3} - 4 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

Ejemplo.- La función de demanda de cierta marca de bicicletas de 10 velocidades esta dado por y = f(x) = -0001x + 250 donde "y" es el precio unitario en dólares y "x" es la cantidad demandada, en unidades, de millar. La función de oferta para estas bicicletas está dada por $y = f(x) = 0,0006x^2 + 0,02x + 100$ donde y representa el precio unitario en dólares y "x" el número de bicicletas que el proveedor pondrá en el mercado, en unidades de millar. Determine el excedente de los consumidores y de los productores si el precio de mercado de una bicicleta se iguala al precio de equilibrio.

<u>**Solución**</u>

Se conoce que el precio de equilibrio es el precio unitario del artículo cuando ocurre el equilibrio de mercado. El precio de equilibrio se determina encontrando el punto de intersección de la curva de demanda y de la curva de oferta, es decir resolviendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = -0,001x^2 + 250 \\ y = 0,0006x^2 + 0,02x + 100 \end{cases}$

$0,0006x^2 + 0,02x + 100 = -0,001x^2 + 250$, simplificando

$2x^2 + 25x - 187500 = 0$, factorizando se tiene:

$(2x + 625)(x - 300) = 0$ de donde $x = -\frac{625}{2}$ o $x = 300$

El primer número está fuera del intervalo de interés, por lo tanto queda la solución x = 300, cuyo valor correspondiente es $y = -0,001(300)^2 + 250 = 160$, luego el punto de equilibrio es (300, 160).

$$\text{Excedente del consumidor} = \int_0^{300} (-0,001x^2 + 250)dx - (300)(160)$$

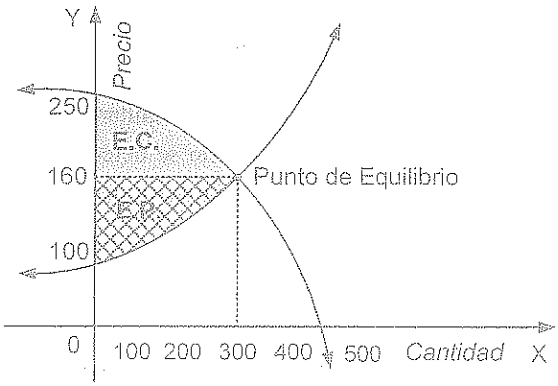
$$= \left(-\frac{0,001x^3}{3} + 250x\right)\Big|_0^{300} - 48000$$

$$= -\frac{(300)^3}{3000} + 250(300) - 48000 = 18000$$

$$\text{Excedente del producto} = (300)(160) - \int_0^{300} (0,0006x^2 + 0,021x + 100)dx$$

$$= 48000 - (0,0002x^3 + 0,01x^2 + 100x)\Big|_0^{300}$$

$$= 4800 - (0,0002(300)^3 + 0,01(300)^2 + 100(300)) = 11700$$



3.5.3. INGRESOS FRENTE A COSTOS.-

En administración y en economía para determinar la utilidad total o las ganancias netas se utiliza la integración y para esto se maximiza la utilidad que ocurre cuando el ingreso marginal es igual al costo marginal de donde la utilidad total se determina integrando la diferencia entre el ingreso marginal y el ingreso total desde cero hasta la cantidad para el cual es máxima la utilidad.

Ejemplo.- Obtenga el nivel de producción que maximice la utilidad y la correspondiente utilidad total P_{max} (suponiendo competencia pura). Si $IM = 20-2x$ y $CM = 4+(x-4)^2$

Solución

La máxima utilidad ocurre cuando IM = CM, es decir:

$20-2x = 4+(x-4)^2$ de donde $x^2-6x=0$ entonces x = 0, x = 6

comprobando que en x = 6 máxima

$$\frac{d}{dx}(IM-CM) = \frac{d^2P}{dx^2} = 6-2x$$

$$\left.\frac{d^2P}{dx^2}\right|_{x=6} = 6-12 = -6 < 0$$

Luego la utilidad se maximiza para x = 6

$$\text{Utilidad total} = \int_0^6 (IM-CM)dx = \int_0^6 (6x-x^2)dx = \left(3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^6 = 3(6)^2 - \frac{6^3}{3} = 36$$

Ejemplo.- Si la función de ingreso marginal es IM = 25 − 3x y la función de costo marginal es $CM = 25-7x+x^2$, determine la cantidad que se debe producir para maximizar la utilidad y la correspondiente utilidad total en un caso de competencia pura.

Solución

La máxima utilidad ocurre cuando IM = CM, es decir:

$25-3x = 25-7x+x^2$ entonces $x^2-4x=0$ de donde x = 0, x = 4

comprobando que en x = 4 es máxima

$$\frac{d}{dx}(IM-CM) = \frac{d^2p}{dx^2} = 4-2x \quad \text{de donde} \quad \left.\frac{d^2p}{dx^2}\right|_{x=4} = 4-8 = -4 < 0$$

por lo tanto la utilidad se maximiza para x = 4

$$\text{Utilidad total} = \int_0^4 (IM - CM)dx = \int_0^4 [(25-3x)-(25-7x+x^2)]dx$$

$$= \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = \frac{32}{3}$$

3.5.4. PROBLEMAS PROPUESTOS.-

(1) La cantidad vendida y el correspondiente precio, en un mercado de monopolio, están determinados por la función de demanda $y = 45 - x^2$ y el costo marginal $y' = 6 + \frac{x^2}{4}$ de modo que se maximice la utilidad, calcule el excedente del consumidor. **Rpta.** $E.C = 16\sqrt{3}$

(2) La cantidad vendida y el precio están determinadas en un mercado monopólico, por las funciones de demanda $y = \frac{1}{4}(10-x)^2$ y de costo total $y = \frac{x^3}{4} + 5x$ de tal manera que se maximice la utilidad. Determine el correspondiente excedente del consumidor.

Rpta. $\frac{26}{3}$

(3) Si la función de demanda es $y = 16 - x^2$ y la función de oferta es y = 2x + 1, determine el excedente del consumidor y el excedente del productor en situación de competencia pura. **Rpta.** EC = 18 excedente del consumidor

(4) Las funciones de la oferta y la demanda de cierto producto son y = f (x) =52 + 2x, $y = g(x) = 100 - x^2$ determine el superávit del consumidor y del productor, suponiendo que se ha establecido el equilibrio de mercado.

Rpta. EC = 144 ; EP = 36

(5) La función de demanda de cartuchos de repuestos para un purificador de agua $y = -0,01x^2 - 0,1x + 6$, donde "y" es el precio unitario en dólares y "x" es la cantidad demandada cada semana, en unidades de millar. Determine el excedente de los consumidores si el precio de mercado se establece como \$4 por cartucho.

Rpta. \$11 667

(6) Se sabe que la cantidad demandada de cierta marca de secadora de pelo portátil es de x cientos unidades por semana y que el precio unitario correspondiente, al mayoreo, es $y = \sqrt{225 - 5x}$ dólares. Determine el excedente de los consumidores si el precio de mercado al mayoreo se establece con \$ 10 por unidad. Rpta. EC = \$6 667

(7) Dada la función de demanda $y = f(x) = 12 - 0,07x$ y la función de oferta $y = g(x) = 20,05x$, donde f(x) y g(x) están en dólares, encuentre.

a) El punto de equilibrio.

b) El excedente del consumidor.

c) El excedente del productor.

Rpta. a) x = 100 b) EC = \$ 350 c) EP = \$ 250

(8) Las funciones de demanda y de oferta (en situación de libre competencia) son $y = \frac{1}{4}(9 - x^2)$ y $y = \frac{1}{4}(1 + 3x)$ respectivamente, si se establece un impuesto adicional de 3 por cantidad unitaria sobre la mercancía, calcular la disminución en el excedente del consumidor. Rpta. $E.C. = \frac{95}{24}$

(9) Suponga que la función de oferta de un cierto artículo está dado por $y = f(x) = \frac{7x}{5}$ y la función de demanda esta dado por $y = g(x) = -\frac{3x}{5} + 10$.

a) Encuentre el punto donde la oferta y la demanda están en equilibrio.

b) Encuentre el excedente del consumidor.

c) Encuentre el excedente del productor.

d) Haga la gráfica de las curvas de oferta y de demanda.

Rpta. a) (5,7) b) EC = \$ 7.50 c) EP = \$ 17.50

(10) Encuentre el excedente del consumidor si la función de demanda para el aceite de oliva extra virgen está dado por $y = f(x) = \frac{16000}{(2x+8)^3}$, y si la oferta y la demanda están en equilibrio en x = 6. **Rpta.** EC = \$40.50

(11) Suponga que la función de oferta de un cierto equilibrio está dado por $y = f(x) = x^2 + \frac{11x}{4}$ y la función de demanda está dado por $y = g(x) = 150 - x^2$.

a) Encuentre el punto en que la oferta y la demanda están en equilibrio.

b) Encuentre el excedente del consumidor.

c) Encuentre el excedente del productor.

d) Haga la gráfica de las curvas de oferta y demanda.

Rpta. a) (8,86) b) \$ 341.33 c) \$ 429.33

(12) La función de demanda es $y = 20 - 3x^2$ y la de oferta es $y = 2x^2$; obtenga los excedentes del consumidor y del producto en un mercado de competencia libre o pura.

Rpta. EC = 16 ; $EP = \frac{32}{3}$

(13) Las funciones de demanda y de oferta, en un mercado de libre competencia son respectivamente $y = 32 - 2x^2$; $y = \frac{x^2}{3} + 2x + 5$, evalué:

a) El excedente del consumidor b) El excedente del productor

Rpta. a) EC = 36 b) EP = 15

(14) La ecuación de demanda para un producto es $y = f(x) = \frac{90}{x+2} - 2$ y la ecuación de oferta es y = g(x) = x + 1, Determinar el excedente de los consumidores y el de los productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.

Rpta. EC = 90 ln 5 – 72 ; EP = 32

(15) La ecuación de demanda de un producto es $x = 10\sqrt{100-y}$ calcule el excedente de consumidores bajo equilibrio del mercado, que ocurre a un precio de \$ 84.

Rpta. \$ 426.67

(16) La ecuación de demanda para un producto es $y = f(x) = 2^{11-x}$, y la ecuación de oferta es $y = g(x) = 2^{x+1}$, donde "y" es el precio por unidad (en cientos de dólares) cuando "x" unidades se demanda o se ofrecen. Determine a las 1 000 unidades más cercanas el excedente de consumidores bajo equilibrio del mercado.

Rpta. \$ 254 000

(17) La demanda de un producto está dado por $y = f(x) = 10 - \sqrt{x}$ y el precio de equilibrio y es 8. Encuentre el excedente en el consumo. **Rpta.** $E.C = \frac{8}{3}$

(18) La ecuación de demanda para un producto es $y = f(x) = 60 - \frac{50x}{\sqrt{x^2+3600}}$ y la ecuación de oferta es y = g(x) =10 ln (x + 20) – 26. Determine el excedente de consumidores y el de productores bajo equilibrio del mercado (Redondee sus respuestas al entero más cercano). **Rpta.** EC = \$ 1197 ; EP = \$ 477

(19) Si la curva de demanda está dada por $y = f(x) = -\frac{x^2}{2} - 3x + 30$ y la curva de oferta por y = g(x) = 3x + 16, encontrar el excedente en el consumo cuando y = 22.

Rpta. $E.C = \frac{26}{3}$

(20) Dada la curva de oferta $y = g(x) = \frac{x^4}{4} + 2$, encontrar el excedente en la producción cuando y = 6. **Rpta.** $E.P = \frac{32}{5}$

(21) Si la función de oferta está dado por $y = g(x) = \frac{e^{\frac{x}{5}}}{5}$, determinar el excedente en la producción cuando x = 5.

(22) Encuentre el excedente en el consumo y el excedente en la producción si la demanda es $y = f(x) = 2e^{-x}$ y el de oferta $y = g(x) = \frac{e^x}{2}$. Rpta. $E.P = \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}$

(23) Dadas las demandas $y = f(x) = 81 - x^4$ y la oferta $y = g(x) = 2x^4 + 33$, encontrar el excedente en la producción y en el consumo. Rpta. $E.C = \frac{128}{5}$

(24) Una curva de demanda esta dado por $y = f(x) = \frac{20}{\sqrt{x+1}}$ encuentre el excedente en el consumo cuando x = 15. Rpta. EC = 45

(25) Si $y = f(x) = \frac{27}{x^3} + 9$, $y = g(x) = \frac{x^2}{3} + 7$; definen las curvas de demanda y oferta, encuentre el excedente en el consumo y en la producción. Rpta. EP = 6

(26) La función de oferte para los discos compactos está dado por $y = g(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 3$, donde "y" es el precio unitario al mayoreo en dólares y "x" represente la cantidad que pondrá a disposición del mercado el proveedor, medida en unidades de millar. Determine el excedente de los productores si el precio de mercado al mayoreo es igual al precio de equilibrio. Rpta. EP = \$ 11 667

(27) La cantidad demandada k (en unidades de centenas) de las cámaras miniatura MIKADO cada semana se relaciona con el precio unitario y (en dólares) como $y = f(x) = -0{,}2x^2 + 80$, por otro lado, la cantidad x (en unidades de centenas) que el proveedor está dispuesto a poner a la venta se relaciona con el precio unitario y (en dólares) de la forma $y = g(x) = 0{,}1x^2 + x + 40$. Si el precio de mercado se establece como el precio de equilibrio, determine el excedente de los consumidores y el de los productores. Rpta. EC = \$ 13333 ; EP = \$ 11667

(28) La función de demanda para cierta marca de relojes despertadores para viaje está dado por $y = f(x) = -0{,}01x^2 - 0{,}3x + 10$, donde y es el precio unitario al mayoreo, en dólares, y "x" es la cantidad demandada cada mes, en unidades de millar. La función de oferta de ésta marca de relojes está dado por $y = g(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}2x + 4$ donde "y" tiene el mismo significado que antes y "x" es la cantidad (en miles) que el proveedor pondrá a la venta cada mes. Determine el excedente de los consumidores y de los productores cuando el precio unitario de mercado es igual al precio de equilibrio. Rpta. EC = \$33120 ; EP = \$2880

(29) Suponga que la función de oferta para concreto está dado por $y = g(x) = 100 + 3x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$, y que la oferta y la demanda están en equilibrio en x = 9, encuentre el superávit de productores. **Rpta.** EP = \$ 1 999.54

(30) Para un producto, la ecuación de demanda es $y = f(x) = 0,01x^2 - 1,1x + 30$ y su ecuación de oferta es $y = g(x) = 0,01x^2 + 8$. Determine el excedente de consumidores y el de productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.

Rpta. $E.C = 166\frac{2}{3}$; E.P = 53

(31) Suponiendo un mercado de libre competencia, obtenga el nivel de producción que maximice la utilidad y la correspondiente utilidad total si $IM = 24 - 6x - x^2$ y $CM = 4 - 2x - x^2$.

Rpta. La utilidad se maximiza para x = 5 y la utilidad total es 50.

(32) Si IM = 44 – 9x y $CM = 20 - 7x + 2x^2$, establezca el nivel de producción que maximice la utilidad y la correspondiente utilidad total (P_{max}) en un mercado de competencia pura. **Rpta.** Para x = 3 se maximiza la utilidad

Utilidad total = $(P_{max}) = 45$

(33) Si IM = 15 – 5x y $CM = 10 - 3x + 3x^2$, determine el nivel de producción que maximice la utilidad y la correspondiente utilidad total (P_{max}) en un mercado de competencia pura. **Rpta.** Para x = 1 se maximiza la utilidad

Utilidad total = $(P_{max}) = 3$

(34) Si la función de demanda corresponde a la parte de la hipérbola equilátera $y = \frac{8}{x+1} - 2$ situado en el primer cuadrante, y la función de oferta es $y = \frac{1}{2}(x+3)$, calcule el excedente del consumidor y el excedente del producto en un mercado de libre competencia. **Rpta.** $E.C = 8\sqrt{2} - 10$, $E.P = \frac{25}{4}$

(35) La función de demanda de cierta marca de discos compactos está dada por $y = f(x) = -0,01x^2 - 0,2x + 8$ donde y es el precio unitario al mayoreo en dólares y x es la cantidad demandada cada semana, en unidades de millar. Determine el excedente de los consumidores si el precio de mercado al mayoreo se establece como \$ 5 por disco.

(36) El proveedor de los secadores de pelo mencionados pondrá a la venta x cientos de unidades cuando el precio unitario al mayoreo sea $y = \sqrt{36 + 1.8x}$ dólares. Determine el excedente de los productores si el precio de mercado al mayoreo se establece como \$ 9 por unidad.

(37) La gerencia de la compañía de neumáticos TITAN ha determinado que la cantidad demandada x de sus neumáticos SUPER TITAN cada semana se relaciona con el precio unitario "y" mediante la relación $y = f(x) = 144 - x^2$, donde "y" se mide en dólares y "x" en unidades de millar. TITAN colocara en el mercado x unidades de los neumáticos si el precio unitario es $y = g(x) = 48 + \frac{x^2}{2}$ dólares. Determine el excedente de los consumidores y el de los productores cuando el precio unitario de mercado es igual al precio de equilibrio.

(38) La cantidad demandada de cierta marca de organizador de discos compactos es de x de miles de unidades por semana y el precio unitario al mayoreo correspondiente es $y = f(x) = \sqrt{400 - 8x}$ dólares. El proveedor pondrá a la venta x miles de unidades si el precio unitario al mayoreo es: $y = g(x) = 0,02x^2 + 0,04x + 5$ dólares. Determine el excedente de los consumidores y de los productores cuando el precio unitario de mercado es igual al precio de equilibrio.

(39) La función de demanda de cierta marca de bicicleta para ejercicios que solo se vende por medio de la televisión por cable es $y = f(x) = \sqrt{9 - 0,02x}$ donde "y" es el precio unitario en cientos de dólares y "x" es la cantidad demandada por semana. La función de oferta correspondiente esta dada por $y = g(x) = \sqrt{1 + 0,02x}$, donde y tiene el mismo significado que antes y "x" es el número de bicicletas que el proveedor pondría en venta al precio "y". Determine los excedentes del consumidor y del productor si el precio unitario es igual al precio de equilibrio.

40 Encuentre el excedente del consumidor y el excedente de productores para un artículo que tiene una función de oferta $y = g(x) = 3x^2$ y una función de demanda $y = f(x) = 144 - \frac{x^2}{6}$.

41 Encuentre el excedente de productores si la función de oferta de cierto artículo está dada por $y = g(x) = x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 50$ suponga que la oferta y la demanda están en equilibrio en x = 16.

42 Encuentre el excedente de consumidores si la función de demanda para semilla de césped está dada por $y = f(x) = \frac{100}{(3x+1)^2}$ suponiendo que la oferta y la demanda están en equilibrio en x = 3.

43 Suponga que la función de oferta de un cierto articulo está dada por $y = g(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1$ y la función de demanda esta dada por $y = f(x) = 400 - e^{\frac{x}{2}}$.

a) Haga la gráfica de las curvas de oferta y demanda.

b) Encuentre el punto en que la oferta y la demanda están en equilibrio.

c) Encuentre el excedente de consumidores.

d) Encuentre el excedente de productores.

44 Suponga que la ecuación de demanda para el producto de un fabricante está dado por $y = f(x) = 10(x+1)e^{-(0.1x+1)}$, donde y es el precio por unidad (en dólares) cuando se demandan x unidades. Suponga que el equilibrio del mercado ocurre cuando x = 20. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

45 Para un producto, la ecuación de demanda es $y = f(x) = (x-5)^2$ y la ecuación de oferta es $y = g(x) = x^2 + x + 3$, donde y (en miles de dólares) es el precio de 100 unidades cuando x cientos de unidades son demandadas u ofrecidas. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

46) La ecuación de demanda de un producto es $x = 400 - y^2$ y la ecuación de oferta es $y = \frac{x}{60} + 5$, encuentre el excedente de los productores y el de consumidores bajo equilibrio del mercado.

47) La ecuación de demanda para un producto es $(y + 20)(x + 10) = 800$ y la ecuación de oferta es $x - 2y + 30 = 0$.

a) Verifique, por sustitución, que el equilibrio del mercado ocurre cuando $y = 20$, $x = 10$.

b) Determine el excedente de consumidores bajo equilibrio del mercado.

CAPÍTULO IV

4. INTEGRALES IMPROPIAS.-

4.1 INTRODUCCIÓN.-

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que; si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y si $F(x)$ es la integral indefinida de $f(x)$ entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Ahora nos haremos algunas interrogantes, por ejemplo:

¿A qué es igual la integral $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$? En donde la función es definida en el intervalo $[2,+\infty\rangle$

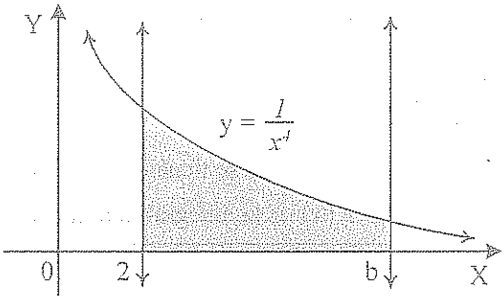
¿A qué es igual la integral $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^4}$? En donde la función es definida en el intervalo $\langle -\infty, 1]$

¿A qué es igual la integral $\int_0^4 \frac{dx}{x^4}$? En donde la función está definida en el intervalo $\langle 0,4]$

¿A qué es igual la integral $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^4}$? En donde la función está definida en el intervalo $[-2,0\rangle \cup \langle 0,2]$

A todas las integrales de estos tipos mencionados se denominan integrales impropias las cuales pueden existir o no existir.

Analizaremos la integral $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$, para esto calcularemos el área bajo la curva $y=\frac{1}{x^4}$, y el eje X desde $x = 2$ hasta $x = $ b.



$$\int_{2}^{b}\frac{dx}{x^4}=\frac{1}{3x^3}\Big|_{2}^{b}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{b^3}-\frac{1}{8}\right) \text{ entonces } \int_{2}^{b}\frac{dx}{x^4}=\frac{1}{24}-\frac{1}{3b^3}$$

Luego $\frac{1}{24}-\frac{1}{3b^3}$ es igual a $\frac{1}{24}$, cuando $b \to \infty$ lo cual expresaremos en la forma.

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^4}=\lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b}\frac{dx}{x^4}=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{3b^3}\right)=\frac{1}{24}$$

Se tiene dos tipos de integrales impropias que son integrales impropias con límites infinitos e integrales impropias con límites finitos.

4.2 INTEGRALES IMPROPIAS CON LÍMITES INFINITOS.-

DEFINICIÓN 1.- Si $f\colon [a,+\infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,+\infty\rangle$, entonces a la integral impropia $\int_{a}^{+\infty}f(x)\,dx$ definiremos por:

$$\boxed{\int_{a}^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}f(x)\,dx}$$

Si existe el límite diremos que la integral impropia es convergente, en caso contrario diremos que es divergente.

DEFINICIÓN 2.- Si $f: \langle -\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $\langle -\infty, b]$ entonces a la integral impropia $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ definiremos por:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx}$$

Si existe el límite diremos que la integral impropia es convergente, en caso contrario diremos que es divergente.

DEFINICIÓN 3.- Si $f: \langle -\infty, \infty \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces a la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ definiremos por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

Si las integrales impropias $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$, $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ son convergentes entonces la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente, en caso contrario se dice que es divergente.

(c es un número arbitrario en donde esta definición no depende del número c que se considera).

OBSERVACIÓN.- Si $f(x) \geq 0$, entonces las integrales impropias convergentes representan el área de la región plana que determina la gráfica de la función f y el eje X.

Ejemplo.- Determinar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias.

① $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Solución

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0)$$

$$= \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{es convergente.}$$

② $\int_{-\infty}^{1} e^x\, dx$

Solución

$$\int_{-\infty}^{1} e^x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^1 e^x\, dx = \lim_{a\to-\infty} e^x \Big|_a^1 = \lim_{a\to-\infty} (e - e^a) = e - e^{-\infty} = e - 0 = e$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{1} e^x\, dx = e, \text{ es convergente}$$

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, e^{-x^2}\, dx$

Solución

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} |x|\, e^{-x^2}\, dx + \int_0^{+\infty} |x|\, e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} -xe^{-x^2}\, dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{e^{-x^2}}{2}\Big|_a^0 - \lim_{b\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{2}\Big|_0^b = \frac{1}{2}\Big[\lim_{a\to-\infty} (1 - e^{-a^2}) - \lim_{b\to+\infty} (e^{-b^2} - 1)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\big[(1-0) - (0-1)\big] = 1 \qquad \therefore \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, e^{-x^2}\, dx = 1, \text{ es convergente.}$$

④ $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)$, $a>0$

Solución

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,dx = \lim_{\theta\to+\infty}\int_0^{\theta} e^{-ax}\cos(bx)\,dx$$

Calculando la integral $\int e^{-ax}\cos(bx)\,dx$ por partes:

$$\int e^{-ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{-ax}(b\,\text{sen}\,bx - a\cos bx)}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,dx = \lim_{\theta\to+\infty}\int_0^{\theta} e^{-ax}\cos(bx)\,dx = \lim_{\theta\to+\infty}\left.\frac{e^{-ax}(b\,\text{sen}\,bx - a\cos bx)}{a^2+b^2}\right|_0^{\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to+\infty}\left[e^{-a\theta}.\frac{(b\,\text{sen}\,b\theta - a\cos b\theta)}{a^2+b^2}+\frac{a}{a^2+b^2}\right] = 0+\frac{a}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}\ ,\ \text{es convergente.}$$

4.3 INTEGRALES IMPROPIAS CON LÍMITES FINITOS.-

DEFINICIÓN 1.- Si $f\colon [a,b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b\rangle$, entonces a la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dxx$ definiremos por:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx}$$

Si existe el límite diremos que la integral impropia es convergente, en caso contrario se dice que es divergente.

DEFINICIÓN 2.- Si $f: \langle a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $\langle a,b]$, entonces a la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ definiremos por:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx}$$

Si existe el límite diremos que la integral impropia es convergente, en caso contrario se dice que es divergente.

DEFINICIÓN 3.- Si $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ excepto en $x = c$ donde $a < c < b$, entonces a la integral impropia definiremos por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

Si las integrales impropias $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ son convergentes, entonces la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ es convergente, en caso contrario se dice que es divergente.

Ejemplo.- Determinar si las siguientes integrales impropias es convergente o divergente.

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

Solución

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} -2\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon} = -2 \lim_{\varepsilon \to 0} (\sqrt{\varepsilon} - 1) = -2(0-1) = 2$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2 \text{ es convergente.}$$

② $\int_1^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$

Solución

$$\int_1^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7} + 3(x-1)^{\frac{3}{2}} + x\right]\Bigg|_{1+\varepsilon}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{72}{7} - \sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{7} + 3\varepsilon^{\frac{3}{2}} + 17\varepsilon\right)\right] = \frac{72}{7}$$

$$\therefore \quad \int_1^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}} = \frac{72}{7} \quad \text{es convergente}$$

③ $\int_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx$

Solución

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_{-1}^0 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx + \int_0^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 3\left[\frac{3}{2}\ln(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x^2}-4) - \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\right]\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon}$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} 3\left[\frac{3}{2}\ln(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x^2}-4) - \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\right]\Bigg|_{\varepsilon}^{1}$$

$$= 3\left[\frac{3}{2}(\ln 2(0-4)-0) - \frac{3}{2}\left(\ln(1-4) - \frac{1}{4}(1-4)\right)\right] + 3\left[\frac{3}{2}(\ln 3(1-4) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}(1-4)\right) - \frac{3}{2}\left(\ln 2(0-4) - \frac{1}{4}(0-0)\right)\Bigg] = -\frac{27}{2}\ln 3$$

$$\therefore \quad \int_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx = -\frac{27}{2}\ln 3, \quad \text{es convergente.}$$

4.4 CRITERIOS PARA LA CONVERGENCIA DE INTEGRALES IMPROPIAS.-

4.4.1 CRITERIO DE COMPARACIÓN.-

Consideremos dos funciones f y g tales que $0 \le g(x) \le f(x)$ $\forall\, x \in [a,b\rangle$ y además integrable en $[a,t\rangle$, $\forall\, t \in [a,b\rangle$, entonces:

i) Si $\int_a^b f(x)dx$ es convergente, entonces $\int_a^b g(x)dx$ es convergente

ii) Si $\int_a^b g(x)dx$ es divergente, entonces $\int_a^b f(x)dx$ es divergente.

4.4.2 CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA FUNCIÓNES DISCONTINUAS.-

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ excepto en el punto $x = c$; si $f(x) \ge 0$ y $\lim\limits_{x \to c} f(x)|x-c|^m = A$ donde $A \ne 0$, $+\infty$ en este caso a la función $f(x)$ lo aproximemos a $f(x) - \dfrac{a}{(x-c)^m}$ cuando $x \to c$, entonces la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$.

i) Es convergente cuando $m < 1$.

ii) Es divergente cuando $m \ge 1$.

4.4.3 CRITERIO DE CONVERGENCIA CUANDO UN LÍMITE DE INTEGRACIÓN ES INFINITO.

Sea f: $\langle a,+\infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $a < x < +\infty$, si $f(x) \ge 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x).x^m = A$, donde $A \ne 0$, $+\infty$ en este caso a la función $f(x)$ los aproximamos a $f(x) - \dfrac{A}{x^m}$ cuando $x \to \infty$ entonces la integral impropia.

i) Es convergente si $m > 1$.

ii) Es divergente si $m \le 1$.

Ejemplos.- Determinar si las integrales impropias son convergentes o divergentes.

① $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3+x^2}$

Solución

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3+x^2}\le\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$, $\forall\, x\in[1,+\infty\rangle$, como la integral.

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{4}$ es convergente, entonces el criterio de comparación se tiene a la integral

$$\therefore\quad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3+x^2}\ \text{ es convergente.}$$

② $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\operatorname{sen}x^2\,dx$

Solución

$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\operatorname{sen}x^2\,dx\le\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$, $\forall\, x\in[0,+\infty\rangle$, como la integral

$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$ es convergente, entonces por el criterio de comparación se tiene que la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\operatorname{sen}x^2\,dx$ es convergente.

③ $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x}}$

Solución

$\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x}}\le\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ $\forall\, x\in\langle 0,1]$, como la integral $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2$ es convergente, por lo tanto $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x}}$ es convergente por el criterio de comparación.

④ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+4}$

Solución

A la función dada los expresaremos así:

$$f(x)=\frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+4}=\frac{\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}{2x^{\frac{1}{3}}+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}}$$

cuando $x \to +\infty$, el denominador tiende a 1.

Luego $f(x)-\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{A}{x^m}$ de donde A = 1, $m=\frac{2}{3}$

Luego por el criterio 3 de la convergencia resulta que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+4}$ es divergente.

⑤ $\int_1^{b} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}$, $b>0$

Solución

A la función lo expresaremos así:

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}=\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+2+x^{\frac{11}{4}}})$ esta función es discontinua en $x=0$ y cuando $x \to 0$ a la función $f(x)$ lo aproximamos.

$$f(x)-\frac{1}{2x^{\frac{1}{4}}}=\frac{A}{x^m} \text{ de donde } A=\frac{1}{2},\ m=\frac{1}{4}<1.$$

Luego por el criterio 2 de la convergencia se tiene que la integral impropia $\int_1^{b} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}$ es convergente.

⑥ Hallar el valor de k para que la integral impropia $\int_0^{\infty}\left(\frac{kx}{x^2+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx$ sea convergente. Luego hallar el valor de la integral.

Solución

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{kx}{x^2+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\left(\frac{kx}{x^2+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{k}{2}\ln|x^2+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right)\Big|_0^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x^2+1)^k}{2x+1}\right)\Big|_0^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{(b^2+1)^k}{2b+1}\right)-0\right]$$

este límite existe cuando $b\to+\infty$ sí $k=\frac{1}{2}$

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{kx}{x^2+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln[\lim_{b\to+\infty}\frac{(b^2+1)^{\frac{1}{2}}}{2b+1}]=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln 2$$

⑦ Hallar el valor de a y b de tal manera que la integral $\int_0^{+\infty}\left(\frac{2x^2+b+a}{x(2x+a)}-1\right)dx=1$

Solución

A la integral dada lo expresaremos en la forma:

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+b+a}{x(2x+a)}-1\right)dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{a-b+2}{2x+a}\right)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\left(\frac{1}{x}-\frac{a-b+2}{2x+a}\right)dx=1$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left[\ln x-\frac{a-b+2}{2}\ln(2x+a)\right]\Big|_1^b=1$$

$$\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x^2}{(2x+a)^{a-b+2}}\right)\right]\Big|_1^b=1 \qquad \dots (1)$$

la integral impropia es convergente solo cuando dentro del argumento del logaritmo el numerador y denominador sus exponentes son iguales, es decir: $a-b+2=2$ de donde $a=b$.

$$\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x^2}{(2x+a)^2}\right)\right]\Bigg|_1^b=1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{b\to+\infty}\left(\ln\frac{b^2}{(2b+a)^2}-\ln\frac{1}{(2+a)^2}\right)=2$$

$$\ln\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{b^2}{(2b+a)^2}\right)-\ln\left(\frac{1}{2+a}\right)^2=2$$

$$\ln\frac{1}{4}-\ln\left(\frac{1}{2+a}\right)^2=2 \quad\Rightarrow\quad \ln\frac{(2+a)^2}{4}=2\text{, aplicando logaritmo neperiano}$$

$$\left(\frac{2+a}{2}\right)^2=e^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{2+a}{2}=e \quad\Rightarrow\quad a=2e-2 \text{ de donde } b=2e-2$$

4.4.4 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Determinar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias.

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$ Rpta. Conv. 2

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$ Rpta. Conv. 1

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln x\,dx$ Rpta. Div.

4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ Rpta. Conv. Ln2

5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}xe^{x}dx$ Rpta. Conv. -1

⑥ $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(1+x)^3}$ Rpta. Conv. $\frac{1}{2}$

⑦ $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ Rpta. Conv. $\frac{\pi}{2}-1$

⑧ $\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^4}$ Rpta. Conv. $\frac{1}{6(a^2+1)^3}$

⑨ $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$ Rpta. Conv. $-\frac{1}{2}$

⑩ $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$ Rpta. Conv. 2

⑪ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{101}}$ Rpta. Conv. 100

⑫ $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \operatorname{sen} bx\,dx$ Rpta. Conv. $\frac{b}{a^2+b^2}$

⑬ $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$ Rpta. Conv. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

⑭ $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ Rpta. Conv. $\frac{1}{\ln a}$

⑮ $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$ Rpta. Conv. $\frac{\pi^2}{8}$

⑯ $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$ Rpta. Conv. $\frac{1}{3}$

(17) $\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-3x}\,dx$ Rpta. Conv. $\frac{2}{27}$

(18) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+9)^2}$ Rpta. Conv. $\frac{1}{18}$

(19) $\int_{-\infty}^{b} e^{x-e^x}\,dx$ Rpta. Conv. $1-e^{-e^b}$

(20) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ Rpta. Conv. $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$

(21) $\int_{1}^{+\infty} \frac{x^5\,dx}{(1+x^3)^{\frac{5}{2}}}$ Rpta. Conv. $\frac{5\sqrt{2}}{18}$

(22) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-6x)^{\frac{3}{2}}}$ Rpta. Conv. $\frac{3-\sqrt{3}}{18}$

(23) $\int_{0}^{+\infty} \frac{-2x-1}{3\sqrt[3]{x^2}\,(x-1)^2}\,dx$ Rpta. Div.

(24) $\int_{a^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ Rpta. Conv. $\ln\frac{\sqrt{a^4+1}+1}{a^2}$

(25) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$ Rpta. Conv. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

(26) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\,dx$ Rpta. Div.

(27) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\cosh x\,dx$ Rpta. Div.

(28) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^4}$ Rpta. Conv. $\frac{\pi}{2}$

(29) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^x}\,dx$ Rpta. Conv. 1

(30) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+1}$ Rpta. Conv. $\frac{\pi}{2}$

(31) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ Rpta. Conv. π

(32) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$ Rpta. Conv. 2

(33) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$ Rpta. Conv. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$

(34) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$ Rpta. Div.

(35) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ Rpta. Conv. $\frac{\pi}{2}$

(36) $\int_{0}^{+\infty} \frac{2\,dx}{e^x+e^{-x}}$ Rpta. Conv. $\frac{\pi}{2}$

II. Determinar la convergencia o divergencias de las siguientes integrales impropias.

(1) $\int_{-8}^{1} x^{-\frac{2}{3}}\,dx$ Rpta. Conv. 9

(2) $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ Rpta. Conv. -3

(3) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^{-\frac{2}{3}}}}$ Rpta. Conv. $2(2\sqrt{2}-1)$

(4) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ Rpta. Conv. Π

(5) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^3}$ Rpta. Div.

(6) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ Rpta. Conv. $\frac{\pi}{2}$

(7) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$ Rpta. Conv. 6

(8) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$ Rpta. Div.

(9) $\int_{0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ Rpta. Conv. $\frac{\pi}{2}$

(10) $\int_{3}^{5} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-9}}$ Rpta. Conv.

(11) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ Rpta. Conv. 2

(12) $\int_{1}^{4} \frac{dx}{x^2-4}$ Rpta. Div.

(13) $\int_{0}^{2a} \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ Rpta. Conv. Πa

(14) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$ Rpta. Div.

(15) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1+x^3}}$ Rpta. Conv. $\frac{4}{9}$

(16) $\displaystyle\int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ Rpta. Conv. Π

(17) $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ Rpta. Conv. $\frac{\pi}{2}$

(18) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)(x-3)}$ Rpta. Div.

(19) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}$ Rpta. Conv. $\frac{3}{2}$

(20) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},\ a<b$ Rpta. Conv. Π

(21) $\displaystyle\int_0^a \frac{a^2-e^2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ Rpta. $\dfrac{\pi a^2}{2}\left(1-\dfrac{e^2}{2}\right)$

(22) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$ Rpta. Conv. $-\frac{1}{4}$

(23) $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{(x-1)(x^2-8x+15)}$ Rpta. Div.

(24) $\displaystyle\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)(5-x)}}$ Rpta. Conv. $\frac{33\pi}{2}$

(25) $\int_a^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a<b$ Rpta. Conv. $\frac{\pi}{2}(a+b)$

(26) $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$ Rpta. Conv. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

(27) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$ Rpta. Div.

(28) $\int_0^4 \frac{dx}{x^2-2x-3}$ Rpta. Div.x

(29) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ Rpta. Conv. 2

(30) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec x\,dx$ Rpta. Div.

III. Determinar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$ Rpta. Conv. π

(2) $\int_{-4}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$ Rpta. Conv. 0

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ Rpta. Conv. 1

(4) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ Rpta. Div.

(5) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ Rpta. Conv. $\frac{\pi}{2}$

⑥ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2+4})^2}$ Rpta. Conv. $\dfrac{1}{3}$

⑦ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ Rpta. Conv. 1

⑧ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$ Rpta. Conv. 0

⑨ $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x-6}}$ Rpta. Div.

⑩ $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-x}}\,dx$ Rpta. Conv. $\dfrac{\pi}{2}$

⑪ $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{(x-1)(2-x)}$ Rpta. Conv. π

⑫ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$ Rpta. Div.

⑬ $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(\ln x)}$ Rpta. Div.

⑭ $\displaystyle\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ Rpta. Conv. 1

IV. Determinar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias.

① $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^4}}$ Rpta. Conv.

② $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x+3}{x^4+1}\,dx$ Rpta. Conv.

(3) $\int_{2}^{+\infty} \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ Rpta. Conv.

(4) $\int_{0}^{1} \frac{\operatorname{sen}(x^3)}{\sqrt{x}}dx$ Rpta. Conv.

(5) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ Rpta. Conv.

(6) $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$ Rpta. Conv.

(7) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{13}dx}{(x^5+x^3+2)^3}$ Rpta. Conv.

(8) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$ Rpta. Div.

(9) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ Rpta. Conv.

(10) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^5+1}}$ Rpta. Div.

(11) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ Rpta. Conv.

(12) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x\, dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}$ Rpta. Div.

(13) $\int_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$ Rpta. Div.

(14) $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$ Rpta. Conv.

(15) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\operatorname{sen} x}-1}$ Rpta. Conv.

(16) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$ Rpta. Div.

(17) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sec x)\,dx}{\sqrt{x}}$ Rpta. Conv.

(18) $\int_0^1 x\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)dx$ Rpta. Conv.

(19) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{x^3}$ Rpta. Conv.

V. Problemas Diversos.

(1) Mostrar que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ es convergente para $p > 1$ y divergente para $p \leq 1$.

(2) Demostrar que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} x(1+x^2)^{-2}\,dx$ es convergente y la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} x(1+x^2)^{-1}\,dx$ es divergente.

(3) Demostrar que: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

(4) Mostrar que la integral impropia $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ es convergente sí $0 < p < 1$ y divergente sí $p \geq 1$.

(5) Demostrar que: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$.

(6) Demostrar que: $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$

(7) Determinar un valor para n de tal manera que la integral impropia $\int_1^{+\infty}\left(\frac{nx^2}{x^3+1}-\frac{1}{3x+1}\right)dx$ es convergente.

(8) Determinar un valor para k de tal manera que la integral impropia $\int_1^{+\infty}\left(\frac{kx^2}{x^3+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx$ sea convergente y calcule la integral.

Rpta. $k=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4}\ln\frac{5}{4}$

(9) Determinar el valor de n para que la integral impropia $\int_1^{+\infty}\left(\frac{n}{x+1}-\frac{3x}{2x^2+n}\right)dx$ sea convergente.

Rpta. $n=\frac{3}{2}$.

(10) Determinar el valor de k para que la integral impropia $\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}-\frac{k}{x+1}\right)dx$ sea convergente y calcular la integral.

Rpta. $k=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln 2$

(11) Para que valores de k convergen las integrales $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^k\ln x}$ y $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$

Rpta. Para $k>1$ converge y $k\le 1$ Div.

(12) Determinar el valor de k para la integral impropia $\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{k}{2x^2+2c}-\frac{c}{x+1}\right)dx$ sea convergente y calcular la integral. Rpta. $k=1,\ \frac{1}{2}\ln 2$

(13) Hallar el valor de la integral impropia $\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+ax^2}}-\frac{\alpha}{x+1}\right)dx$.

Rpta. $\alpha=\frac{1}{\sqrt{a}},\ \frac{1}{\sqrt{a}}\ln 2\sqrt{a}$

(14) Sabiendo que: $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (integral de Poisson) calcular las integrales impropias siguientes:

a) $\int_{0}^{+\infty} e^{-ax^2}dx,\ a>0$ Rpta. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

b) $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ Rpta. $\sqrt{\pi}$

c) $\int_{0}^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx$ Rpta. $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

(15) Sabiendo que: $\int_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ (integral de Dirichlet) calcular las siguientes impropias.

a) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}dx$ Rpta. $\frac{\pi}{2}$

b) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} ax}{x}dx$ Rpta. $\frac{\pi}{2}$ Sí $a>0$, $-\frac{\pi}{2}$ sí $a<0$ o sí $a=0$.

c) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}dx$ Rpta. $\frac{\pi}{2}$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}^3 x}{x} dx$ Rpta. $\dfrac{\pi}{4}$

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}^4 x\, dx}{x^2}$ Rpta. $\dfrac{\pi}{4}$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}\, ax.\cos bx\, dx}{x}$, $a > 0,\ b > 0$ Rpta. $\dfrac{\pi}{2}$ si $a > b$, $\dfrac{\pi}{4}$ si $a = b$, o si $a < b$

(16) Pruebe que la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}\, x}{x} dx$ es convergente.

(17) Analizar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}^4 x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$

(18) Estudiar con detalle si la integral dada converge o diverge $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4(\cos\theta - e^v)^2}}$, conociendo que $\theta = \pi$ y $v = \ln e^x$.

(19) Hallar $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$, $(n \in Z^+)$

(20) Evaluar $\displaystyle\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx$

(21) Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$

(22) Analizar la convergencia o divergencia de la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(2x^3 - 1)x^2 dx}{(1+x)^3}$

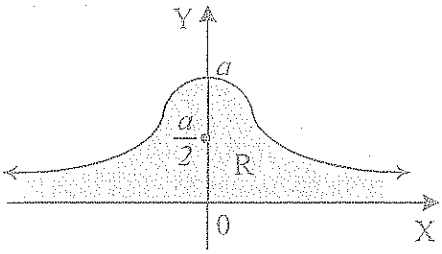
4.5 APLICACIONES DE LA INTEGRAL IMPROPIA.-

4.5.1 AREAS DE REGIONES Y VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN.-

① Hallar el área de la figura comprendida entre la curva de agnesi $y = \dfrac{a^3}{x^2+a^2}$, y el eje de abscisas.

Solución

La gráfica de la curva es:



Como la gráfica es simétrica con respecto al eje Y se tiene:

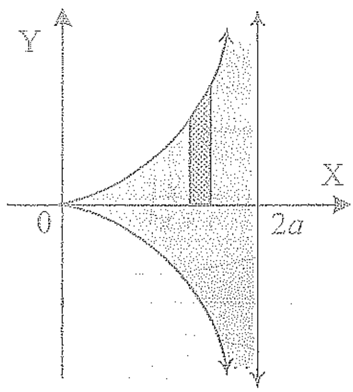
$$A(R) = 2\int_0^{+\infty} y\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{a^3}{x^2+a^2}\,dx$$

$$A(R) = 2a^3 \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+a^2} = 2a^3 \lim_{b\to\infty} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_0^b$$

$$= 2a^2 \lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \operatorname{arctg} 0\right) = 2a^2 \operatorname{arctg}(\infty) \qquad \therefore \quad A(R) = a^2\pi u^2$$

② Hallar el área de la figura limitada por la cisoide $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$ y su asíntota $x = 2a$, $(a > 0)$.

Solución



La gráfica de la cisoide es:

Como la gráfica de la cisoide es simétrica con respecto al eje X se tiene

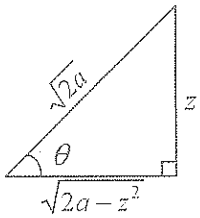
$$A(R) = 2\int_0^{2a} y\,dx = 2\int_0^{2a} x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx$$

Como la función es discontinua en $x = 2a$ entonces

$$A(R) = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2a-\varepsilon} x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx \qquad \ldots (1)$$

Calculando la integral $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$

Sea: $x = z^2 \Rightarrow dx = 2z\ dz$, luego: $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx = \int \frac{z^2.z.2z\,dz}{\sqrt{2a-z^2}} = 2\int \frac{z^4\,dz}{\sqrt{2a-z^2}}$



$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{z}{\sqrt{2a}} \\ z = \sqrt{2a}\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{z}{\sqrt{2a}}\right) \\ dz = \sqrt{2a}\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx = 2\int \frac{z^2dz}{\sqrt{2a-z^2}} = 2\int \frac{4a^2\operatorname{sen}^4\theta.\sqrt{2a}\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{2a}\cos\theta}$$

$$= 8a^2\int \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta = 2a^2\left(\frac{3\theta}{2} - \operatorname{sen}2\theta + \frac{\operatorname{sen}4\theta}{8}\right)$$

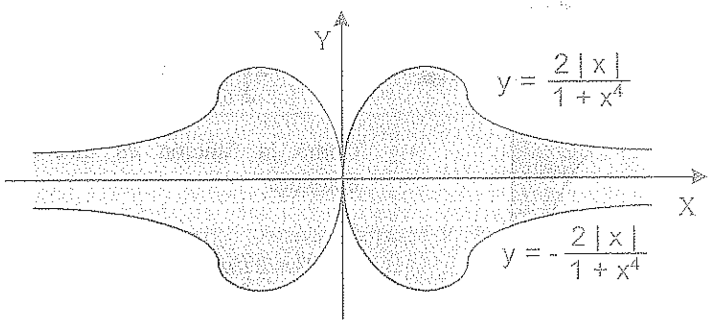
Cambiando los límites de integración se tiene:

$$A(R) = 2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{a-\varepsilon} x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx = 2\,a^2\left(\frac{3\theta}{2} - \operatorname{sen}20 + \frac{\operatorname{sen}40}{8}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\therefore \quad A(R) = 3a^2\pi\, u^2$$

(3) Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = \dfrac{2|x|}{1+x^4}$, $y = -\dfrac{4|x|}{1+x^4}$.

Solución



$$A(R)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{2|x|}{1+x^4}-\left(\frac{-4|x|}{1+x^4}\right)\right]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{6|x|}{1+x^4}dx$$

$$A(R)=\int_{-\infty}^{0}\frac{6|x|}{1+x^4}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{6|x|}{1+x^4}dx=3\int_{-\infty}^{0}\frac{2|x|}{1+x^4}dx+3\int_{0}^{+\infty}\frac{2|x|}{1+x^4}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}-3\int_a^0\frac{2x\,dx}{1+(x^2)^2}+3\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{2x\,dx}{1+(x^2)^2}=-3\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}x^2\Big|_a^0+3\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x^2\Big|_0^b$$

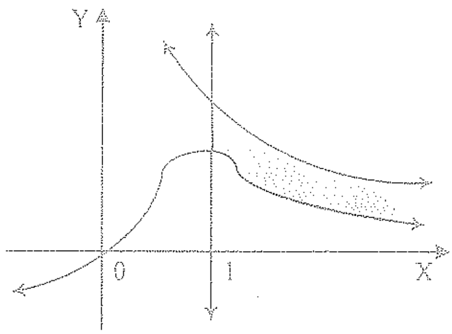
$$=-3\lim_{a\to-\infty}\left(0-\operatorname{arctg}a^2\right)+3\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}b^2-0\right)=-3(-\operatorname{arctg}(\infty))+3\operatorname{arctg}(\infty)=\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore\quad A(R)=3\pi\,u^2$$

(4) Hallar el área de la región comprendida entre las curvas $xy=1$, $y=\dfrac{x}{x^2+1}$, a la derecha de la recta $x=1$.

<u>**Solución**</u>

Ubiquemos la región entre las curvas



$$A(R)=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$A(R)=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$A(R)=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Bigg|_1^b$$

$$A(R)=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)\Bigg|_1^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\frac{b^2}{b^2+1}-\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(0-\ln\frac{1}{2}\right)$$

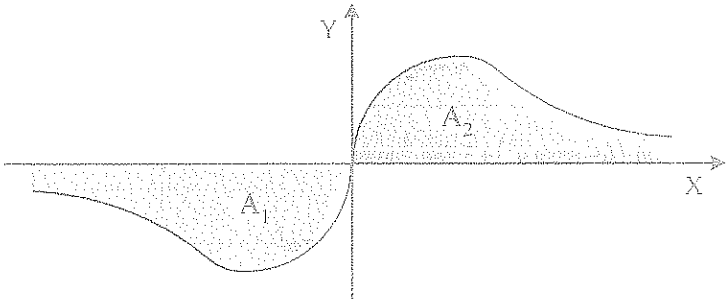
$$\therefore\quad A(R)=\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)u^2$$

5) Calcular el área de la región R comprendida entre la curva $y = xe^{-x^2/2}$ y su asíntota.

Solución

Calculando la asíntota: $y = xe^{-x^2/2} = \frac{x}{e^{x^2/2}}$, cuando $x \to \pm\infty$, $y = 0$

Luego $y = 0$ es la única asíntota. Ahora graficando la curva se tiene:



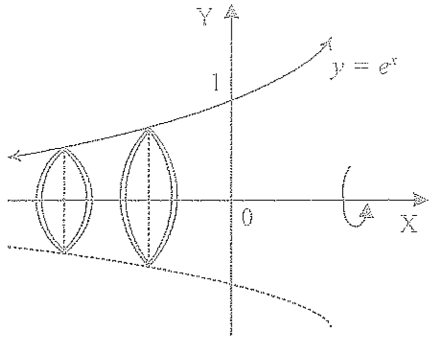
Se observa que la gráfica es simétrica con respecto al origen.

$$A(R) = A_1 + A_2 = 2A_2 = 2\int_0^{\infty} y\,dx = 2\lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\lim_{b\to+\infty} -e^{-x^2/2}\Big|_0^b$$

$$= -\lim_{b\to+\infty}(e^{-\frac{b^2}{2}} - 1) = -2(0-1) = 2 \qquad \therefore \quad A(R) = 2u^2$$

6) Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la superficie limitada por las líneas $y = e^x$, $x = 0$ e $y = 0$ alrededor del eje X.

Solución



$$V = \pi\int_{-\infty}^{0} y^2 dx = \pi\int_{-\infty}^{0} e^{2x} dx$$

$$V = \pi\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{2x}dx = \pi\lim_{a\to-\infty}\frac{e^{2x}}{2}\Big|_a^0$$

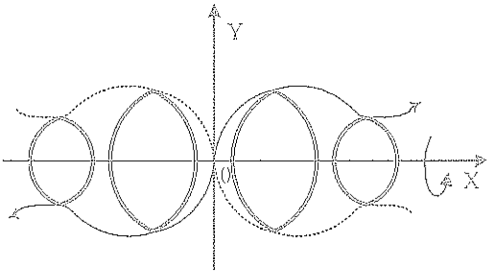
$$V = \pi\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{2a}}{2}\right) = \pi\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad V = \frac{\pi}{2}u^3$$

(7) Determinar el volumen de revolución engendrado al girar la curva $y = \frac{3x}{x^2+3}$ alrededor del eje X.

Solución

Graficando la curva que se va ha girar



Por simetría se tiene:

$$V = 2\pi\int_0^{+\infty} y^2 dx = 2\pi\int_0^{+\infty} \frac{9x^2 dx}{(x^2+3)^2}$$

$$V = 18\pi\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+3)^2} = 18\pi \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} \frac{x^2 dx}{(x^2+3)^2}$$

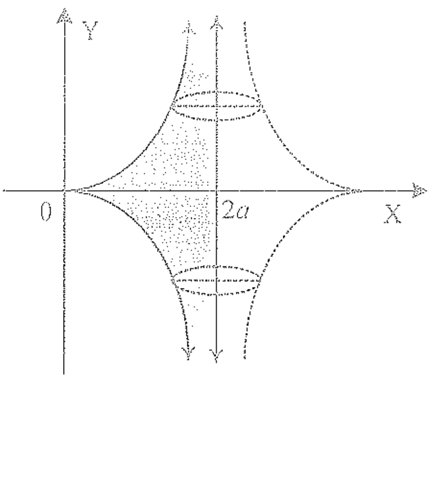
$$V = 18\pi \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-x}{2(x^2+3)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^b$$

$$V = 18\pi \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-b}{2(b^2+3)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{3}}\right) = 18\pi\left(0+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\therefore \quad V = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi^2 u^3$$

(8) Hallar el volumen del cuerpo que se engendra al girar la cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ alrededor de su asíntota $x = 2a$.

Solución



Aplicando el método de la corteza cilíndrica se tiene:

$$V = 2\pi\int_0^{2a} (2a-x)\, y\, dx = 2\pi\int_0^{2a} (2a-x)\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2a-x}}\, dx$$

$$V = 2\pi\int_0^{2a} (x\sqrt{2ax-x^2})\, dx$$

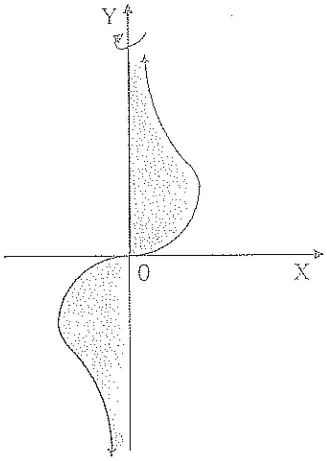
$$\therefore \quad V = 2a^3\pi^2 \ u^3$$

(9) Hallar el volumen del sólido obtenido al girar la curva $x+xy^2-y=0$, alrededor de su asíntota vertical.

Solución

Determinaremos la asíntota vertical, para esto despejamos y es decir: $y=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Luego su asíntota vertical es $x=0$ (eje Y) por lo tanto la curva gira alrededor del eje Y entonces despejamos x; $x=\dfrac{y}{1+y^2}$.



Aplicando la simetría se tiene:

$$V=2\pi\int_0^{+\infty}x^2\,dy=2\pi\int_0^{+\infty}\frac{y^2\,dy}{(1+y^2)^2}$$

$$V=2\pi\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{y^2\,dy}{(1+y^2)^2}\qquad\ldots(1)$$

Sean $\begin{cases}u=y\\ dv=\dfrac{y\,dy}{(1+y^2)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dy\\ v=\dfrac{-1}{2(1+y^2)}\end{cases}$

$$\int_0^{+\infty}\frac{y^2\,dy}{(1+y^2)^2}=-\frac{y}{(1+y^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}y\qquad\ldots(2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

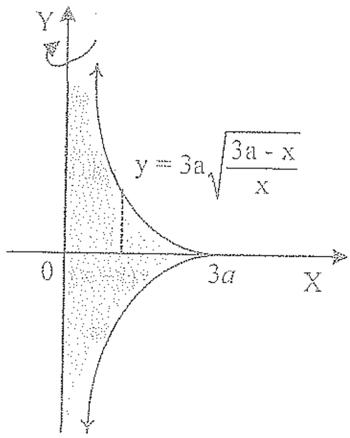
$$V=2\pi\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{y}{(1+y^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}y\right)\Bigg|_0^b=2\pi\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b}{2(1+b^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}b\right)$$

$$V=2\pi\left(0+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\infty)\right)=\frac{\pi^2}{2}u^3\quad\therefore\quad V=\frac{\pi^2}{2}u^3$$

(10) Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la curva $xy^2 = 9a^2(3a-x)$, $a>0$ alrededor de su asíntota vertical.

Solución

En primer lugar determinaremos su asíntota vertical para esto despejamos y es decir $y = \pm 3a\sqrt{\frac{3a-x}{x}}$. Luego su asíntota vertical es $x = 0$ (eje Y); ahora haremos la gráfica correspondiente.



Como gira alrededor del eje Y aplicaremos el método de la corteza cilíndrica y como es simétrica con respecto al eje X, se tiene:

$$V = 2\left[2\pi\int_0^{3a} x3a\sqrt{\frac{3a-x}{x}}dx\right]$$

$$V = 12\pi\int_0^{3a} x\sqrt{\frac{3a-x}{x}}dx$$

La función es discontinua en $x = 0$, entonces

$V = 12\pi a \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{3a} x\sqrt{\frac{3a-x}{x}}dx$. Calculando la integral y tomando el límite.

$$\therefore \quad V = \frac{27}{2}a^3\pi^2\, u^3$$

4.5.2 PROBLEMAS PROPUESTOS.-

(1) Hallar el área de la figura comprendida entre la curva $y = \frac{1}{x^2}$, el eje X y la recta $x = 1$ $(x \geq 1)$.

Rpta. $1\ u^2$

(2) Calcular el área de la región limitada por la gráfica $y = \frac{64}{x^2+16}$ y su asíntota.

Rpta. $16\pi\ u^2$

(3) Calcular el área de la región comprendida entre la curva $y = e^{-|x-1|}$ y el eje X.

Rpta. $2\ u^2$

(4) Calcular el área de la superficie limitada superiormente por $xy = 1$, inferiormente por $yx^2 + y - x = 0$, y a la izquierda por $x = 1$. Rpta. $\ln\sqrt{2}\ u^2$

(5) Calcular el área de la figura limitada por la curva $y^2(x^2+4) = 4x^2$, sus asíntotas y sus ejes. Rpta. $8\ u^2$

(6) Calcular el área de la región limitada por la curva $y^2 = \dfrac{x^4}{4-x^2}$, $y = 0$ y sus asíntotas verticales. Rpta. $2\pi\, u^2$

(7) Calcular el área de la región limitada por la curva $y^2 = \dfrac{1}{x(1-x)}$, $y = 0$ y sus asíntotas verticales. Rpta. $\pi\, u^2$

(8) Encontrar el área de la curva $y^2(a-x) = x^2(a+x)$ y su asíntota.

Rpta. $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\right)a^2\, u^2$

(9) Determinar el área de la región limitada por las curvas $x^2(y-1) + y - x = 1$, $x(y-1) = 1$, ubicada a la derecha de la recta $x = 1$. Rpta. $\left(\dfrac{1}{2}\ln 2\right)u^2$

(10) Hallar el área de la región, no acotada, limitada por la curva $y^2 = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, por sus asíntotas y el eje Y. Rpta. $2\ u^2$

(11) Encontrar el área de la región limitada por curva $y^2 = \dfrac{x(x-a)^2}{2a-x}$ y por su asíntota $(a > 0)$. Rpta. $\dfrac{\pi+4}{2}a^2\ u^2$

(12) Hallar el área de la región limitada por la curva $y^2 = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ y sus asíntotas.

Rpta. $4\ u^2$

(13) Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $y = \operatorname{arctg} x$, $2y = \pi$, $x = 0$.

Rpta. no existe

(14) Hallar el área de la región limitada por los gráficos $y = \operatorname{sech} x$ y su asíntota.

Rpta. $\dfrac{\pi}{2} u^2$

(15) Determinar el volumen del sólido de revolución generado al hacer rotar alrededor del eje X, la región comprendida entre la curva $y = \dfrac{1}{x^{2/3}}$, $x \geq 1$, $y = 0$.

Rpta. $3\pi\, u^3$

(16) Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la superficie limitada por la línea $y = e^x$, $x = 0$ e $y = 0$ alrededor del eje Y. Rpta. $2\pi\, u^3$

(17) La curva $xy^2 = 4a^2(2a - x)$ gira alrededor de su asíntota, ¿Cuál es el volumen generado?. Rpta. $4a^3\pi^3 u^3$

(18) Calcular el volumen del sólido generado al hacer rotar la región comprendida entre la curva $x + xy^2 = y$, y su asíntota vertical y gira alrededor de su asíntota vertical.

Rpta. $\dfrac{\pi^2}{2} u^3$

(19) Calcular el volumen generado obtenido al hacer girar la región comprendida entre la curva $y = \dfrac{1}{x^2+2}$ y su asíntota donde el eje de rotación es el eje X.

Rpta. $\dfrac{\pi^2}{2} u^3$

(20) Calcular el volumen del sólido generado al hacer rotar la región comprendida entre las curvas $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{x}{x^2+1}$, y que se encuentre a la derecha de la recta $x=1$ y rota alrededor del eje X. **Rpta.** $\frac{6-\pi}{8}\pi u^3$

(21) Hallar si existe el volumen del sólido de revolución obtenida al girar la región comprendida entre la curva $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, y su asíntota, alrededor de la recta $y=1$.

Rpta. $2\pi^2 u^3$

(22) Hallar el volumen obtenido al girar alrededor del eje X, la región situada encima del eje X y limitada por la curva $(x-4)y^2=x(x-3)$. **Rpta.** $\frac{15-8\ln 4}{2}u^3$

(23) La región limitada por la gráfica de $y=e^{-x^2}$, $x\geq 0$ y por sus asíntota, rota alrededor del eje de coordenadas, calcular el volumen del sólido. **Rpta.** πu^3

(24) Calcular el volumen del sólido generado al girar la región comprendida entre la curva $xy^2=9a^2(3a-x)$, $(a>0)$ y su asíntota gira alrededor del eje Y.

Rpta. $\frac{27}{2}a^3\pi^2 u^3$

4.6. FUNCIONES ESPECIALES.-

En esta sección estudiaremos las funciones conocidas como la función Gamma y Beta que se denota por $\Gamma(x)$ y $B(m,n)$ y son definidas en términos que una integral impropia.

4.6.1 DEFINICIÓN.- La función Gamma es una integral paramétrica definida por:

$$\boxed{\Gamma(x)=\int_0^{\infty} u^{x-1}e^{-u}\,du,\quad \forall x>0}$$

Esta integral es convergente para $x>0$.

4.6.1.1 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN GAMMA.-

1° $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $\forall x>-1$

Demostración

Por definición de función Gamma se tiene:

$\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty}u^{(x+1)-1}e^{-u}du=\int_0^{\infty}u^xe^{-u}du=\lim_{p\to+\infty}\int_0^p u^xe^{-u}du$, integrando por partes

$$\begin{cases} w=u^x \\ dv=e^{-u}du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dw=xu^{x-1}du \\ v=-e^{-u} \end{cases}$$

$$\Gamma(x+1)=\lim_{p\to+\infty}\left[-u^xe^{-u}\Big|_0^p+x\int_0^p u^{x-1}e^{-u}du\right]=0+x\lim_{p\to+\infty}\int_0^p u^{x-1}e^{-u}du$$

$$=x\int_0^{\infty}u^{x-1}e^{-u}du=x\Gamma(x) \qquad \therefore \quad \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

◈ ◈ ◈

2° $\Gamma(n+1)=n!$, $\forall\ n\in Z^+$

Demostración

Aplicando repetidas veces la propiedad 1.

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)$$

$$=n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=n(n-1)(n-2)\ldots3\cdot2\cdot1\cdot\Gamma(1)=n!$$

$$\therefore \quad \Gamma(n+1)=n!,\ \forall\ n\in Z^+$$

◈ ◈ ◈

OBSERVACIÓN.- $\Gamma(1)=\int_0^{\infty}u^{1-1}e^{-u}du=\int_0^{\infty}e^{-u}du=1 \quad \therefore \quad \Gamma(1)=1$

3° $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

La demostración de esta propiedad está en el libro de Transformada de Laplace en forma detallada.

Ejemplos de aplicación.-

① Demostrar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Solución

Por definición de la función Gamma se tiene: $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u}\,du$, de donde

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{2}-1} e^{-u}\,du = \int_0^{\infty} u^{-1/2} e^{-u}\,du$$

Sea $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

Para $x = 0,\ u = 0$ y cuando $x \to \infty,\ u \to \infty$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-1} e^{-x^2}\,2x\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

◈ ◈ ◈

② Calcular la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$

Solución

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} x^{\frac{3}{2}-1} e^{-x}\,dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

③ Calcular la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2}\,dx$

Solución

Por definición de la función Gamma. $\Gamma(x)=\int_0^{\infty} u^{x-1}e^{-u}du$

Sea $u=x^2 \Rightarrow x=u^{1/2} \Rightarrow dx=\frac{1}{2}u^{-1/2}du$

Para $x=0$, $u=0$, $x\to\infty$, $u\to\infty$, entonces

$$\int_0^{\infty} x^4e^{-x^2}dx=\int_0^{\infty}(x^2)^2e^{-x^2}dx=\int_0^{\infty}u^2e^{-u}\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}u^{\frac{3}{2}}e^{-u}du=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}u^{\frac{5}{2}-1}e^{-u}du$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{8}$$

$$\therefore \quad \int_0^{\infty} x^4e^{-x^2}dx=\frac{3\sqrt{\pi}}{8}$$

4. Calcular la integral $\int_0^{\infty} x^{\frac{3}{2}}e^{-9x}dx$

Solución

Sea $u=9x \Rightarrow x=\frac{u}{9} \Rightarrow dx=\frac{du}{9}$

Para $x=0$, $u\to 0, x\to\infty, u\to\infty$

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{3}{2}}e^{-9x}dx=\int_0^{\infty}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{27}e^{-u}\frac{du}{9}=\frac{1}{243}\int_0^{\infty}u^{\frac{5}{2}-1}e^{-u}du=\frac{1}{243}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{243}.\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{162}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{324} \qquad\qquad \therefore \quad \int_0^{\infty} x^{\frac{3}{2}}e^{-9x}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{324}$$

5. Calcular la integral $\int_0^{\infty}\sqrt{x}\,e^{-8x^3}dx$

Solución

Sea: $u=8x^3 \Rightarrow x=\frac{u^{\frac{1}{3}}}{2} \Rightarrow dx=\frac{u^{-\frac{2}{3}}}{6}du$

Para $x=0$, $u=0$ para $x\to\infty$, $u\to\infty$

$$\int_0^{\infty}\sqrt{x}\,e^{-8x^3}dx=\int_0^{\infty}\frac{u^{1/6}}{\sqrt{2}}e^{-u}\frac{u^{-2/3}}{6}du=\frac{1}{6\sqrt{2}}\int_0^{\infty}u^{-1/2}\,e^{-u}du=\frac{1}{6\sqrt{2}}\int_0^{\infty}u^{\frac{1}{2}-1}\,e^{-u}du$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{6\sqrt{2}}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \therefore \int_0^{\infty}\sqrt{x}\,e^{-8x^3}dx=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

6) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-3\ln x}}$

Solución

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-3\ln x}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$$

Sea $u=-\ln x \Rightarrow \ln x=-u \Rightarrow x=e^{-u} \Rightarrow dx=-e^{-u}du$

Para $x=0$, $u\to\infty$, $x=1$, $u=0$

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-3\ln x}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\infty}^{0}\frac{-e^{-u}du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\infty}u^{-1/2}\,e^{-u}du=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\infty}u^{\frac{1}{2}-1}\,e^{-u}du$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{\pi}{3}} \qquad \therefore \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-3\ln x}}=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

7) Calcular la integral $\displaystyle\int_0^{\infty}7^{-4x^2}dx$

Solución

$$7^{-4x^2}=e^{\ln 7^{-4x^2}}=e^{(-4\ln 7)x^2}=\frac{1}{2\sqrt{\ln 7}}e^{-u^2}, \quad u=2\sqrt{\ln 7}\,x$$

$$\int_0^{\infty} 7^{-4x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{(-4\ln 7)x^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{\ln 7}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\ln 7}}$$

OBSERVACIÓN.- En la definición de la función Gamma $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du$, haremos las siguientes sustituciones tenemos:

1°) Si se sustituye $t = e^{-u} \Rightarrow -dt = e^{-u} du$

$$t = e^{-u} \Rightarrow \ln t = -u \Rightarrow u = -\ln t = \ln\frac{1}{t}$$

Para $u = 0$, $t = 1$, $u \to \infty$, $t \to 0$.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du = \int_1^0 \left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{x-1} (-dt) = \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{x-1} dt = \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{x-1} du$$

es decir: $\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{x-1} du$, $x > 0$.

2°) Para $a > 0$, $u = t^a \Rightarrow du = at^{a-1} dt$

Para $u = 0$, $t = 0$, $u = 1$, $t = 1$

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{x-1} du = \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{t^a}\right)\right)^{x-1} at^{a-1} dt = \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)^a\right)^{x-1} a.t^{a-1} dt$$

$$= \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)^a\right)^{x-1} at^{a-1} dt = \int_0^1 a^{x-1} \left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{x-1} a.t^{a-1} dt = a^x \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{x-1} t^{a-1} dt, \; x>0$$

Ejemplos de aplicación.

(1) Calcular que: $\int_0^1 \left[\frac{\ln(\frac{1}{t})}{t}\right]^{\frac{1}{2}} dt$

<u>Solución</u>

$$\Gamma(x) = a^x \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{t}\right) \right)^{x-1} t^{a-1}\, dt$$

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left[\frac{\ln(\frac{1}{t})}{t}\right]^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 [\ln(\frac{1}{t})]^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 [\ln(\frac{1}{t})]^{\frac{3}{2}-1} t^{\frac{1}{2}-1} dt \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}, \quad a = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{\frac{1}{2}} t^{-1/2} dt - \int_0^1 \left[\frac{\ln(\frac{1}{t})}{t}\right]^{\frac{1}{2}} dt = (2)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 2\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi}$$

(2) Demostrar que $\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{t}{\ln(\frac{1}{t})}\right]^{\frac{1}{2}} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}$

<u>Solución</u>

$$\int_0^1 \left[\frac{t}{\ln(\frac{1}{t})}\right]^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 [\ln(\frac{1}{t})]^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 [\ln(\frac{1}{t})]^{\frac{1}{2}-1} t^{\frac{3}{2}-1} dt \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{3}{2}$$

como: $\displaystyle\Gamma(x) = a^x \int_0^1 [\ln(\frac{1}{t})]^{x-1} t^{a-1} dt \quad \Rightarrow \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^1 [\ln(\frac{1}{t})]^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} dt$

$\displaystyle\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^1 [\ln(\frac{1}{t})]^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} dt$, de donde tenemos:

$$\int_0^1 [\ln(\frac{1}{t})]^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} dt = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\pi} \qquad \therefore \quad \int_0^1 \left[\frac{t}{\ln(\frac{1}{t})}\right]^{\frac{1}{2}} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}$$

◊ ◊ ◊

4.6.1.2 EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Probar que $\displaystyle\int_0^\infty x^p e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right), \; p > -1$

Solución

Sea $z = x^2 \implies dz = 2x\,dx \implies dx = \dfrac{dz}{2x} = \dfrac{dz}{2z^{1/2}}$

Si $x = 0,\ z = 0$ y si $x \to \infty,\ z \to \infty$

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^2} dx = \int_0^\infty z^{p/2} e^{-z} \frac{z^{-1/2}}{2} dz = \frac{1}{2}\int_0^\infty z^{\frac{p-1}{2}} e^{-z} dz = \frac{1}{2}\int_0^\infty z^{\frac{p+1}{2}-1} e^{-z} dz = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty x^p e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)$$

❖ ❖ ❖

(2) Demostrar que: $\displaystyle\int_0^1 x^m (\ln x)^n\, dx = \frac{(-1)^n\, n!}{(m+1)^{n+1}}$, $n \in Z^+$, $m > -1$

Solución

Sea: $\ln x = -u \implies x = e^{-u} \implies dx = -e^{-u} du$

Si $x \to 0, \implies u \to \infty$; si $x \to 1 \implies u \to 0$

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n\, dx = \int_\infty^0 e^{-mu} (-u)^n (-e^u du) = \int_\infty^0 (-1)^n u^n e^{-(m+1)u} (-du)$$

Sea: $(m+1)u = z \implies du = \dfrac{dz}{m+1}$. Cuando $u = 0,\ z = 0,\ u \to \infty,\ z \to \infty$

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n\, dx = \int_\infty^0 (-1)^n u^n e^{-(m+1)u} (-du) = (-1)^n \int_\infty^0 u^n e^{-(m+1)u} (-du)$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty \left(\frac{z}{m+1}\right)^n e^{-z} \frac{dz}{m+1} = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^\infty z^n e^{-z} dz$$

$$= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^\infty z^{(n+1)-1} e^{-z} dz = \frac{(-1)^n\,\Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n\, n!}{(m+1)^{n+1}}$$

❖ ❖ ❖

(3) Calcular $\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n}\,dx$, $m, n, a > 0$

Solución

Hacemos $u = ax^n \Rightarrow x^n = \frac{u}{a} \Rightarrow x = \left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow dx = \frac{1}{n}\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}\frac{du}{a}$

Si $x = 0$, $u = 0$; $x \to \infty \Rightarrow u \to \infty$

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^2}\,dx = \int_0^{\infty}\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{m}{n}} e^{-u}.\frac{1}{an}\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1} du = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}\frac{1}{an}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}\int_0^{\infty} u^{\frac{m}{n}}.u^{\frac{1}{n}-1}.e^{-u}du$$

$$= \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\int_0^{\infty} u^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-u}du = \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

$$\therefore \quad \int_0^{\infty} x^m e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

(4) Demostrar que: $\Gamma(n) = 2\int_0^{\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}dx$

Solución

Por definición $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} u^{n-1}e^{-u}du$

$$2\int_0^{\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}dx = \int_0^{\infty} x^{2n-2}e^{-x^2}\,2x\,dx = \int_0^{\infty}(x^2)^{n-1}e^{-x^2}\,2x\,dx$$

Sea $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

Si $x = 0 \Rightarrow u \to 0$; si $x \to \infty$, $u \to \infty$

$$2\int_0^{\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}dx = \int_0^{\infty} u^{n-1}e^{-u}du = \Gamma(n) \qquad \therefore \quad \Gamma(n) = 2\int_0^{\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}dx$$

◆ ◆ ◆

4.6.2 DEFINICIÓN.- A la función $B: R^+ x R^+ \longrightarrow R$, definida por la integral

$$\boxed{B(m,n)=\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\,du}$$

donde $m>0,\ n>0$ se denomina función Beta.

4.6.2.1 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN BETA.-

(1) $B(m,n)=B(n,m)$

Demostración

Por definición de función Beta se tiene: $B(m,n)=\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\,du$

Sea: $z=1-u \Rightarrow dz=-du$, además cuando $\begin{cases} u=0, & z=1 \\ u=1, & z=0 \end{cases}$

$$B(m,n)=\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\,du=-\int_1^0 z^{n-1}(1-z)^{m-1}\,dz=\int_0^1 z^{n-1}(1-z)^{m-1}\,dz=B(n,m)$$

❖❖❖

(2) $B(n,m)=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

Demostración

La demostración en detalle de está propiedad se hace con transformada de Laplace y el teorema de Convolución y está desarrollado en mi libro de Transformada de Laplace.

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta=\frac{1}{2}B(n,m)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$

Demostración

De la propiedad (2) se tiene: $B(m,n)=\displaystyle\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\,du=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

Sea: $z=\cos^2\theta \Rightarrow dz=-2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta \Rightarrow \text{sen}\,\theta\cos\theta\;d\theta=-\dfrac{dz}{2}$

Cuando $\theta=0, z=1;\ \theta=\dfrac{\pi}{2},\ z=0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}^{2m-2}\theta\cos^{2n-2}\theta.\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)^{m-1}(\cos^2\theta)^{n-1}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_1^0(1-z)^{m-1}z^{n-1}dz=\frac{1}{2}\int_0^1(1-z)^{m-1}z^{n-1}dz$$

$$=\frac{1}{2}B(n,m)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$$

❖ ❖ ❖

4.6.2.2 EJEMPLOS APLICATIVOS.-

Calcular las siguientes integrales

① $\displaystyle\int_0^1 x^5(1-x)^8\,dx$

Solución

$$\int_0^1 x^5(1-x)^8\,dx=\int_0^1 x^{6-1}(1-x)^{9-1}\,dx=B(6,9)$$

$$=\frac{\Gamma(6)\Gamma(9)}{\Gamma(6+9)}=\frac{\Gamma(6)\Gamma(9)}{\Gamma(15)}=\frac{5!\,8!}{14!}=\frac{5!\,8!}{8!\,9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14}$$

$$=\frac{1}{9\cdot11\cdot13\cdot14}=\frac{1}{18018}\qquad\qquad \therefore\ \int_0^1 x^5(1-x)^8\,dx=\frac{1}{18018}$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^8 x\,dx$

Solución

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^8\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B(m,n)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m-1=8 \quad\Rightarrow\quad m=\dfrac{9}{2} \\ 2n-1=0 \quad\Rightarrow\quad n=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^8 x\,dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma(5)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{4!} = \frac{105}{768}\pi \qquad \therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^8 x\,dx = \frac{105}{768}\pi$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^6\theta\cos^6\theta\,d\theta$

Solución

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B(m,n) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 2m-1=6 \quad\Rightarrow\quad m=\dfrac{7}{2} \\ 2n-1=6 \quad\Rightarrow\quad n=\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^6\theta\cos^6\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi}{6!}$$

$$= \frac{225}{32}\cdot\frac{\pi}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = \frac{45\pi}{32\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = \frac{15\pi}{32\cdot8} = \frac{15\pi}{256}$$

④ Calcular la integral $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$

Solución

Como $B(m,n)=\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\,du$. Sea: $z=x^3 \Rightarrow x=z^{1/3} \Rightarrow dx=\frac{z^{-2/3}}{3}dz$

Para $x=0,\ z=0;$ para $x=1,\ z=1$

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=\int_0^1 (1-x^3)^{-\frac{1}{2}}dx=\int_0^1 (1-z)^{-\frac{1}{2}}\frac{z^{-\frac{2}{3}}}{3}dz=\frac{1}{3}\int_0^1 z^{-\frac{2}{3}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 z^{\frac{1}{3}-1}(1-z)^{\frac{1}{2}-1}dz=\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}$$

$$\therefore\quad I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}$$

⑤ Calcular la integral $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

Solución

Sea: $z=x^4 \Rightarrow x=z^{1/4} \Rightarrow x=\frac{1}{4}z^{-3/4}dz$

Para $x=0,\ z=0;$ para $x=1,\ z=1$

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\int_0^1 (1-x^4)^{-\frac{1}{2}}dx=\int_0^1 (1-z)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{4}z^{-\frac{3}{4}}dz=\frac{1}{4}\int_0^1 z^{-\frac{3}{4}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\qquad \therefore\ I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

(6) Calcular la integral $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[4]{x}}}$

<u>Solución</u>

Sea: $z=\sqrt[4]{x}\ \Rightarrow\ x=z^4\ \Rightarrow\ dx=4z^3dz$

Para $x=0$, $z=0$ y para $x=1$, $z=1$

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[4]{x}}}=\int_0^1(1-\sqrt[4]{x})^{-\frac{1}{2}}dx=\int_0^1(1-z)^{-\frac{1}{2}}4z^3dz=4\int_0^1 z^3(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 z^{4-1}(1-z)^{\frac{1}{2}-1}dz=4B\left(4,\frac{1}{2}\right)=4\frac{\Gamma(4)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(4+\frac{1}{2}\right)}\qquad \ldots (1)$$

$$\Gamma\left(4+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{105}{16}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\qquad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[4]{x}}}=4\frac{\Gamma(4)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{105}{16}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{64}{105}\Gamma(4)=\frac{64(6)}{105}=\frac{64(2)}{35}=\frac{128}{35}$$

(7) Calcular la integral $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^5 x}}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx$

<u>Solución</u>

Sea: $z=\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow dz = 2\operatorname{sen} x\cos x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}}$

Para $x=0,\ z=0,\ \ x=\frac{\pi}{2},\ z=1$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^5 x}}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{(\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{5}{2}}}}{\sqrt[5]{(\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{5}{6}}dx}{(1-\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{3}{10}}}$$

$$=\int_0^1\frac{z^{\frac{5}{6}}}{(1-z)^{\frac{3}{10}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^5 x}}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 z^{\frac{1}{3}}(1-z)^{-\frac{4}{5}}dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 z^{\frac{4}{3}-1}(1-z)^{\frac{1}{5}-1}dz=\frac{1}{2}B\left(\frac{4}{3},\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{5}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{23}{15}\right)}$$

(8) Calcular la integral $I=\int_0^a x^5\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

Solución

Sea: $x=a\operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx=a\cos\theta\,d\theta$

Para $x=0,\ \theta=0$, para $x=a,\ \ \theta=\frac{\pi}{2}$

$$I=\int_0^a x^5\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^5\operatorname{sen}^5\theta\sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta}\cdot a\cos\theta\,d\theta$$

$$=a^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^5\theta\cdot\cos^2\theta\,d\theta=a^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2(3)-1}\theta\cdot\cos^{2\left(\frac{3}{2}\right)-1}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{a^7}{2} B\left(3, \frac{3}{2}\right) = \frac{a^7}{2} \cdot \frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(3+\frac{3}{2}\right)} = \frac{a^7}{2} \cdot \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{a^7\sqrt{\pi}}{2.\frac{7}{2}.\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{8a^7}{105} \qquad \therefore \quad I = \int_0^a x^5 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{8a^7}{105}$$

4.6.3 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Mostrar que $\int_0^{\infty} x^3 e^{-2x^2} dx = \frac{1}{8}$

(2) Mostrar que $\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}}$

(3) Mostrar que $\int_0^{\infty} e^{-3x} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\sqrt{3\pi}}{36}$

(4) Calcular $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x}} dx$ Rpta. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

(5) Calcular $\int_0^{\infty} e^{-x^3} dx$ Rpta. $\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$

(6) Calcular $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt[3]{x}} dx$ Rpta. 6

(7) Calcular $\int_0^{\infty} x^6 e^{-3x} dx$ Rpta. $\frac{80}{243}$

(8) Calcular $\int_0^{\infty} (x+1)^2 e^{-x^3} dx$ Rpta. $\frac{1}{3} + \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) + \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)$

9) Verificar que $\int_1^{\infty} \frac{(t-1)^p}{t^2} dt = \Gamma(1+p)\Gamma(1-p)$, $|p|<1$

10) Calcular $\int_0^{\infty} t^a (1+t)^b \, dt$ Rpta. $\frac{2\Gamma(a+1)\Gamma(-b-a-1)}{\Gamma(-b)}$

11) Calcular $\int_0^1 (\ln x)^4 \, dx$ Rpta. 24

12) Calcular $\int_0^1 (x \ln x)^3 \, dx$ Rpta. $-\frac{3}{128}$

13) Calcular $\int_0^1 (\ln x)^n \, dx$, $n \in Z^+$ Rpta. $(-1)^n n!$

14) Calcular $\int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{1/2} dx$ Rpta. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

15) Calcular $\int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1/2} dx$ Rpta. $\sqrt{\pi}$

16) Calcular $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x \ln\left(\frac{1}{x}\right)}}$ Rpta. $\sqrt{2\pi}$

17) Calcular $\int_0^1 \left(\frac{x}{\ln x}\right)^{1/3} dx$ Rpta. $-\frac{3\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{4}$

(18) Calcular $2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2p)$

(19) Probar que $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$, $n\in Z^+$

(20) Demostrar que $\int_0^{\infty}\frac{x^2\,dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

(21) Demostrar que $\int_0^{2}x(8-x^3)^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{16\sqrt{3}}{27}\pi$

(22) Calcular $\int_0^1\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{1-x^q}}$, $q>0$, $\frac{p}{q}>0$ y deducir el valor de $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

(23) Calcular $\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx$ **Rpta.** $-\pi\operatorname{cosec}(p\pi).\operatorname{ctg}(p\pi)$

(24) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\operatorname{tg}x}\,dx$ **Rpta.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(25) Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_0^1\sqrt{1-x^4}\,dx$ **Rpta.** $\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{6\sqrt{2\pi}}$

b) $\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$ **Rpta.** $\frac{\pi}{2}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[3]{\operatorname{sen}2x}\,dx$ **Rpta.** $\frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}$

(26) Calcular las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^6}\,dx$ Rpta. $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$

b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ Rpta. $\dfrac{\pi}{8}$

c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ Rpta. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{12}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^9}{1+x^{14}}\,dx$ Rpta. $\dfrac{\pi}{14\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{7}}$

(27) Calcular $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}}$ Rpta. $\dfrac{1}{12}B\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}{12\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$

(28) Calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^6 e^{-3x}\,dx+\int_0^{1}\frac{x^3\,dx}{(\ln x)^{2/3}}$ Rpta. $\dfrac{80}{243}+\dfrac{11!\cdot 12!}{24!}$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{4}}\,dx}{x+x^4}$ Rpta. $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{2}}$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ Rpta. $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x}}{ae^{3x}+b}\,dx$, a > 0, b > 0 Rpta. $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}a^{2/3}b^{1/3}}$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^4\theta + \operatorname{tg}^2\theta\, d\theta}{(1+\operatorname{tg}\theta)^4}$ Rpta. $B(3,1)=\frac{1}{3}$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x}dx}{(e^{3x}+1)^2}$ Rpta. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$

(29) Evaluar $\displaystyle\int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{(x-3)(7-z)}} + \int_0^1 \frac{x^3dx}{(\ln x)^{2/3}}$ Rpta. $\pi + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$

(30) Evaluar $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{(x^2+1)(x+1)^2}$ Rpta. $\dfrac{\pi}{4\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}} - \dfrac{2\pi}{5\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}}$

(31) Demostrar que para todo $m>0$ y $n>0$: $B(m+1,n)+B(m,n+1)=B(m,n)$

(32) Probar que $B(m,1)=\frac{1}{m}$, $m>0$

(33) Probar que $B(m+1,n)=\dfrac{m}{m+n}B(m,n)$, $m>0$, $n>0$.

(34) Demostrar que: $\displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^{n-1}dx = \frac{1}{r}B\left(\frac{m}{r},n\right)$, $m>0$, $n>0$, $r>0$.

(35) Si $m,n=1,2,3,\ldots$, probar que: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{m+k+1}=\frac{m!.n!}{(m+n+1)!}$

(36) Si $m>-\frac{1}{2}$, Demostrar que: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2m}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(m+1)}$

(37) Si $n>0$, Demostrar que: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}$

(38) Si $m > -1$, $n > -1$ y $b > a$. Demostrar que:

$$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n \, dx = (b-a)^{m+n+1} B(m+1, n+1)$$

(39) a) Si $0 < p < 1$, probar que: $B(p, 1-p) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^{1/p}}$,

b) Si $n > 1$, probar que: $\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^n} = \dfrac{\pi}{n}\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{n}$

(40) Si $m > 0$, $n > 0$, probar que: $B(m,n) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$

4.7 INTEGRALES DEPENDIENTE DE UN PARÁMETRO.-

1° La expresión general de una integral dependiente de un parámetro es: $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dx$ que sea naturalmente una función del parámetro t.

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

2° Continuidad de $F(t)$

Si $f(x,t)$ es continua en el dominio cerrado $a \le x \le b$, $c \le t \le d$, entonces la función $F(t)$ es continua en el intervalo $c \le t \le d$

3° Derivación:

a) Caso en que los límites de integración no sean función del parámetro.

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_a^b \frac{d(f(x,t))}{dt}\,dx$$

b) Caso en que los límites de integración sean función del parámetro $a=\varphi(t)$, $b=\psi(t)$

$$\frac{dF(t)}{dt}=\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)}\frac{d\,f(x,t)}{dt}dx+f(\psi(t),t)\frac{d\psi(t)}{dt}-f(\varphi(t),t)\frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Si solamente fuera uno de los límites función del parámetro, será nulo el término correspondiente a la derivada del otro límite.

Los pasos necesarios para resolver algunas integrales por derivación respecto al parámetro.

i) Derivar respecto al parámetro y calcular el valor de la integral a la que da origen dicha derivada.

ii) Resolver la ecuación diferencial formada por la derivada respecto al parámetro y el resultado de la parte (i) (calcular el valor de la constante).

iii) Dar al parámetro el valor adecuado para calcular el valor de la integral que nos piden.

Ejemplo de Aplicación-

1. Calcular por derivación respecto al parámetro la integral: $F(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{dx}{e^{x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}}}$

Solución

Derivando respecto al parámetro (α) y calculamos el valor de esta derivada.

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}=\int_0^{\infty}\frac{d}{d\alpha}\left(e^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}\right)dx=\int_0^{\infty}-\frac{2\alpha}{x^2}e^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}dx\text{, calculando la integral}$$

Sea $z=\frac{\alpha}{x} \Rightarrow x=\frac{\alpha}{z} \Rightarrow dx=-\frac{\alpha}{z^2}dz$. Para $x=0$, $z\to\infty$; $x\to\infty$, $z=0$

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}=\int_0^{\infty}-\frac{2\alpha}{x^2}e^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}dx=\int_{\infty}^{0}-\frac{2z^2}{\alpha}e^{-\left(\frac{\alpha^2}{z^2}+z^2\right)}\left(-\frac{\alpha}{z^2}\right)dz$$

$$=-2\int_0^{\infty}e^{-\left(\frac{\alpha^2}{z^2}+z^2\right)}dz=-2F(\alpha)$$, puesto que es la misma integral que nos piden.

Luego tenemos: $\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}=-2F(\alpha)$ y ahora resolvemos esta ecuación diferencial

$\frac{dF(\alpha)}{F(\alpha)}=-2d\alpha$, integrando tenemos $\int\frac{dF(\alpha)}{F(\alpha)}=-2\int d\alpha \Rightarrow \ln F(\alpha)=-2\alpha+\ln c$

$$\ln\frac{F(\alpha)}{c}=-2\alpha \Rightarrow \frac{F(\alpha)}{c}=e^{-2\alpha} \Rightarrow F(\alpha)=ce^{-2\alpha} \qquad \ldots (1)$$

ahora calculamos el valor de la constante de integración c por la cual damos un valor apropiado a α que nos facilite el cálculo de la integral que nos dan, para nuestro caso identificamos el valor de α, es decir $\alpha=0$ y tenemos $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (ver función Gamma)

$$F(0)=c=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow c=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ahora damos el valor adecuado para obtener la integral que nos piden, para nuestro caso $\alpha=\alpha$.

$$F(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{1}{e^{x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\alpha} \qquad \therefore \quad F(\alpha)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\alpha}$$

(2) Calcular por derivación paramétrica el valor de $F(n)=\int_0^1\frac{x^n-1}{\ln x}dx$

Solución

Derivando respecto al parámetro (n) y calculando el valor de la integral.

$$\frac{dF(n)}{dn}=\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{\ln x}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1=\frac{1}{n+1}$$

Luego $\frac{dF(n)}{dn}=\frac{1}{n+1}$, resolviendo esta ecuación diferencial

$$\int dF(n)=\int \frac{dn}{n+1}, \text{ de donde: } F(n)=\ln(n+1)+c$$

$$F(n)=\ln(n+1)+\ln k=\ln k(n+1)$$

Haciendo $n = 0$ sacamos el valor de k, luego la integral que nos dan se hace cero para este valor de n.

Luego $F(0)=\ln k=0 \Rightarrow k=1$ por lo tanto $F(n)=\ln(n+1)$

3. Partiendo de $F(a)=\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$, calcular por derivación respecto al parámetro el valor de $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$

Solución

$F(a)=\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$, derivando respecto al parámetro

$$\frac{dF(a)}{da}=\int_0^\infty -xe^{-ax}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx=-\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen} x\,dx \qquad \textbf{... (1)}$$

calculando la integral por integración por partes.

$$\begin{cases} u=e^{-ax} \\ dv=\operatorname{sen} x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=-ae^{ax}dx \\ v=-\cos x \end{cases}$$

$$\int e^{-ax}\operatorname{sen} x\,dx = -e^{-ax}\cos x - a\int e^{-ax}\cos x\,dx$$

$$\begin{cases} u = e^{-ax} \\ dv = \cos x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -ae^{-ax}\,dx \\ v = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$\int e^{-ax}\operatorname{sen} x\,dx = -e^{-ax}\cos x - a(e^{-ax}\operatorname{sen} x + a\int e^{-ax}\operatorname{sen} x\,dx)$$

$$(1+a^2)\int e^{-ax}\operatorname{sen} x\,dx = -e^{-ax}(\cos x + a\operatorname{sen} x)$$

$$\int e^{-ax}\operatorname{sen} x\,dx = -\frac{e^{-ax}(\cos x + a\operatorname{sen} x)}{1+a^2} \qquad \ldots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\frac{dF(a)}{da} = \frac{e^{-ax}(\cos x + a\operatorname{sen} x)}{1+a^2}\Bigg|_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{a^2+1}, \text{ integrando}$$

$$F(a) = \int -\frac{da}{a^2+1} = -\operatorname{arctg} a + k$$

Para calcular el valor de k hacemos a = ∞, la integral de partida es nula es decir:

$$F(0) = -\operatorname{arctg}(\infty) + k = -\frac{\pi}{2} + k = 0 \Rightarrow k = \frac{\pi}{2}$$

por lo tanto $F(a) = -\operatorname{arctg}(\infty) + k = -\frac{\pi}{2} + k = 0 \Rightarrow k = \frac{\pi}{2}$

haciendo $a = 0$, la integral de partida nos da la integral partida $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

4) Calcular $I_1(a,b)=\int_0^{\pi}\frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x)^2}$, basándose en la integral

$$I_2(a,b)=\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x}$$

Solución

Derivando I_2 respecto al parámetro a

$$\frac{\partial I_2(a,b)}{\partial a}=\int_0^{\pi}\frac{-2a\cos^2 x\,dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x)^2}=-2aI_1(a) \quad \ldots (1)$$

ahora calculamos la integral $I_2(a,b)$

$$I_2(a,b)=\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{\sec^2 x\,dx}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{\sec^2 x\,dx}{a^2+(b\operatorname{tg} x)^2}$$

$$=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{ab}$$

Derivando respecto a tenemos: $\frac{\partial I_2(a,b)}{\partial a}=\frac{\pi}{a^2 b}$ ... (2)

reemplazando (2) en (1) se tiene: $-\frac{\pi}{a^2 b}=-2aI_1(a) \Rightarrow I_1(a,b)=\frac{\pi}{2a^3 b}$

5) Calcular $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x(1+x^2)}$

Solución

Introduciendo el parámetro λ

Sea: $F(\lambda)=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(\lambda x)}{x(1+x^2)}dx$, derivando respecto al parámetro λ

$$F'(\lambda)=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+\lambda^2x^2)}=\int_0^{\infty}\left(\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{Cx+D}{1+\lambda^2x^2}\right)dx \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+\lambda^2x^2)}=\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{Cx+D}{1+\lambda^2x^2}=\frac{(Ax+B)(1+\lambda^2x^2)+(Cx+D)(1+x^2)}{(1+x^2)(1+\lambda^2x^2)}$$

$$1=A(\lambda^2x^3+x)+B(\lambda^2x^2+1)+C(x^3+x)+D(x^2+1)$$

$$1=(\lambda^2A+C)x^3+(B\lambda^2+D)x^2+(A+C)x+B+D$$

$$\begin{cases}\lambda^2A+C=0\\ B\lambda^2+D=0\\ A+C=0\\ B+D=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0 \quad ; \quad B=\dfrac{1}{1-\lambda^2}\\ C=0 \quad ; \quad D=-\dfrac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\end{cases}$$

$$F'(\lambda)=\frac{1}{1-\lambda^2}\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}-\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+\lambda^2x^2}=\frac{1}{1-\lambda^2}\operatorname{arctg}x\Big|_0^{\infty}-\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\operatorname{arctg}\lambda x\Big|_0^{\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1-\lambda^2}-\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda^2}\right)=\frac{\pi}{2(1+\lambda)}$$

$F'(\lambda)=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\lambda} \;\Rightarrow\; dF(\lambda)=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{d\lambda}{1+\lambda}$, integrando $F(\lambda)=\dfrac{\pi}{2}\ln(1+\lambda)+c$

para calcular el valor de la constante hacemos $\lambda=0 \Rightarrow F(0)=\dfrac{\pi}{2}\ln 1+c=0 \Rightarrow c=0$

Luego $F(\lambda)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\lambda x\,dx}{x(1+x^2)}=\frac{\pi}{2}\ln(1+\lambda)$

para $\lambda=1 \Rightarrow F(1)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x(1+x^2)}dx=\frac{\pi}{2}\ln 2$ $\quad\therefore \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x(1+x^2)}dx=\frac{\pi}{2}\ln 2$

6. Calcular el valor de $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

Solución

Introduciendo el parámetro λ: $F(\lambda)=\int_0^{\lambda}\frac{\ln(1+\lambda x)}{1+x^2}dx$, derivando respecto a λ.

$$F'(\lambda)=\int_0^{\lambda}\frac{x\,dx}{(1+x^2)(1+\lambda x)}+\frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}\quad \text{(por el teorema de Calculo)}$$

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+\lambda x)}=\frac{A}{1+\lambda x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}=\frac{A(1+x^2)+(Bx+C)(1+\lambda x)}{(1+\lambda x)(1+x^2)}$$

$$x=A(x^2+1)+B(\lambda x^2+x)+C(\lambda x+1)\quad\Rightarrow\quad x=(A+\lambda B)^2+(B+\lambda c)x+A+C$$

$$\begin{cases} A+3B=0\\ B+\lambda C=1\\ A+C=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \left\{A=-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right.\;;\quad B=\frac{1}{1+\lambda^2}\;;\quad C=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

$$F'(\lambda)=\frac{1}{1+\lambda^2}\left[\int_0^{\lambda}\frac{-\lambda\,dx}{1+\lambda x}-\int_0^{\lambda}\frac{x+\lambda}{1+x^2}dx\right]+\frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}$$

$$F'(\lambda)=\frac{1}{1+\lambda^2}\left[-\ln(1+\lambda x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\lambda\operatorname{arctg}x\right]\Bigg|_0^{\lambda}+\frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}$$

$$F'(\lambda)=\frac{1}{1+\lambda^2}\left[-\ln(1+\lambda^2)+\frac{1}{2}\ln(1+\lambda^2)+\lambda\operatorname{arctg}\lambda\right]+\frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}$$

$$F'(\lambda)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}+\frac{\lambda\operatorname{arctg}\lambda}{1+\lambda^2};\quad \text{integrando:}$$

$$F(\lambda)=\int\left[\frac{1}{2}.\frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}+\frac{\lambda\operatorname{arctg}\lambda}{1+\lambda^2}\right]d\lambda+k\quad\Rightarrow\quad F(\lambda)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\lambda.\ln(1+\lambda^2)+k$$

para calcular k hacemos $\lambda=0$ entonces $F(0)=0=0+k\Rightarrow k=0$

Luego la integral que nos queda es:

$$F(1)=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\text{arctg}\,1\cdot\ln(2)=\frac{\pi\ln 2}{8}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\ln 2}{8}\pi$$

4.7.1 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1. Calcular por derivación respecto al parámetro el valor de $\int_0^1 \frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{\ln x}dx$

   Rpta. $\ln\left(\frac{m}{n}\right)$

2. Obtener por derivación respecto al parámetro $I=\int_0^1 x^{\alpha}(\ln x)^n dx$, para n entero y $\alpha>1$ **Rpta.** $I=(-1)^n n!(\alpha+1)^{-n-1}$

3. Integrar por derivación respecto el parámetro $\int_0^t \ln(1+\text{tg}\,t\cdot\text{tg}\,x)dx$

   Rpta. $-t\ln\cos t$

4. Utilizando el método de derivación respecto al parámetro. Calcular $\int_0^{\pi}\ln(10-6\cos x)dx$ **Rpta.** $\pi\ln 9$

5. Sabiendo que $F(\beta)=\int_0^{\pi}\beta\,\text{sen}(\beta x)dx$, calcular el valor de $I=\int_0^{\pi}(x^2\,\text{sen}\,3x+x^3\cos 3x)dx$ **Rpta.** $I=0$

6. Calcular el valor de $\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}\,\theta\arccos\left(\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\theta}\right)d\theta$ **Rpta.** $-\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\frac{\pi}{2}$

(7) Calcular el valor de $I(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{senh}x\,dx}{(\cosh x+\cos\alpha.\operatorname{senh}x)^2}$, $0<x<\pi$

Rpta. $I(\alpha)=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\left[1+\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\frac{\pi}{\operatorname{tg}\alpha}\right]$

(8) Calcular el valor de $I(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\alpha\operatorname{sen}^2x)\frac{dx}{\operatorname{sen}^2x}$

Rpta. $I(\alpha)=2\sqrt{1+\alpha}\operatorname{arctg}\sqrt{1+\alpha}+\ln\left(\frac{2}{\alpha+2}\right)-\frac{\pi}{2}$

(9) Calcular el valor de $I(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\alpha\operatorname{sen}^2x)\frac{dx}{\operatorname{sen}^2x}$ Rpta. $I(\alpha)=\pi\sqrt{\alpha\pi}-1$

(10) Calcular el valor de la integral $\int_0^{\pi}\ln(1+\cos x)\,dx$ Rpta. $\pi-\frac{\pi^2}{2}$

(11) Calcular el valor de la integral $\int_0^{1}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x}dx$

4.8 EL POLINOMIO DE TAYLOR.-

4.8.1 APROXIMACIÓN DE FUNCIONES POR POLINOMIOS.-

Los polinomios son las funciones más sencillas que se estudian en análisis, debido a que son adecuadas para trabajar en cálculos numéricos, pues sus valores se pueden obtener efectuando un número finito de multiplicación y adiciones.

Las funciones logarítmicas, exponenciales, trigonométrica se pueden aproximar por polinomios.

Existen muchas maneras de aproximar una función dada f por polinomios, esto significa que se comporta casi igual que la función en un punto.

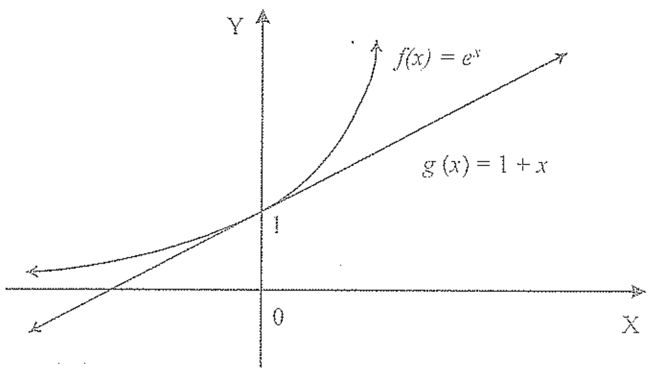
Si el error cometido en la aproximación es pequeña entonces podemos calcular con el polinomio en lugar de hacer con la función original.

Nuestro interés es de obtener un polinomio que coincide con f y algunas de sus derivadas en un punto dado.

Ilustraremos todo esto mediante el siguiente ejemplo.

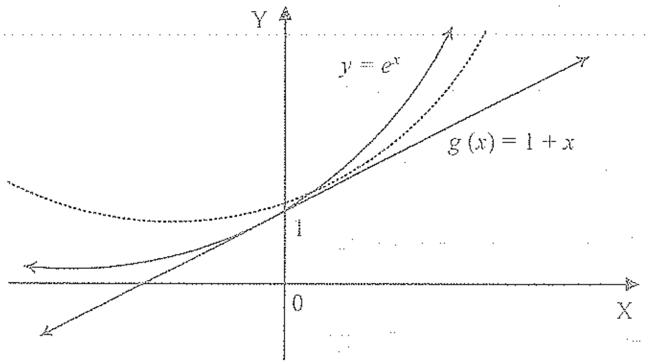
Supongamos que la función exponencial $f(x)=e^x$ en el punto $x=0$, la función f y todas sus derivadas valen 1 y el polinomio de primer grado $g(x)=1+x$, también tiene $g(0)=1$.

También tiene $g(0)=1$ y $g'(0)=1$, de manera que coincidan con f y su primera derivadas en cero, geométricamente quiere decir que la gráfica de g es la recta tangente a f en el punto $(0,1)$.



Si se aproxima f por un polinomio de segundo grado Q que coincide con f y sus dos primeras derivadas en cero se obtiene una mejor aproximación de f que con la función g por lo menos en las proximidades de $(0,1)$.

El polinomio $Q(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}$



Tiene $Q(0)=Q'(0)=1$ y $Q''(0)=f''(0)=1$, la gráfica de Q aproxima a la curva $f(x)=e^x$ mejor que la recta $q(x)=1+x$; se puede mejorar la aproximación utilizando polinomios que coincidan con f y sus derivadas terceras y de orden superior.

Es fácil comprobar que el polinomio. $$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

coincide con la función exponencial y sus primeras derivadas en el punto $x = 0$.

4.8.2 POLINOMIOS DE TAYLOR ENGENDRADO POR UNA FUNCIÓN.-

TEOREMA 1.- Sea f una función con derivada de orden n ($n \geq 1$) en el punto $x = 0$, existe un polinomio P y uno solo de grado $\leq n$ que satisface las $n + 1$ condiciones.

$$P(0)=f(0),\quad P'(0)=f'(0),\ \ldots,\ P^{(n)}(0)=f^{(n)}(0) \qquad \ldots (1)$$

Tal polinomio viene dado por la fórmula. $$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} \qquad \ldots (2)$$

Demostración

Sea $P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n$, el polinomio que se desea obtener en el que los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ deben determinarse usando las condiciones (2).

$$P(0)=c_0=f(0) \quad \Rightarrow \quad c_0=f(0)$$

$$P'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots+nc_nx^{n-1}$$

$$P'(0)=c_1=f'(0) \quad \Rightarrow \quad c_1=f'(0)$$

$$P''(x)=2c_2+2\cdot 3c_3x+\ldots+n(n-1)c_nx^{n-2}$$

$$P''(0)=2c_2=f''(0) \quad \Rightarrow \quad c_2=\frac{f''(0)}{2!}$$

$$P'''(x)=2\cdot 3c_3\ldots+n(n-1)(n-2)cx^{n-3}$$

$$P'''(0)=2\cdot 3c_3=f'''(0) \quad \Rightarrow \quad c_3=\frac{f'''(0)}{3!}$$

.

.

.

$$P^{(k)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n-1)\ldots(n-k)c_nx^{n-k}$$

$$P^{(k)}(0)=1\cdot 2\cdot 3\ldots k\cdot c_k=f^{(k)}(0)\Rightarrow c_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^4=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

$$\therefore \quad P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$$

◆ ◆ ◆

OBSERVACIÓN.-

1) El grado de P es $n \Leftrightarrow f^{(n)}(x)\neq 0$.

2) P coincide con f y sus n primeras derivadas en $x=0$.

3) En la misma forma se puede demostrar que existe un polinomio y uno solo de grado $\leq n$ que coincide con f y sus n primeras derivadas en el punto $x=a$.

Se escribe el polinomio P en forma ordenadas según las potencias de $x-a$ y se procede como antes. Calcular las derivadas en $x=a$ y se llega al polinomio.

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad \dots (3)$$

que es el único de grado $\leq n$ que satisface las condiciones $P(a)=f(a)$, $P'(a)=f'(a)$, ... , $P^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)$.

El polinomio (3) se llama polinomio de Taylor de grado n generado por f en el punto a.

4) La notación $P=T_n f$ ó $T_n(f)$ indica la dependencia del polinomio de Taylor respecto de f y n.

5) El símbolo T_n se denomina operador de Taylor de grado n, cuando este operador se aplica a una función f, produce una nueva función $T_n f$ que es el polinomio de Taylor de grado n.

6) $T_n f(x,a)$, indica la dependencia respecto de a.

Cálculo con polinomio de Taylor.

Si la función tiene derivadas de orden n en un punto a, entonces siempre se puede formar su polinomio de Taylor $T_n f$ por medio de la fórmula.

$$T_n f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Ejemplo.- El polinomio de Taylor de grado n generado por la función exponencial $f(x)=e^x$ en $x=0$ es dado por la fórmula.

$$T_n f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\ ,\ \text{donde}\ f^{(k)}(x)=e^x\ \Rightarrow\ f^{(k)}(0)=1$$

$$T_n(e^x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

y el polinomio de Taylor de la función $f(x)=e^x$ en el punto $x=1$ es dado por:

$$T_n(e^x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k\ ,\ \text{donde}\ \ f^{(k)}(x)=e^x\ \Rightarrow\ \ f^{(k)}(1)=e$$

$$T_n(e^x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{e}{k!}(x-1)^k=e\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-1)^k}{k!}$$

algunas veces el cálculo de las derivadas $f^{(k)}(a)$ es muy laborioso, por tal motivo veremos otros métodos para determinar polinomios de Taylor.

TEOREMA 2.- El operador de Taylor T_n, tiene las siguientes propiedades.

i) **Linealidad.-** Si c_1 y c_2 son constantes.

$$T_n(c_1 f+c_2 g)=c_1 T_n(f)+c_2 T_n(f)$$

ii) **Derivación.-** La derivada de un polinomio de Taylor de *f* es un polinomio de Taylor de f' es decir se tiene:

$$(T_n f)'=T_{n-1}(f')$$

iii) **Integración.-** Una integral indefinida de un polinomio de Taylor de *f* es un polinomio de Taylor de una integral indefinida de *f*, es decir si:

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt\ ,\ \text{se tiene entonces: } T_{n-1}g(x)=\int_a^x T_n f(t)\,dt$$

TEOREMA 3.- *(Propiedad de Sustitución)*

Sea $g(x) = f(cx)$, siendo c una constante, se tiene entonces $T_n g(x,a) = T_n f(cx, ca)$

En particular, cuando $a = 0$, tenemos $T_n g(x) = T_n f(cx)$

Demostración

Como $g(x) = f(cx)$, por la regla de la cadena se tiene:

$g'(x) = cf'(cx)$

$g''(x) = c^2 f''(cx)$

$g'''(x) = c^3 f'''(cx)$

.
.
.

$g^{(k)}(x) = c^k f^{(k)}(cx)$

$$T_n g(x,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{c^k f^{(k)}(ca)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(ca)}{k!}(cx-ca)^k = T_n f(cx, ca)$$

❖ ❖ ❖

Ejemplo.- En el polinomio de Taylor correspondiente a la función $f(x) = e^x$ es decir: $T_n(e^x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, al sustituir x por $-x$ encontramos que: $T_n(e^{-x}) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$

Ejemplo.- El polinomio de Taylor correspondiente a la función $f(x)=\cosh x$ se obtiene utilizando la propiedad de Linealidad.

Como $\cosh x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$ se tiene:

$$T_{2n}(\cosh x)=\frac{1}{2}T_{2n}(e^{x})+\frac{1}{2}T_{2n}(e^{-x})=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Derivando se tiene: $T_{2n-1}(\operatorname{senh} x)=x+\frac{x^{3}}{3!}+...+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

TEOREMA 4.- Sea P_n un polinomio de grado $n\geq 1$, sean f y g dos funciones con derivadas de orden n en 0, y supongamos que:

$$f(x)=P_n(x)+x^{n}g(x) \qquad ...(\alpha)$$

en donde $g(x)\to 0$, cuando $x\to 0$. El polinomio P_n es el polinomio de Taylor generado por f en 0.

Demostración

Sea $h(x)=f(x)-P_n(x)=x^{n}g(x)$, derivando repetidamente el producto $x^{n}g(x)$, se observa que h y sus n primeras derivadas son 0 en $x=0$.

Por consiguiente, f coincide con P_n y sus n primeras derivadas en 0, de tal manera que $P_n=T_n f$

◈ ◈ ◈

Ejemplo.- De la identidad algebraica.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+...+x^{n}+\frac{x^{n+1}}{1-x},\quad \forall x\neq 1 \qquad ...(1)$$

La ecuación (α) se satisface con $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$; $P_n(x)=1+x+\ldots+x^n$ y $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$, puesto que $g(x) \to 0$, cuando $x \to 0$ y el teorema 4 nos dice que $T_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=1+x+x^2+\ldots+x^n$

Otro polinomio de Taylor se consigue integrando:

$$T_{n+1}\left(-\ln(1-x)\right)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Si en la ecuación (1) reemplazamos x por $-x^2$ se tiene :

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}-(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{1+x^2}$$

aplicando el teorema 4 encontramos que: $T_{2n}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}$

integrando esta relación llegamos a la fórmula: $T_{2n+1}(\operatorname{arctg} x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

4.8.3 FÓRMULA DE TAYLOR CON RESTO.-

DEFINICIÓN.- El error se define $E_n(x)=f(x)-T_nf(x)$. Luego si f tiene derivadas de orden n en a, se puede escribir:

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+E_n(x)} \qquad \ldots (\mathrm{I})$$

la ecuación (I) se denomina Fórmula de Taylor con resto en $E_n(x)$

La fórmula de Taylor es útil cuando podemos estimar la magnitud de $E_n(x)$.

TEOREMA 5.- Supongamos que f tiene derivadas segunda f'' continua en cierto entorno de a. Entonces, para todo x en ese entorno se tiene:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+E_1(x) \text{ en donde } E_1(x)=\int_a^x (x-t)f''(t)\,dt$$

Demostración

De la definición del error podemos escribir

$$E_1(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)=\int_a^x f'(t)\,dt-f'(a)\int_a^x dt=\int_a^x \left[f'(t)-f'(a)\right]dt$$

la última integral puede ponerse en la forma $\int_a^x u\,dv$, donde $u=f'(t)-f'(a)$ y $v=t-x$, así mismo $\frac{du}{dt}=f''(t)$ y $\frac{dv}{dt}=1$, de donde la fórmula de integración por partes nos da.

$$E_1(x)=\int_a^x u\,dv=uv\Big|_a^x-\int_a^x (t-x)f''(t)\,dt=\int_a^x (x-t)f''(t)\,dt$$

puesto que $u=0$, cuando $t=a$ y $v=0$, cuando $t=x$ con lo cual queda demostrado el teorema.

❖ ❖ ❖

TEOREMA 6.- Supongamos que f tenga derivada continua de orden $n+1$ en cierto intervalo que contenga a. Entonces, para todo x en este intervalo, tenemos la fórmula de Taylor.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+E_n(x)$$

Siendo $E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

Demostración

La demostración se hace por inducción respecto a n. ya se ha hecho para $n = 1$, supongamos que se cumple para un cierto n, luego se debe demostrar para $n + 1$, escribiendo la fórmula de Taylor para $n + 1$ y n y luego restando.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+E_{n+1}(x)$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+E_{n}(x)$$

$$E_{n+1}(x)=E_n(x)-\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Como $E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$ y observando que $\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}=\int_a^x (t-a)^n\,dt$ se tiene:

$$E_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt-\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt$$

$$=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n\left[f^{(n+1)}(t)-f^{(n+1)}(a)\right]dt$$

La última integral puede escribirse en la forma $\int_a^x u\,dv$, donde $u=f^{(n+1)}(t)-f^{(n+1)}(a)$ y $v=-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$ de donde integrando por partes y teniendo en cuenta que $u=0$, cuando $t=a$ y que $v=0$ cuando $t=x$ encontramos que:

$$E_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x u\,dv=-\frac{1}{n!}\int_a^x v\,du=\frac{1}{(n+1)!}\int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

esto completa el paso inductivo de n a $n + 1$, con lo cual queda demostrado el teorema.

❖ ❖ ❖

TEOREMA 7.- Si la derivada de f de orden $n+1$ satisface las desigualdades

$$m \le f^{(n+1)}(t) \le M \qquad \dots (\beta)$$

para todo t en un cierto intervalo que contenga a, entonces para todo x en este intervalo tenemos la siguiente estimación:

$$\frac{m(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \le E_n(x) \le \frac{M(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{si } x > a$$

$$\frac{m(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \le (-1)^{n+1} E_n(x) \le \frac{\text{M}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{si } x < a$$

<u>**Demostración**</u>

Supongamos que $x > a$, entonces la integral para $E_n(x)$ se extiende al intervalo $[a,x]$, $\forall\ t \in [a,x]$, tenemos $(x-t)^n \ge 0$ entonces a la desigualdad (β) se expresa:

$$\frac{m(x-t)^n}{n!} \le \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \le \frac{\text{M}(x-t)^n}{n!}$$

integrando de a hasta x, encontramos que:

$$\frac{m}{n!}\int_a^x (x-t)^n\, dt \le \int_a^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}\, dt \le \frac{M}{n!}\int_a^x (x-t)^n\, dt \qquad \dots (1)$$

sea $u = x - t \Rightarrow du = -dt$, de donde:

$$\int_a^x (x-t)^n\, dt = \int_0^{x-a} u^n du = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \qquad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene: $\dfrac{m}{n!}\dfrac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \le E_n(x) \le \dfrac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$

$$\therefore \quad \frac{m(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \le E_n(x) \le \frac{M(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Si $x < a$, la integración se efectúa en $[x, a]$, $\forall\, t \in [x, a]$.

Tenemos $t \geq x$, con lo que $(-1)^n (x-t)^n = (t-x)^n \geq 0$

A al desigualdad (β) lo multiplicamos $\dfrac{(-1)^n (x-t)^n}{n!}$

$\dfrac{m(t-x)^n}{n!} \leq \dfrac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leq \dfrac{M(t-x)^n}{n!}$, que es lo mismo:

$$\frac{m(-1)^n (x-t)^n}{n!} \leq \frac{(-1)^n (x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leq \frac{M(-1)^n (x-t)^n}{n!}$$

ahora integramos de x hasta a.

$$\int_x^a \frac{m(-1)^n (x-t)^n}{n!}\, dt \leq \int_x^a \frac{(-1)^n (x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \leq \int_a^x \frac{M(-1)^n (x-t)^n}{n!}\, dt$$

$$\therefore \quad \frac{m(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \leq (-1)^{n+1} E_n(x) \leq \frac{M(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

◈ ◈ ◈

4.8.4 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES.-

Si *f* es una función continua en $[a, b]$ para cierto $c \in [a, b]$, se tiene la integral de

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a).$$

4.8.5 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PONDERADO PARA INTEGRALES.-

Suponer que *f* y *g* son continuas en $[a, b]$. Si *g* no cambia nunca de signo en $[a, b]$, con $c \in [a, b]$, se tiene:

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$$

otras formas de la fórmula de Taylor con resto, explicando el T.V.M.P. para integrales tenemos:

$$\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n+1)}(c)\int_a^x (x-t)^n\,dt = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\ ,\quad c\in[a,x]$$

Luego el error se expresa:

$$E_n(x) = \frac{1}{n!(n+1)}f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\boxed{E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}$$. Forma de Lagrange del resto.

OBSERVACIONES

- $f^{(n+1)}(x)$ esta calculada en c desconocida y no en a, el punto c depende de x y n.

- Suponer que $f^{(n+1)}$, existe en (h,k) intervalo abierto que contiene al punto a y que $f^{(n)}$ es continua en $[h,k]$. Elegimos cualquier $x \neq$ a en $[h,k]$.

- Admitir que $x > a$. con fines de simplificación.

- Mantener x fijo y definimos una nueva función F en $[a,x]$ del siguiente modo:

$$F(x) = f(t) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

Observar que $F(x) = f(x)$, $F(a) = T_n f(x,a)$

Luego $F(x)-F(a) = E_n(x)$, F es continua en $[a,x]$ porque $f^{(n)}$ lo que, luego f es continua, $f^{(k)}$ es continua $(x-t)^k$ continua F es derivable en (a,x).

Al calcular $F'(t)$, tener en cuenta que cada término de la suma es un producto, al desarrollar la sumatoria se simplifica todos los términos excepto uno (el de la mayor derivada) y nos queda.

$$F'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)$$

Tomar G cualquier función continua en $[a,x]$ y derivable en $\langle a,x\rangle$.

Si $G'\neq 0$ en $\langle a,x\rangle$, entonces se tiene: $E_n(x)=\dfrac{F'(c)}{G'(c)}\left[G(x)-G(a)\right]$

Se puede expresar el error de varias maneras, mediante elecciones distintas de la función G, por ejemplo. $G(t)=(x-t)^{n+1}$, entonces:

$$E_n(x)=\frac{(x-c)^n}{n!}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)\left[(x-x)^{n+1}-(x-a)^{n+1}\right]}{G'(c)}$$

$$E_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},\quad a<c<x \text{ Fórmula de Lagrange.}$$

4.9. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

I. Encontrar el polinomio de Taylor de grado n para cada función f alrededor del valor dado de a.

(1) $f(x)=\ln(1+x),\ a=0$

Solución

$$P(x)=T_n f(x,0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(0)(x-a)^n}{k!} \text{ el polinomio de Taylor.}$$

$$\begin{cases} f(x)=\ln(1+x) \\ f'(x)=\dfrac{1}{1+x} \\ f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2} \\ f'''(x)=\dfrac{1\cdot 2}{(1+x)^3} \\ \vdots \\ f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \\ f''(0)=-1 \\ f'''(0)=1\cdot 2 \\ \vdots \\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)! \end{cases}$$

$$P(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

$$P(x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{1\cdot 2}{3!}x^3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n$$

$$P(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

(2) $f(x)=\ln(1+x),\ a=1$

Solución

$$\begin{cases} f(x)=\ln(1+x) \\ f'(x)=\dfrac{1}{1+x} \\ f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2} \\ f'''(x)=\dfrac{1\cdot 2}{(1+x)^3} \\ \vdots \\ f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=\ln 2 \\ f'(1)=\dfrac{1}{2} \\ f''(1)=-\dfrac{1}{2^2} \\ f'''(1)=\dfrac{1\cdot 2}{2^3} \\ \vdots \\ f^{(n)}(1)=\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{2^n} \end{cases}$$

$$P(x)=T_n(f(x,1))=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(1)(x-1)^n}{k!}$$

$$P(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)(x-1)^2}{2!}+\frac{f'''(1)(x-1)^3}{3!}+$$

$$+\frac{f^{iv}(1)(x-1)^4}{4!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(1)(x-1)^n}{n!}$$

$$P(x)=\ln 2+\frac{x-1}{2}-\frac{1}{2^2\cdot 2!}(x-1)^2+\frac{1\cdot 2}{2^3\cdot 3!}(x-1)^3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{2^n.n!}(x-1)^n$$

$$P(x)=\ln 2+\frac{x-1}{2}-\frac{1}{2^2\cdot 2!}(x-1)^2+\frac{(x-1)^3}{2^3\cdot 3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{2^n\cdot n}$$

③ $f(x)=e^x\,,\ a=1$

<u>Solución</u>

$$\begin{cases} f(x)=e^x \\ f'(x)=e^x \\ f''(x)=e^x \\ f'''(x)=e^x \\ \quad\vdots \\ f^{(n)}(x)=e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=e \\ f'(1)=e \\ f''(1)=e \\ f'''(1)=e \\ \quad\vdots \\ f^{(n)}(1)=e \end{cases}$$

$$P(x)=T_n(e^x,1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(1)}{k!}(x-1)^n$$

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{e}{k!}(x-1)^n=e\left[1+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{n!}\right]$$

④ $f(x)=\cos x\,,\ a=\dfrac{\pi}{3}$

<u>Solución</u>

$$\begin{cases} f(x)=\cos x=\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) \\ f'(x)=-\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}(x+\pi) \\ f''(x)=-\cos x=\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right) \\ f'''(x)=\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}(x+2\pi) \\ \quad\vdots \\ f^{(n)}(x)=\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2} \\ f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2} \\ f'''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \quad\vdots \\ f^{(n)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi+3n\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$P(x)=T_n\left(\cos x,\frac{\pi}{3}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{k!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n$$

$$P(x)=\frac{1}{2}+f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n$$

$$P(x)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2!}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3}{3!}+\cdots$$

II. Determinar los primeros términos de la solución de Taylor alrededor del valor de a, efectuando el proceso, hasta incluir el término $(x-a)^n$ para el entero dado n.

(1) $f(x)=e^{-x^2}$, $a=0$, $n=4$

Solución

Como $\quad g(x)=e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$

$$P(x) = T_n(f(x)) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$P(x) = T_4 f(x,0) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}$$

(2) $f(x) = xe^x$, $a = 0$, $n = 4$

Solución

Como $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$

$$xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$P(x) = T_4 f(x,0) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{24}$$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $a = 0$, $n = 4$

Solución

Como $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$, sí $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n}$$

$$P(x) = T_4 f(x,0) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$$

(4) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $a = 0$, $n = 5$

Solución

Como $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n}$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1-t^2+t^4-t^6+\ldots+(-1)^n t^{2n})dt$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$P(x) = T_5 f(x,0) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11}$$

III. Calcular las expresiones dadas con aproximación del número indicado de cifras decimales, comprobar dicha expresión utilizando el Teorema de Taylor con residuo.

① $e^{-0,2}$, 5 decimales.

Solución

Como $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$

Sustituyendo x por $-x$, tenemos: $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$

Como $x = 0,2$ tenemos:

$$e^{-0.2} = 1 - 0,2 + \frac{(0,2)^2}{2} - \frac{(0,2)^3}{6} + \frac{(0,2)^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{(0,2)^n}{n!}$$ para 5 decimales es:

$$e^{-0.2} = 1 - 0,2 + \frac{(0,2)^2}{2} - \frac{(0,2)^3}{6} \text{ con error } 0 \le R_3(0.2) \le \frac{|0,2|^4}{4!}$$

entonces $e^{-0,2} \cong 0,81867$ con error $0 \le R_3(x) \le 0,00006$

② $e^{-0,4}$, con 4 decimales.

Solución

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$, como $x = 0,4$ tenemos:

$$e^{-0,4}=1-0,4+\frac{(0,4)^2}{2}-\frac{(0,4)^3}{6}+\frac{(0,4)^4}{24}+\cdots+(-1)^n\frac{(0,4)^n}{n!}$$, para 4 decimales es:

$$e^{-0,4}=1-0,4+\frac{(0,4)^2}{2}-\frac{(0,4)^3}{6}\text{, con error } 0\le|R_3(0,4)|\le\frac{|0,4|^4}{4!}$$

entonces $e^{-0,4}\cong 0,6694$ con error $0\le|R_3(0,4)|\le 0,001060$

4.10 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Encontrar el polinomio de Taylor de grado n para cada función f alrededor del valor dado de a.

① $f(x)=\cos x$, $a=0$

② $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$, $a=0$

③ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, $a=0$

④ $f(x)=\ln x$, $a=3$

⑤ $f(x)=\sqrt{x}$, $a=4$

⑥ $f(x)=\operatorname{sen} x$, $a=\dfrac{\pi}{4}$

⑦ $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, a = 0

⑧ $f(x)=x\ln\left(x^2+1\right)$, $a=0$

II. Determinar los primeros términos del desarrollo de Taylor alrededor del valor de a, efectuando el proceso hasta incluir el término $(x-a)^n$ para el entero dado n.

① $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $a=0$, $n=4$

② $f(x)=\operatorname{tg} x$, $a=\dfrac{\pi}{4}$, $n=5$

③ $f(x)=\operatorname{arcsen} x$, $a=0$, $n=5$

④ $f(x)=\ln(\sec x)$, $a=0$, $n=6$

⑤ $f(x)=\sec x$, $a=0$, $n=4$

⑥ $f(x)=e^x\cos x$, $a=0$, $n=4$

III. Calcular las expresiones dadas con aproximación del número indicado de cifras decimales, comprobar dicha expresión utilizando el Teorema de Taylor con residuo.

1. $\ln(1,2)$, 4 decimales
2. $\operatorname{tg}(0,1)$, 3 decimales
3. $\cos(0,5)$, 5 decimales
4. $(1,08)^{\frac{1}{4}}$, 5 decimales
5. $(0,92)^{\frac{1}{4}}$, 5 decimales
6. $(0,91)^{\frac{1}{3}}$, 5 decimales
7. $(3,0)^{\frac{1}{5}}$, 5 decimales
8. $(0,8)^{\frac{1}{5}}$, 5 decimales
9. $(1,5)^{\frac{1}{4}}$, 5 decimales
10. $\ln(0,8)$, 5 decimales
11. $\ln(0,6)$, 3 decimales

CAPÍTULO V

5. APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA A LA FÍSICA

5.1 MASA, MOMENTOS ESTÁTICOS Y DE ENERGIA Y CENTRO DE MASA.

1er *Caso*: Sistema de puntos Materiales.

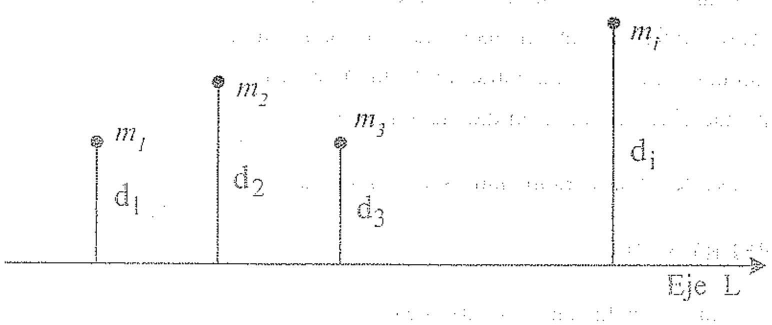
Consideremos un sistema de n puntos materiales de masas $m_1, m_2, ..., m_n$, ubicados en un plano de la recta L, llamado eje, entonces definimos.

a) **Masa Total del Sistema.**

$$\boxed{M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i}$$

b) **El momento estático respecto al eje L.**

$$\boxed{M_L = m_1 d_1 + m_2 d_2 + \cdots + m_n d_n = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i}$$



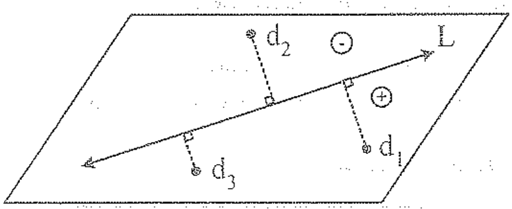
c) **El momento de inercia respecto del eje L.**

$$\boxed{I_L = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \cdots + m_n d_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2}$$

d) **El centro de masa respecto del eje L.**

$$\boxed{\bar{d} = \frac{M_L}{M}}$$

OBSERVACIÓN.- $d_i = \pm$ distancia del i-ésimo punto al eje L, donde el signo + se elige para aquellos puntos que se encuentran en un lado del eje L, y el signo -, para los puntos que se encuentran en el otro lado del eje L.

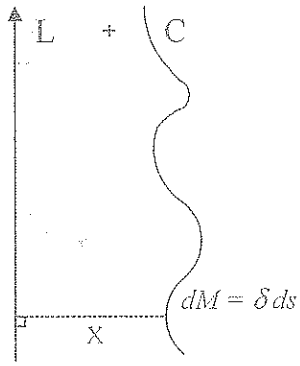


e) **Radio de giro respecto del eje L.**

$$\boxed{R^2 = \frac{I_L}{M}, \; R \geq 0}$$

R = radio de giro respecto del eje L.

2^{do} *Caso.-* **Curvas Planas.**



Supongamos que la curva C representa a un alambre (o hilo) contenido en un plano de una recta fija L y admitamos que en cada punto de la curva se tiene una densidad δ de masa por unidad de longitud.

La masa de un arco elemental ds es $dM = \delta\, ds$.

OBSERVACIÓN.-

1) Sea $x = \pm$ distancia de dM al eje L.

2) El signo + se elige de acuerdo a donde se encuentre dM a un lado del eje L.

3) El signo – se elige cuando dM se encuentra al otro lado.

Ahora para la curva C que representa a un alambre damos la siguiente definición.

a) **Masa Total:** $\boxed{M = \int dM}$

b) **Momento estático respecto al eje L.** $\boxed{M_L = \int x\, dM}$

c) **Momento de inercia respecto del eje L.** $\boxed{I_L = \int x^2 dM}$

d) **Radio de giro respecto del eje L.** $\boxed{R^2 = \frac{I_L}{M}}$

R = radio de giro, $R \geq 0$.

e) **Cuando C = alambre se encuentra en el plano XY el centro de masa se denota por $(\bar{x}, \bar{y})$ y es definido por:**

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M_y}{M} \; , \; \bar{y} = \frac{M_x}{M}}$$

OBSERVACIÓN.-

1) Los límites de integración de las partes a), b) y c) se determinan de tal manera que el elemento de masa dM recorre toda la curva C.

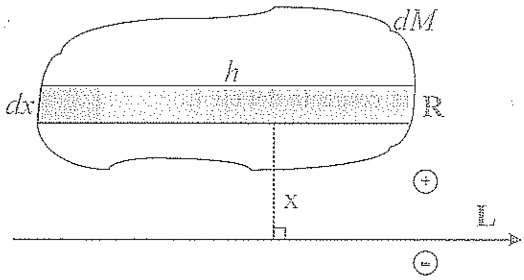
2) Cuando la masa es constante diremos que la masa es homogénea, en este caso el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ se denomina centroide.

3) Cuando se trata de figuras geométricas se toma $\delta = 1$ en este caso la masa del alambre es numéricamente igual a la longitud.

4) Cuando la curva es simétrica al eje L, entonces el centro de masa se encuentra en el eje L.

3^{er} *Caso*.- Figuras Planas.-

Supongamos que una "lámina fina" tiene la forma de una región S contenida en un plano, y que la masa de la lámina es homogénea, es decir que la densidad δ de masa por unidad de área es constante. Sea L una recta fija en dicho plano; la masa de un rectángulo elemental con dos lados paralelos al eje L (franjas paralelas al eje L) es $dM = \delta h\,dx$, donde h la altura y dx la base de dicho rectángulo.



$x = \pm$ distancia de R al eje L, el signo se determina de acuerdo a los casos anteriores.

Ahora daremos las siguientes definiciones para la lámina.

a) **Masa Total.** $\boxed{M = \int dM}$

b) **Momento estático respecto al eje L.** $\boxed{M_L = \int x\,dM}$

c) **Momento de inercia respecto al eje L.** $\boxed{I_L = \int x^2 dM}$

d) **Radio de giro respecto al eje L.** $\boxed{R^2 = \frac{I_L}{M}}$

e) **Si la lámina esta en el plano cartesiano XY el centroide de s es $(\bar{x}, \bar{y})$, donde**

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M_y}{M},\ \bar{y} = \frac{M_x}{M}}$$

f) **El momento de inercia relativa al origen (o momento polar).**

$$\boxed{I_0 = \int (x^2 + y^2)dM = I_x + I_y}$$

g) **Cuando la región S del plano es acotada por las rectas $x = a$, $x = b$ y las curvas $0 \le y_1(x) \le y_2(x)$, $a \le x \le b$, entonces se tiene:**

$$\boxed{\begin{array}{l} M_x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)dx, \quad M_y = \int_a^b x(y_2 - y_1)dx \\ I_x = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_a^b (y_2^3 - y_1^3)dx, \quad I_y = \int_a^b x^3(y_2 - y_1)dx \end{array}}$$

4^{to} *Caso*: **Superficie de Revolución.**

Suponiendo que D sea la superficie obtenida por rotación alrededor del eje X de la curva $y = f(x) \ge 0$ para $a \le x \le b$, entonces definimos.

a) **Área de** $$\boxed{D = 2\pi \int_a^b y\,ds}$$

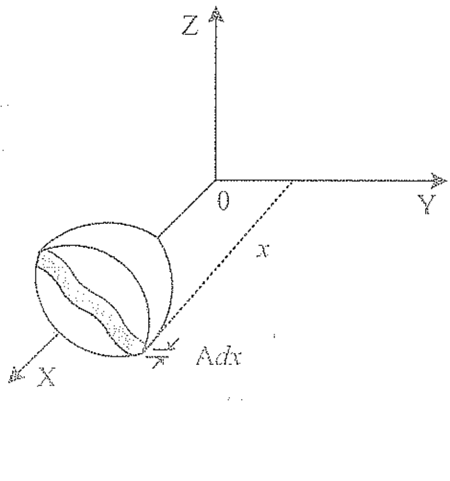
b) **Momento estático de D respecto al eje X.** $$\boxed{M_x = 2\pi \int_a^b y^2 ds}$$

c) **Momento de inercia de D respecto al eje X**

$$I_x = 2\pi \int_a^b y^3 ds \quad \text{donde} \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

5to. Caso: Sólidos.

Supongamos que S es el sólido de densidad constante δ de masa por unidad de volumen en el espacio XYZ, limitada por los planos $x = a$ y $x = b$ si A(x) es el área de sección de S paralela al plano YZ en el punto x, $a \le x \le b$, entonces la masa del cilindro elemental de base A(x) y altura dx es $dM = \delta A(x)dx$ entonces definimos.



a) La masa de S: $\boxed{M = \int dM}$

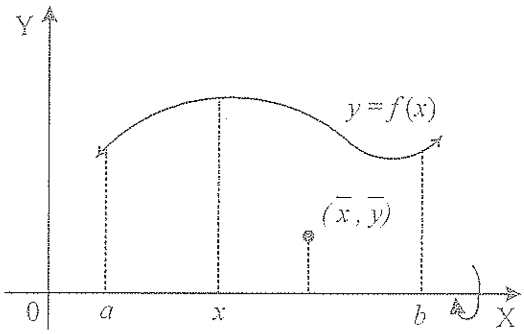
b) Momento estático de S respecto al plano YZ. $\boxed{M_{yz} = \int x\, dM}$

c) Centroide de S es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ donde

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} \quad , \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \quad , \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}}$$

5.2 TEOREMAS DE PAPPUS (Guldin).-

TEOREMA 1.- El área de la superficie engendrada por la rotación del arco de una curva plana alrededor de un eje situado en el mismo plano que la curva, pero que no se corta con ella, es igual al producto de la longitud de dicho arcos por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad del mismo.



$A = 2\pi \bar{y} L$

donde: L = longitud de la curva

$\bar{y}$ = distancia del centro de masa de la curva al eje

<u>*Demostración*</u>

Sea C: $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, una curva definida por la función continua f (no negativa sobre $[a,b]$). La coordenada $\bar{y}$ es dado por:

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y\, ds}{\text{longitud de C}} = \frac{\int_a^b y\, ds}{L} \quad \text{de donde} \quad \int_a^b y\, ds = \bar{y}\, L \qquad \dots (1)$$

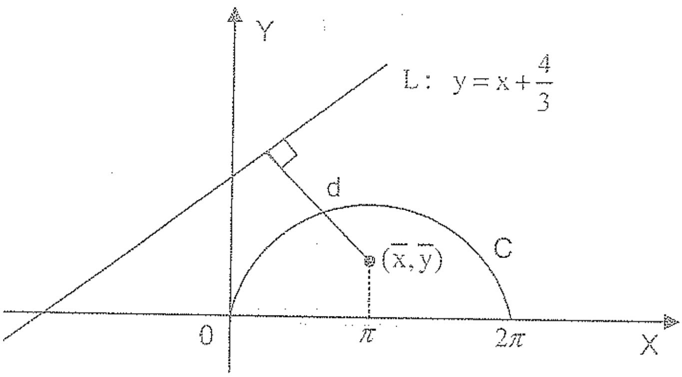
además sabemos que el área de la superficie de revolución de la curva alrededor del eje X es:

$$A(s) = 2\pi\int_a^b y\,ds = 2\pi\,\overline{y}\,L\,,\quad \text{Luego}\quad A(s) = 2\pi\,\overline{y}\,L$$

❖ ❖ ❖

Ejemplo.- Determinar el área S de la superficie de revolución generada por la rotación del primer arco de la cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$ alrededor de la recta $L: y = x + \frac{4}{3}$.

Solución



Hallando las coordenadas del centroide

$t\,[0, 2\pi]$, $x'(t) = 1 - \cos t$, $y'(t) = \operatorname{sen} t$, longitud de C = 8.

$$\int_0^{2\pi} x(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = 2\int_0^{2\pi}(t - \operatorname{sen} t)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)dt = 8\pi$$

$$\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = 4\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3\left(\frac{t}{2}\right)dt = \frac{32}{3}$$

$$\overline{x} = \frac{8\pi}{8} = \pi\ ,\quad \overline{y} = \frac{\frac{32}{3}}{8} = \frac{4}{3}\ ,\ \text{luego}\ \ (\overline{x}, \overline{y}) = \left(\pi, \frac{4}{3}\right)$$

$$d(c,L)=\frac{\left|\bar{y}-\bar{x}-\frac{4}{3}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$, luego por el teorema de Pappus

$$A(s)=2\pi\, d(\text{longitud C})=2\pi\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)8=8\sqrt{2}\pi^2$$

TEOREMA 2.- El volumen del cuerpo generado por la rotación de una figura plana alrededor de un eje situado en el mismo plano que la figura, pero no se corta con ella, es igual al producto del área de dicha figura por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad de la misma.

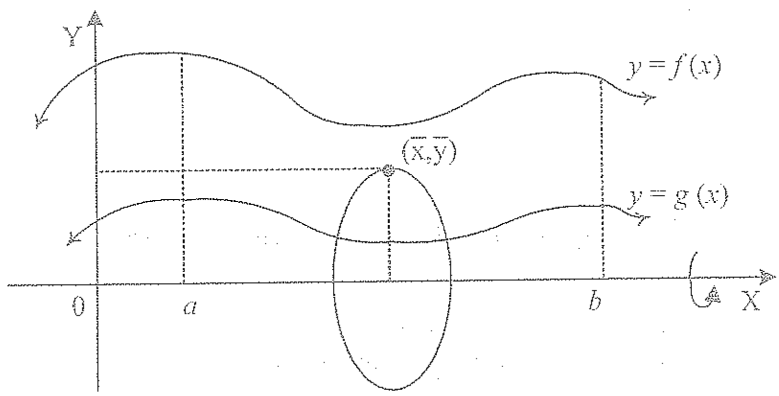
$$\boxed{V=2\pi\bar{y}A}$$

donde: A = área de la región

$\bar{y}$ = distancia del centro de masa de la región al eje dado.

V = Volumen del sólido generado por la región.

Demostración



Sean f y g dos funciones continuas, donde $f(x)\ge g(x)\ge 0$, $\forall x\in[a,b]$. Si R es la región encerrada entre las curvas $y=f(x)$, $y=g(x)$ sobre el intervalo $[a,b]$.

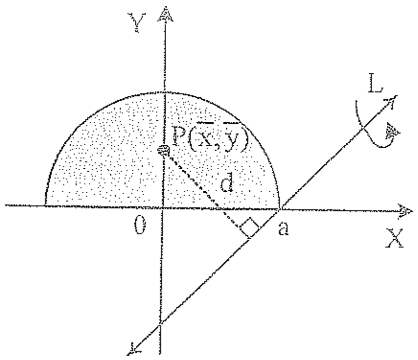
Sabemos que: $\bar{y}=\dfrac{\frac{1}{2}\int_a^b (f^2(x)-g^2(x))dx}{\text{Area }(R)}$, es decir que $\int_a^b \left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx = 2\bar{y}A$

además $V=\pi\int_a^b (f^2(x)-g^2(x))dx = 2\pi\bar{y}A \qquad \therefore \quad V=2\pi\bar{y}A$

◈ ◈ ◈

Ejemplo.- Sea R la región limitada por la semicircunferencia $y=\sqrt{a^2-x^2}$, y el eje X, utilizar el teorema de Pappus para calcular el volumen V del sólido de revolución generado por la rotación de R alrededor de la recta L: $y=x-a$.

Solución



Las coordenadas del centro de gravedad son: $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\dfrac{4a}{3\pi}$

Sabemos que: $\boxed{V=2\pi d A}$

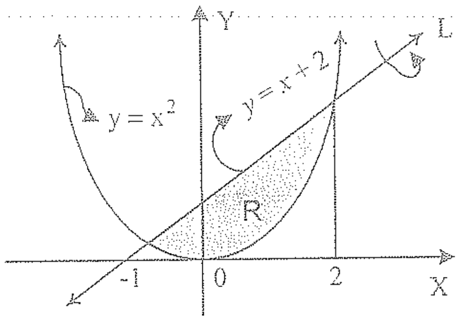
$$d(p,L)=\frac{|\bar{y}-\bar{x}+a|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\frac{4a}{3\pi}-0+a\right|}{\sqrt{2}}=\frac{a(3\pi+4)}{3\pi\sqrt{2}}$$

$A=\dfrac{\pi a^2}{2}$ área de la semicircunferencia, luego por el teorema de Pappus.

$$V(s)=\frac{2\pi a(3\pi+4)}{3\pi\sqrt{2}}\left(\frac{\pi a^2}{2}\right)=\frac{a^3\pi(3\pi+4)}{3\sqrt{2}}$$

Ejemplo.- Calcular el volumen del sólido S generado por la rotación de la región R limitada por la parábola $y=x^2$, y la recta $y=x+2$ entorno a ésta última.

Solución



Por el teorema de Pappus se tiene que:

V(s) = 2 π d A , donde d = es la distancia del centro de gravedad a la recta en el cual rota y A es el área de la región R.

Calculando el área de la región R

$$A(R) = \int_{-1}^{2} x(x+2-x^2)dx = \frac{9}{2}$$

Calculando el centro de gravedad de la región R, $P(\bar{x}, \bar{y})$

$$M_y = \int_{-1}^{2} x(x+2-x^2)dx = \frac{9}{4}, \quad M_x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\left[(x+2)^2 - x^4\right]dx = \frac{36}{5}, \text{ por lo tanto}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{1}{2}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{8}{5}, \text{ luego } P\left(\frac{1}{2}, \frac{8}{5}\right)$$

Ahora calculando la distancia del punto P a la recta L

$$d = \frac{|\bar{x} - \bar{y} + 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{9\sqrt{2}}{20}, \text{ luego por el teorema de Pappus}$$

$$V(s) = 2\pi\, d\, A = 2\pi\left(\frac{9\sqrt{2}}{20}\right)\frac{9}{2} = \frac{81\sqrt{2}\pi}{20} u^3$$

5.3 CAMINO RECORRIDO POR UN PUNTO.-

La longitud del camino o trayectoria recorrido por un punto P que se mueve a lo largo de una curva en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es definido por:

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\,dt}$$

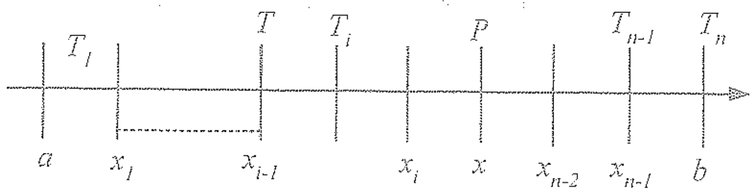
donde: V(t) = Velocidad.

5.4 TRABAJO.-

Si la fuerza f es constante durante el desplazamiento, el trabajo W realizado por ésta fuerza es definida por $W = f.d$, donde f es la fuerza constante y d la distancia recorrida por el cuerpo.

Si la fuerza no es constante durante el desplazamiento, el trabajo no se puede expresar en forma tan simple.

Consideremos P una partícula que se desplaza sobre la línea coordenada desde a hasta b, por medio de una fuerza $f = F(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$ donde F(x) es la fuerza aplicada a la partícula P cuando se encuentra en el punto cuya coordenada es x.



Cuando la partícula se mueve de x_{i-1} a x, el trabajo realizado es aproximadamente igual al producto $F(t_i)\Delta_i x$ quiere decir que mientras más pequeña es la longitud $\Delta_i x$ en $[x_{i-1}, x_i]$ mejor será la aproximación ahora, formando la suma de Riemann del trabajo.

$\Delta_i W = F(t_i)\Delta_i x$ se tiene: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i W = \sum_{i=1}^{n} F(t_i)\Delta_i x}$

el trabajo total realizado por la fuerza F denotaremos por W y es definido por:

$$W = \lim_{|\Delta_i x| \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(t_i)\Delta_i x = \int_a^b F(x)dx$$

$$\boxed{W = \int_a^b F(x)dx}$$

OBSERVACIÓN.-

1) Un ejemplo de trabajo realizado por una fuerza no constante, es el alargamiento o comprensión de un resorte helicoidal.

Según la ley de Hooke, se tiene que la fuerza necesaria para estirar un resorte helicoidal, varía directamente con la elongación del resorte.

La fuerza F(x) para producir una elongación de x unidades que puede ser dada ó se calcula a partir de los datos.

Ejemplo.- Una fuerza de 25 kg. alarga un resorte de 3 cm., encontrar el trabajo requerido para alargar el resorte de 2 cm. más.

Solución

Se tiene F(x) = kx, como x = 3 cm = 0,03 m $\Rightarrow$ F(0,03) = 0,03k = 25 $\Rightarrow$ $k=\dfrac{2500}{3}$

$$W=\int_a^b F(x)dx=\int_{0,03}^{0,05} kx\,dx=\frac{2500}{3}\int_{0,03}^{0,05} x\,dx=\frac{2500}{3}.\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0,03}^{0,05}=\frac{1250}{3}[0,0025-0,009]$$

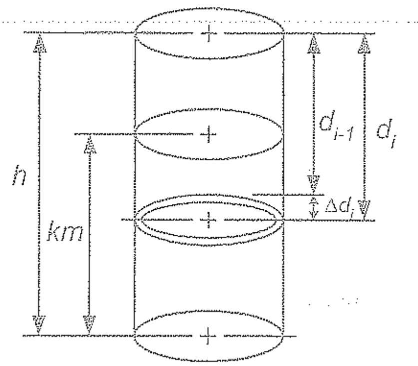
$$=\frac{1250}{3}(0,0016) \qquad \therefore\ W=\frac{2}{3}kg/ms$$

La integral también se aplica para determinar el trabajo realizado al bombear agua (u otro líquido) de un tanque:

El principio físico que se usa es:

"Si un objeto se eleva una distancia vertical h, el trabajo realizado es el producto del peso del objeto por la distancia h.

Consideremos un tanque que contiene agua hasta una profundidad de km.



Sea W el trabajo realizado al bombear el agua a la parte superior del tanque, el área de la base del i-ésimo sólido elemental es A_i su volumen será $A_i.\Delta d_i$, como el agua pesa 1000 kg por m^3, entonces el peso del i-ésimo sólido elemental es $1000A_i.\Delta d_i$.

La cantidad de trabajo realizado para elevar este sólido lleno de agua, hasta la parte superior del tanque es aproximadamente.

$\Delta_i W = (1000A_i.\Delta d_i)d_i$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i W = \sum_{i=1}^{n}(1000A_i.\Delta d_i)d_i}$$

tomando límites se tiene: $\boxed{W = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i W = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(1000A_i.\Delta d_i)d_i}$

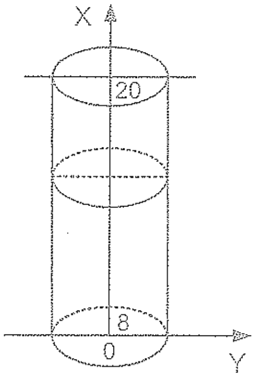
entonces W es el trabajo realizado al bombear el agua hasta la parte superior del tanque.

Para hallar una integral definida cuyo valor es W dependerá de hallar una función F donde el dominio contiene un intervalo S de longitud k tal que:

$$\boxed{F(t_i) = 1000A_i d_i,\ \ t_i \in S}$$

Ejemplo.- Un tanque en forma cilíndrica circular de radio 8m. y altura 20m. se llena con agua. Encuentre el trabajo necesario para bombear el agua hasta llenar el tanque.

Solución



El trabajo requerido para elevar el i-ésimo sólido hasta la parte superior del tanque es aproximadamente $1000(A_i.\Delta d_i)d_i$, donde $A_i = \pi r_i^2$, de donde $\sum_{i=1}^{n}(1000A_i.\Delta d_i)d_i$ es la suma aproximada para el trabajo W necesario para bombear el agua hasta la parte superior del tanque, para expresar el i-ésimo termino de la suma de aproximadamente en la forma $F(t_i)\Delta x_i$, se considera una línea coordenada sobre el cual se puede graficar el dominio, el intervalo es [0,20] y se hace $t_i = x_i = d_i$ para i = 1, 2,..., n, $\Delta d_i = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$.

Luego la suma aproximada se puede escribir:

$\sum_{i=0}^{n}(1000A_i.\Delta d_i)d_i = \sum_{i=0}^{n}1000\pi r_1^2 x_i.\Delta x_i$, luego F(x)=64x entonces se tiene:

$$W = \int_0^{20} 1000\pi.64x\,dx = 64000\pi\int_0^{20} x\,dx \qquad \therefore\ W = 12\ 800\ 000\ \pi$$

5.5. ENERGIA CINÉTICA.-

Se da el nombre de energía cinética de un punto material, de masa m y velocidad v, a la siguiente expresión:

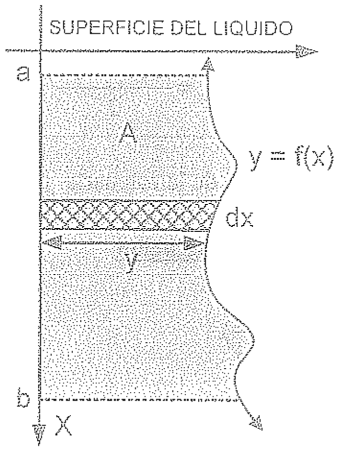
$$\boxed{K = \frac{mv^2}{2}}$$

5.6. PRESIÓN DE LOS LÍQUIDOS.-

Para calcular la fuerza con que presionan los líquidos se emplea la ley de Pascal, según la cual, la presión que ejercen los líquidos sobre una área A sumergida a una profundidad x, es igual a:

$$\boxed{P=\gamma\int_a^b yx\,dx}$$

donde γ es el peso específico del líquido.



5.7. PROBLEMAS DESARROLLADOS.-

① Hallar los momentos estáticos, respecto a los ejes coordenados, del segmento de la línea $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, comprendidos entre dichos ejes coordenados.

Solución

Los momentos estáticos respecto a los ejes coordenados es:

$$M_x=\int_0^a y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx\ ,\quad M_y=\int_0^a x\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$$

Como $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \;\Rightarrow\; y=\frac{b}{a}(a-x) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}$

$$M_x=\int_0^a \frac{b}{a}(a-x)\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\,dx=-\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}.\frac{(a-x)^2}{2}\Big|_0^a$$

$$\therefore \quad M_x = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$M_y = \int_0^a x\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx = \int_0^a \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} x\,dx = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2a}x^2\Big|_9^a$$

$$\therefore \quad M_y = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

(2) Encontrar el centroide de un arco de la catenaria $y = 4\cosh(\frac{x}{4})$ desde x = -4 hasta x=4

Solución

$$y = 4\cosh(\frac{x}{4}) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = senh(\frac{x}{4})$$

$$M_x = \int_{-4}^{4} y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx = \int_{-4}^{4} 4\cosh(\frac{x}{4})\sqrt{1+senh^2(\frac{x}{4})}\,dx$$

$$= 4\int_{-4}^{4}\cosh(\frac{x}{4}).\cosh(\frac{x}{4})dx = 2\int_{-4}^{4}(1+\cosh\frac{x}{2})dx =$$

$$M_x = 8senh 2 + 16$$

$$M_y = \int_{-4}^{4} x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_{-4}^{4} x\cosh\left(\frac{x}{4}\right)dx = 0$$

Como $\bar{x} = \frac{M_y}{L}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{L}$, entonces $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{2+senh 2}{senh 1}$

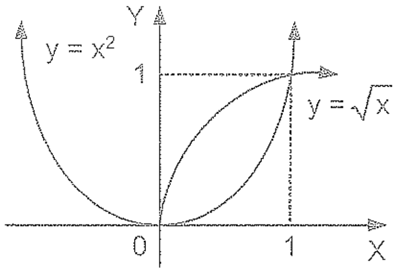
$$\therefore \quad (\bar{x},\bar{y}) = \left(0, \frac{2+senh 2}{senh 1}\right)$$

NOTA. $L = \int_{-4}^{4}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_{-4}^{4}\cosh\left(\frac{x}{4}\right)dx = 4senh\frac{x}{4}\Big|_{-4}^{4} = 4(senh(1)-senh(-1))$

(3) Hallar el centroide del área acotada por las curvas $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$

Solución

Graficando la región se tiene:



$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{1}{3}$$

$$M_x = \int_0^1 \frac{1}{2}(x - x^4)dx = \frac{3}{20}$$

$$M_y = \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{3}{20}$$

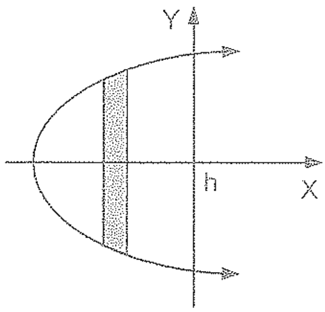
$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}$$

$$\therefore \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20}\right)$$

(4) Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por las curvas $y^2 = 2px$, x = h.

Solución

Graficando la región:



$$A = 2\int_0^h y\,dx = 2\int_0^h \sqrt{2p}x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$A = \frac{4}{3}\sqrt{2}p\,x^{3/2}\Big|_0^h$$

$$A = \frac{4}{3}\sqrt{2ph}\sqrt{h}$$

Ahora hallaremos los momentos con respecto a los ejes

$$M_x = \int_0^h \frac{1}{2}(2px - 2px)dx = 0\ ,\ \text{además:}\ ds = a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\ dt = 2a\,sen\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

$$\Rightarrow\ L = \int_0^{2\pi} ds = 2a\int_0^{2\pi} sen\left(\frac{t}{2}\right)dt = -4a\cos\left(\frac{t}{2}\right)dt\Big|_0^{2\pi} \qquad \therefore\ L = 8a$$

$$M_x = \int_0^{2\pi} y\,ds = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)2a\,sen\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

$$M_y = \int_0^{2\pi} x2\sqrt{2px}^{\frac{1}{2}}dx = \frac{4}{5}\sqrt{2px}^{5/2}\Big|_0^h = \frac{4}{5}\sqrt{2ph}^2\sqrt{h}$$

$$\text{Luego:}\ \ \bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{4}{5}\sqrt{2ph}^2\sqrt{h}}{\frac{4}{3}\sqrt{2ph}\sqrt{h}} = \frac{3}{5}h\ ,\ \ \bar{y} = \frac{M_x}{A} = 0$$

$$\therefore\ (\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{3h}{3}, 0\right)$$

5) Hallar las coordenadas del centro de gravedad del primer arco de la cicloide x = (t – a sen t), y = a(l – cos t).

Solución

$$\begin{cases} x = a(t - sent) \\ y = a(1-\cos t)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = a(1-\cos t)dt \\ dy = a\,sent\,dt\end{cases}$$

$$(dx)^2 = a^2(1-\cos t)^2(dt)^2\ ,\ \ (dy)^2 = a^2 sen^2 t(dt)^2$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = a\sqrt{(1-\cos t)^2 + sen^2 t}\ dt \ \Rightarrow\ L = 4a^2\int_0^{2\pi} sen^3\left(\frac{t}{2}\right)dt = \frac{32}{3}a^2$$

En forma similar para $M_y = 8a^2\pi$ luego el centro de gravedad es:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{L} = \frac{8a^2\pi}{8a} = a\pi\ ,\ \ \bar{y} = \frac{M_x}{L} = \frac{\frac{32}{3a^2}}{8a} = \frac{4a}{3} \qquad \therefore\ (\bar{x},\bar{y}) = \left(a\pi, \frac{4a}{3}\right)$$

(6) El largo natural de un resorte es 10 cm. Si una fuerza de 90 kgrs lo alarga hasta 11 cm. Encontrar el trabajo requerido para alargarlo de 12 a 14 cm.

Solución

$$11\text{cm.} = 0.11\text{m} \Rightarrow f(0,11) = 11\ ak \Rightarrow k = \frac{9000}{11}$$

$$W = \int_{0,12}^{0,14} f(x)dx = \int_{0,12}^{0,14} kx\,dx = \frac{9000}{11}\int_{0,12}^{0,14} x\,dx$$

$$= \frac{4500}{11}x^2 \Big|_{0,12}^{0,14} = \frac{4500}{11}(0,0196 - 0,0144) = \frac{45}{11}(0,52)$$

(7) Encontrar el trabajo efectuado al alargar un resorte 6 cms. sabiendo que se necesita una fuerza de 15 kg. para alargarlo 1 cm.

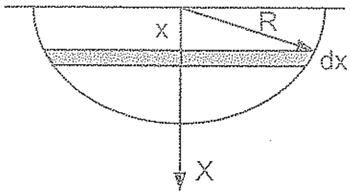
Solución

Como $f(x) = kx$ además 1 cm. = 0,01 m. $\Rightarrow f(0,01) = 0,01k = 15 \Rightarrow k = 1\ 500$

$$W = \int_{0,01}^{0,06} f(x)dx = \int_{0.01}^{0,06} 1500x\,dx = 2,62\ kgr$$

(8) Encontrar el trabajo requerido para bombear el agua que llena un recipiente hemisférico de radio R, por encima del recipiente.

Solución



El peso del disco circular de espesor dx y base paralela a la base del recipiente es:

$$f = p(\pi r^2)dx$$

Donde: p = peso de una unidad de volumen de agua y $r^2 = R^2 - x^2$, entonces:

$$W = p\pi\int_0^R x(R^2 - x^2)dx = \frac{p\pi R^4}{4}$$

(9) Determinar el trabajo realizado en la expresión adiabática del aire hasta ocupar el volumen inicial es $V_0 = 1m^3$ y la presión $p_0 = 1\ kj\ f/cm^2$.

Solución

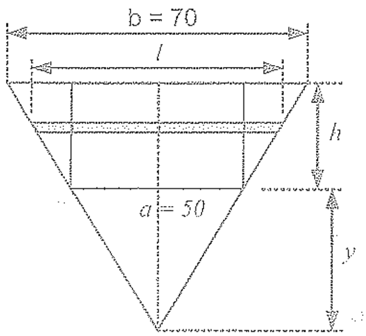
De acuerdo a la ley de Poisson se tiene $pv^k = p_0V_0^k$, donde k ≈ 1.4, de donde:

$$W = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1}} \frac{P_0V_0}{V^k}dv = \frac{P_0V_0}{k-1}\left[1 - \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{k-1}\right]$$

Reemplazando valores se tiene: W = 15000 kg-f / m

(10) Un reservorio vertical tiene forma de trapecio calcular la presión total del agua sobre dicha presa, sabiendo que la base superior tiene 70 cm., la base inferior 50cm. y su altura 20 cm.

Solución



p = rh

Empleando semejanza de triángulo se tiene:

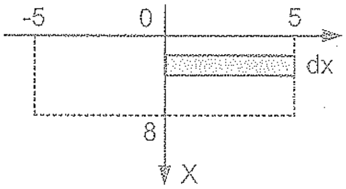
$$\frac{y}{a} = \frac{y+h}{b} \Rightarrow \frac{y}{50} = \frac{y+20}{70} \Rightarrow y = 50$$

$$\frac{725}{70} = \frac{725-h}{l} \Rightarrow l = (725-h)\frac{70}{725}$$

$$p = r\int_0^{20}(725-h)\frac{70}{725}h\,dh \Rightarrow p = 113{,}60\ cm$$

(11) Una lámina tiene la forma de un rectángulo y es sumergido verticalmente en un tanque con agua y su base superior en la superficie del líquido; si el ancho de la lámina es de 10p y el largo es de 8p encontrar la fuerza debida a la presión del líquido sobre un lado de la lámina.

Solución



$$F = 2w\int_0^8 x\,f(x)dx \quad \text{donde}$$

$$F(x) = 5$$

$$F = 2w\int_0^8 5x\,dx = 320w$$

(12) La velocidad de un cuerpo, lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0, contando la resistencia del aire, se expresa por la fórmula:

$$V = c.tg\left(-g\frac{t}{c} + arctg\frac{v_0}{c}\right)$$

donde t es el tiempo transcurrido, g es la aceleración de la gravedad y c es una constante. Hallar la altura a que se eleva el cuerpo.

Solución

$$\text{Datos:} \begin{cases} v = c.tg\left(-g\dfrac{t}{c} + arctg\left(\dfrac{V_0}{c}\right)\right) \\ t = \text{tiempo} \\ c = \text{constante} \\ g = \text{gravedad} \end{cases}$$

$$V = \frac{dh}{dt} = c.tg\left(-g\frac{t}{r} + arctg\left(\frac{V_0}{c}\right)\right)$$

$$\int_0^h dh = \int_0^t c.tg\left(-g\frac{t}{c} + arctg\left(\frac{V_0}{c}\right)\right)dt$$

$$h = -\frac{c^2}{g}\ln\left|\text{sen}\left(-g\frac{t}{c} + \text{arctg}\frac{V_0}{c}\right)\right|\Bigg|_0^t$$

$$h=-\frac{c^2}{g}\ln\left|\operatorname{sen}\left(-g\frac{t}{c}+\operatorname{arctg}\left(\frac{V_0}{c}\right)\right)\right|+c^2\ln\left(1+\frac{V_0^2}{c^2}\right) \quad \text{de donde:} \quad h=\frac{c^2}{2g}\ln\left(1+\frac{V_0^2}{c^2}\right)$$

5.8 PROBLEMAS PROPUESTOS.-

1. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la catenaria $y=a\cdot\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ comprendida entre $x=-a$ y $x=a$

   Rpta. $(\bar{x},\bar{y})=\left(0,\frac{a(2+\operatorname{senh}2)}{2\operatorname{senh}(1)}\right)$

2. Hallar los momentos estáticos, respecto a los ejes X, Y, y las coordenadas del centro de gravedad del triángulo limitado por las rectas $x+y=a$, $x=0$, $y=0$.

   Rpta. $M_x=M_y=\frac{a^3}{6}$, $(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$

3. Encontrar las coordenadas de centro de masa de la región acotada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y los ejes coordenadas $(x\geq 0,\ y\geq 0)$.

   Rpta. $(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4b}{3\pi}\right)$

4. Hallar los momentos estáticos respecto a los ejes X, Y las coordenadas del centro de gravedad del arco de la astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ situado en el primer cuadrante.

   Rpta. $M_x=\frac{3a^2}{5}$, $M_y=\frac{3a^2}{5}$, $(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{2a}{5},\frac{2a}{5}\right)$

5. Probar que si R es la región del plano acotado por las rectas $x=a$, $x=b$ y las curvas $0\leq g(x)\leq f(x)$, $a\leq x\leq b$ entonces:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b (f^2(x)-g^2(x))dx,\quad M_y=\int_a^b x(f(x)-g(x))dx$$

6. Hallar el centro de gravedad del arco de la circunferencia de radio a, que subtiene el ángulo 2α.

   Rpta. $(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{a\operatorname{sen}\alpha}{\alpha},0\right)$

(7) Hallar el centro de gravedad de la región limitada por las curvas $x^2-8y=0$; $x^2+16y=24$. **Rpta.** $(\bar{x},\bar{y})=\left(0,\frac{4}{5}\right)$

(8) Hallar el centroide de la región acotada por las curvas $y=x^3$, $y=4x$ en el primer cuadrante. **Rpta.** $\left(\frac{16}{15},\frac{64}{21}\right)$

(9) Encontrar el centroide de la región limitada por las curvas $x=2y-y^2$, $x=0$.

Rpta. $(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{2}{5},1\right)$

(10) Hallar el centro de gravedad de la región finita, en el primer cuadrante, comprendida entre la curva $y=xe^{-x}$ y el eje X. **Rpta.** $\left(2,\frac{1}{8}\right)$

(11) Encontrar el centro de gravedad de cada una de las regiones limitadas por las siguientes curvas:

a) $y=x^2-4$, $y=2x-x^2$ **Rpta.** $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$

b) $y=x^2$, $y=x-x^2$ **Rpta.** $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$

c) $y=\ln x$, $y=4$, $y=4-4x^2$ en el primer cuadrante **Rpta.** (14,61 ; 3,15)

d) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$, $y=0$, $x=0$ **Rpta.** $\left(\frac{9}{5},\frac{9}{5}\right)$

e) $y=\operatorname{sen} x$, $y=\cos x$, $y=0$ desde $x=0$, hasta $x=\frac{\pi}{2}$.

Rpta. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{(\pi-2)(2+\sqrt{3})}{16}\right)$

f) $y = x^2 - 2x - 3$, $y = 6x - x^2 - 3$ Rpta. $(2,1)$

g) $x = 4y - y^2$, $y = x$. Rpta. $\left(\frac{12}{5}, \frac{3}{2}\right)$

(12) Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \operatorname{sen} x$. Rpta. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(1, \frac{\pi}{8}\right)$

(13) Determinar el centroide de la región plana limitada por la curva $y = f(x)$, $y = -x^2$, $x = -1$, $x = 2$ donde $f(x) = \begin{cases} 1 - x & , \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$ Rpta. $\left(\frac{107}{106}, \frac{142}{265}\right)$

(14) Encontrar el centro de gravedad de cada una de las regiones limitadas por las curvas siguientes:

a) $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$ Rpta. $(9,9)$

b) $y = x^3 - 3x$, $y = x$ sobre el lado derecho del eje Y Rpta. $\left(\frac{16}{15}, -\frac{24}{35}\right)$

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el primer cuadrante Rpta. $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$

d) $y = \operatorname{sen} x$ $(0 \leq x \leq \pi)$, $y = 0$ Rpta. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$

(15) El centro de gravedad de la región acotada por las curvas $x^2 = 4y$, $y = mx$ es un punto de abscisa igual a 2. Determinar el valor de m. Rpta. $m = 1$

(16) Hallar el centro de gravedad del hemisferio de radio a, con el centro en el origen de coordenadas, sobre el plano XY. Rpta. $\left(0, 0, \frac{a}{2}\right)$

(17) Hallar el centro de masa de un cono homogéneo circular recto de altura h y radio de la base r. **Rpta.** $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,\frac{h}{4},0\right)$

(18) Calcular el momento estático y de inercia de la semicircunferencia $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $-r\le x\le r$, respecto al eje X. **Rpta.** $M_x=2r^2$, $I_x=\frac{\pi r^3}{2}$

(19) Calcular el momento de inercia del área de una elipse $x=a\cos t$, $y=a\operatorname{sen} t$ respecto al eje Y. **Rpta.** $M_x=M_y=\frac{3a^2}{5}$, $I_x=I_y=\frac{3a^3}{8}$

(20) Calcular el momento estático y de inercia del arco de la catenaria $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ donde $0\le x\le a$, respecto al eje Y.

Rpta. $M_x=\frac{a^2}{8}(e^2-e^{-2}+4)$, $M_y=\frac{a^3}{24}(e-e^{-1})(e^2+e^{-2}+10)$

(21) Calcular el momento estático y de inercia de una triángulo de base a y de altura h respecto a su base. **Rpta.** $M_a=\frac{ah^2}{6}$, $I_a=\frac{ah^3}{12}$

(22) Calcular el momento de inercia de un segmento parabólico limitado por la parábola $y=4-x^2$, y la recta $y=3$, respecto al eje X. **Rpta.** $I_x=\frac{1628}{105}$

(23) Hallar el momento de inercia de la circunferencia de radio a, respecto a su propio diámetro. **Rpta.** $I=a^3\pi$

(24) Probar que el momento de inercia respecto al eje X de una región R acotada por las rectas $x=a$, $x=b$, y las curvas continuas $b\ge a$, $g(x)\le f(x)$ es:

$$I_x=\frac{1}{3}\int_a^b(f^3(x)-g^3(x))dx$$

(25) Sea R el sólido generado por rotación alrededor del eje X de la región acotada por $x = a$, $x = b$, la curva $f(x) \geq 0$ y el eje X, probar que los momentos estáticos y de inercia de R respecto del eje de revolución son dadas por:

$$M_x = \frac{2\pi}{3}\int_a^b f^3(x)\,dx \quad \text{y} \quad I_x = \frac{\pi}{2}\int_a^b f^4(x)\,dx$$

(26) Calcular el momento de inercia de un cono circular recto homogéneo, respecto a su eje, si la base del radio es R y la altura es h. **Rpta.** $I_y = \frac{3Mr^2}{3}$, $M = 6\frac{\Pi r^3}{3}h$

(27) Hallar el momento de inercia respecto del eje X de la superficie generada por rotación, alrededor del eje X, de un arco completo de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$. **Rpta.** $I_x = \frac{2\,048}{3}\pi a^4$

(28) Calcular el momento de inercia con respecto al eje de revolución del sólido generado por rotación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje X. **Rpta.** $I_x = \frac{8\pi ab^2}{15}$

(29) Encontrar el centroide del sector hiperbólico acotado por la hipérbola equilátera $x = \frac{3}{2}\sec\theta$, $y = \frac{3}{2}\operatorname{tg}\theta$ y los radios vectores $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$

Rpta. $\bar{x} = \frac{1}{\ln(\sqrt{2}+1)}$, $\bar{y} = \frac{\sqrt{2}-1}{\ln(\sqrt{2}+1)}$

(30) Encontrar el centroide del área acotada por $y = (x+1)^2$, $x + y = 5$, $y = 0$, $x = 2$.

Rpta. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{39}{37}, \frac{28}{185}\right)$

(31) Calcular el momento del volumen comprendido en un octante y la elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, respecto al plano XY. **Rpta.** $\frac{abc^2\pi}{16}$

32) Un resorte tiene una longitud natural de 14 cm si se requiere una fuerza de 50 dinas para mantener el resorte estirado 2 cm cuanto trabajo se realiza al estirar el resorte desde su longitud natural hasta una longitud de 18 cm. **Rpta.** 200 ergs.

33) Un resorte tiene una longitud natural de 8 pulgadas, si una fuerza de 20 libras estira el resorte $\frac{1}{2}$ pulg. Determinar el trabajo efectuando al alargar el resorte de 8 a 11 pulgadas. **Rpta.** 108 libra / pulg.

34) Una fuerza de 8 newton estira un resorte de 4m de longitud natural a 50m más. Encuentre el trabajo realizado al alargar el resorte desde su longitud natural hasta 5m.

Rpta. 8 Joules

35) Hallar la longitud de un muelle metálico pesado, si el trabajo efectuado al alargarlo desde una longitud de 2 pies hasta una longitud de 3 pies es la mitad del trabajo efectuado al alargarlo desde una longitud de 3 pies hasta una longitud de 4 pies.

Rpta. $\frac{3}{2}\,pies$

36) Un resorte tiene una longitud natural de 6 pulg. Una fuerza de 12 000 libras comprime el resorte de 5 ½ pulg. Encontrar el trabajo realizado al comprimirlo de 6 pulg a 5 pulg la ley de hooke se cumple para comprimir como para extensión.

Rpta. w = 12 000 libr-pulg.

37) Un tanque de agua en forma de un cono circular recto invertido, mide 20 pies de diámetro en su parte superior y 15 pies de profundidad, sí la superficie del agua esta 5 pies por debajo de la tapa del tanque. Encuentre el trabajo realizado al bombear el agua hasta la parte superior del tanque. **Rpta.** $\frac{10\,000}{9}\pi\, w$ pies – libra

38) Un tanque lleno de agua tiene la forma de un paralelepípedo rectangular de 5 pies de profundidad, 15 pies de ancho y 25 pies de largo. Encuentre el trabajo necesario para bombear el agua del tanque hasta un nivel de 1pie arriba de la superficie del tanque.

Rpta. 5 362,5 w pies-libras

(39) Un depósito cilíndrico vertical de radio 2 metros y altura 6 metros se encuentra lleno de agua. Hallar el trabajo al bombear el agua.

a) Hasta el nivel más alto del depósito.

b) Hasta el nivel de 5 metros por encima de dicho depósito (suponer que el peso del agua es de 1 000 kilos por metros cúbicos).

Rpta. a) 72 000 π kilográmetro b) 312 000 π kilográmetro

(40) Un tanque semiesférico con un radio de 6 pies se llena de agua a una profundidad de 4 pies. Encuentre el trabajo realizado al bombear el agua la parte superior del tanque.

Rpta. 256 π w pies – libras

(41) Qué trabajo hay que realizar con una grúa para sacar un bloque de hormigón armado del fondo de un río de 15m de profundidad, si el bloque tiene forma de tetraedro equilátero de 1m de lado, siendo al densidad del hormigón $2\,500\, kg/m^3$.

(42) Encontrar el trabajo que debe hacerse para extraer el agua contenida en un recipiente cónico recto invertido de radio r en la base y la altura h. **Rpta.** $w = \dfrac{a^2h^2y^2}{12}\pi p$

(43) Un tanque rectangular lleno de agua tiene 2 pies de ancho y 8 pies de profundidad, encontrar al fuerza debida a la presión del líquido sobre un extremo del tanque.

Rpta. $f = 2{,}25$ w libras

(44) Una superficie tiene la forma de un elipse de semi ejes a y b se sumerge verticalmente en un líquido con su eje mayor paralelo a la superficie del líquido hasta que el centro de la elipse se encuentre a una profundidad h. ¿Cuál es la presión del líquido sobre la superficie?. **Rpta.** $f = \pi\, a\, b\, h\, p$

(45) Un punto del eje X vibra armónicamente alrededor del origen de coordenadas con una velocidad que viene dada por la fórmula $V = V_0 \cos wt$, donde t es el tiempo y V_0 y w constantes. Hallar la ley de la vibración del punto, si t = o, tenia una abscisa x = o. ¿A qué será igual el valor medio de la magnitud absoluta de la velocidad del punto durante el período de la vibración?. **Rpta.** $x = \dfrac{o}{w}\operatorname{sen} wt$

(46) Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de 20p/seg. ¿Cuánto tiempo le tomará llegar al suelo y con que velocidad llegará? ¿Durante qué tiempo esta subiendo la piedra y qué alto llegará?.

Rpta. $t = \frac{5}{4} seg.$, $v = 20\ p/seg$, $t = \frac{5}{8} seg$.

(47) Un hombre en un globo suelta sus binoculares cuando se encuentra a 150p. de altura y esta subiendo a razón de 10p/seg, ¿Cuánto tiempo tardará los binoculares en llegar al suelo y cual es su velocidad de impacto?.

(48) La región limitada por las gráficas $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$, gira alrededor de la recta $3x + 4y + 12 = 0$, calcular el volumen del sólido generado. **Rpta.** $4000\pi u^3$

(49) La región limitada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 5$ gira alrededor de una recta oblicua que pasa por el punto A(1,0). Hallar la ecuación de dicha recta, si el volumen del sólido generado es igual a $40\sqrt{5}\pi\ u^3$. **Rpta.** $3x - 4y - 3 = 0$

(50) Sea R la región del plano limitado por la parábola $y = x^2 - 1$ y la recta $y = x - 1$. Determinar el volumen del sólido obtenido por la rotación de la región R alrededor de la recta $y = x - 1$. **Rpta.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{60}u^3$

(51) La región limitada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 5$ gira alrededor de una recta oblícua que pasa por el punto (-1,0). Hallar la ecuación de la recta si el volumen del sólido generado es igual a $40\sqrt{5}\pi\ u^3$ **Rpta.** $3x + 4y + 3 = 0$

(52) Los vértices de un triángulo son A(0,0), B(a,0), y $C\left(0,\frac{a}{2}\right)$, $a > 0$ calcular el volumen del sólido obtenido por la rotación entorno de la recta $y = x - a$, de la región limitado por el triángulo ABC. **Rpta.** $\frac{5\sqrt{2}\pi\ a^3}{24}u^3$

CAPÍTULO VI

6. INTEGRACIÓN NUMÉRICA.-

6.1 INTRODUCCIÓN.-

Para calcular la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, por el teorema fundamental del cálculo, primero se encuentra una integral indefinida o antiderivada F(x), es decir:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

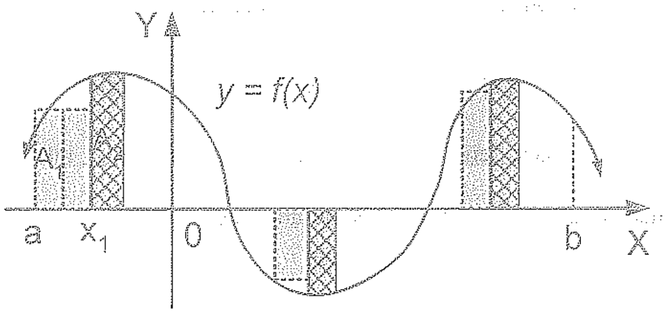
Pero para las integrales tales como $\int_0^1 e^{x^2}dx$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{sen\,x}{x}dx$, $\int_1^2 \frac{senh\,x}{x}dx$, no existe un método conocido para encontrar primero su integral indefinida o antiderivada, sin embargo si la función f es continua en el intervalo cerrado [a,b], la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe y es un número único. Para estos casos en que no se puede encontrar la integral indefinida o antiderivada, veremos los siguientes métodos para calcular un valor aproximado de una integral definida y que puede ser utilizados para calcular una integral definida por medio de computadoras electrónicas.

6.2 REGLA DEL TRAPECIO.-

Si f (x) es una función continua en [a,b] la integral definida es dado por:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta_i x| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta_i x}$$

geométricamente la suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta_i x$ es igual a la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos que están arriba del eje X, más el negativo de los rectángulos que están abajo del eje X.

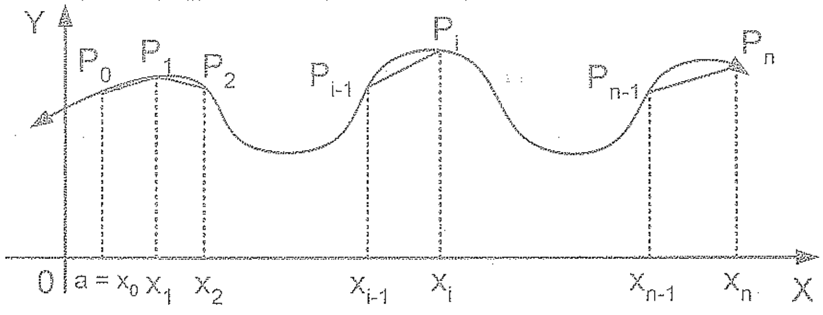


Para aproximar la medida del área de una región, usaremos trapecios en vez de rectángulos, para este caso también usaremos particiones regulares y evaluaremos la función en los puntos cuyas distancias sean la misma.

En la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, al intervalo [a,b] dividiremos en n sub-intervalos cada uno de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, dando n + 1 puntos $x_0 = a$, $x_1 = a+\Delta x$, $x_2 = a+2\Delta x$, ..., $x_i = a+i\Delta x$, ..., $x_{n-1} = a+(n-1)\Delta x$, $x_n = b$.

Luego a la integral $\int_a^b f(x)dx$ expresaremos como la suma de n integrales definidas.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$



La integral $\int_{a}^{x_1} f(x)dx$, da la medida del área de la región acotada por el eje X, las rectas x = a, $x = x_1$ y la porción de la curva $\widehat{P_0P_1}$. Luego a la integral definida $\int_{a}^{x_1} f(x)dx$ se puede aproximar por la medida del trapecio formado por las rectas x = a, $x = x_1$, $\overline{P_0P_1}$ y el eje X, donde la medida de este trapecio es $\frac{1}{2}[f(x_0)+f(x_1)]\Delta x$, en forma similar para las otras integrales, pueden ser aproximadas por la medida del área de un trapecio, mediante el símbolo ≈, entonces para la i-ésima integral definida se tiene:

$$\boxed{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{1}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)]\Delta x}$$

por lo tanto para la integral definida $\int_{a}^{b} f(x)dx$ se tiene:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{1}{2}[f(x_0)+f(x_1)]\Delta x+\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\Delta x+...+\frac{1}{2}[f(x_{n-1})+f(x_n)]\Delta x$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n)] \qquad ... (*)$$

La fórmula (*) se denomina la Regla del Trapecio.

OBSERVACIÓN.- La exactitud de una integral definida por la Regla del Trapecio, se obtiene cuando Δx se aproxima a cero (Δx → 0) y n crece sin límite.

El límite de la aproximación por la regla del trapecio es el valor exacto de la integral definida; es decir:

$$T = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$$T=[f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)]\Delta x+\frac{1}{2}[f(x_0)-f(x_n)]\Delta x$$

$$T=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x+\frac{1}{2}[f(a)-f(b)]\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} T=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{2}[f(a)-f(b)]\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} T=\int_a^b f(x)dx+0 \qquad \therefore \quad \int_a^b f(x)dx=\lim_{\Delta x\to 0} T$$

OBSERVACIÓN.- Al aplicar la ley de los trapecios es posible que se cometan errores, que denotaremos por e y que pueden ser hallados mediante el siguiente teorema.

TEOREMA.- Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a,b] y que f', f'' existen en [a,b].

Si $\varepsilon_T=\int_a^b f(x)dx-T$, donde T es el valor aproximado de $\int_a^b f(x)dx$ que se encontró mediante la Regla Trapecial, entonces existe un número η en [a,b] tal que:

$$\boxed{\varepsilon_T=-\frac{1}{12}(b-a)f''(\eta)(\Delta x)^2}$$

6.3 REGLA DE SIMPSON.-

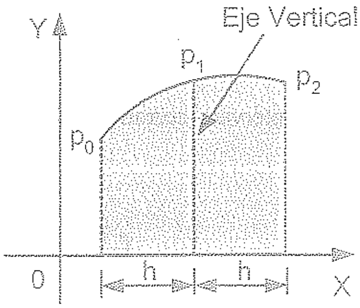
También se conoce con el nombre de la regla parabólica, al calcular la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ por la regla de los trapecios, los puntos sucesivos en la gráfica y = f(x) eran conectados por segmentos de la línea recta, mientras que en la Regla de Simpson, los puntos son conectados por segmentos parabólicos.

La Regla de Simpson da una mejor aproximación que la regla de los trapecios, pero sí, con un mayor esfuerzo.

Para establecer la Regla de Simpson veremos primero el teorema siguiente.

TEOREMA 1.- Si $P_0(x_0,y_0)$, $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ son tres puntos no colineales en la parábola de ecuación $y = Ax^2+Bx+C$, donde $y_0 \geq 0$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $x_1 = x_0+h$, $x_2 = x_0+2h$, entonces la medida del área de la región acotada por la parábola, el eje X y las rectas $x = x_0$, $x = x_2$ está dado por: $\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$.

<u>Demostración</u>



La parábola de ecuación $y = Ax^2+Bx+C$, tiene su eje vertical.

Como los puntos p_0, p_1 y p_2 son de la parábola, entonces se tiene:

$$y_0 = Ax_0^2+Bx_0+C$$

$$y_1 = Ax_1^2+Bx_1+C = A(x_0+h)^2+B(x_0+h)+C$$

$y_2 = Ax_2^2+Bx_2+C = A(x_0+2h)^2+B(x_0+2h)+C$, de donde se tiene:

$$y_0+4y_1+y_2 = A(6x_0^2+12hx_0+8h^2)+B(6x_0+6h)+6C$$

Sea A_R el área de la región acotada por la parábola, el eje X y las rectas $x = x_0$, $x = x_0+2h$, entonces.

$$A_R = \int_{x_0}^{x_0+2h}(Ax^2+Bx+C)dx = \left(\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+Cx\right)\Bigg|_{x_0}^{x_0+2h}$$

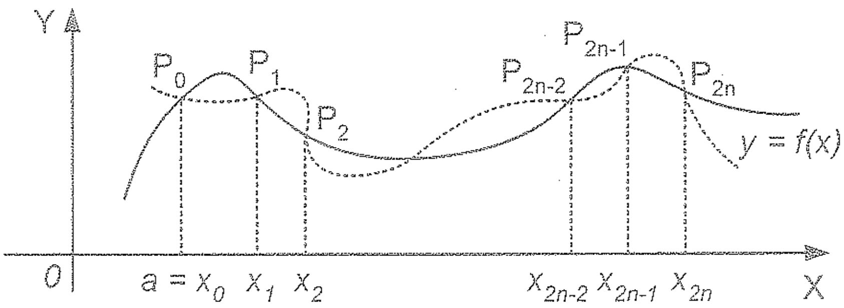
$$A_R = \left[\frac{A}{3}(x_0+2h)^3+\frac{B}{2}(x_0+2h)^2+C(x_0+2h)\right]-\left[\frac{A}{3}x_0^3+\frac{B}{2}x_0^2+Cx_0\right]$$

$$A_R = \frac{h}{3}[A(6x_0^2 + 12hx_0 + 8h^2) + B(6x_0 + 6h) + 6C]$$

$$\boxed{\therefore\ A_R = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)}$$

◈ ◈ ◈

Consideremos una función f continua en el intervalo cerrado [a, b] tal que $f(x) \geq 0$ y tomemos una partición regular en el intervalo [a, b] de 2n sub-intervalos (2n se usa en vez de n) donde la longitud de cada subintervalo esta dado por $\Delta x = \frac{b-a}{2n}$



Aproximemos el segmento de la curva $y = f(x)$ de P_0 a P_2 por el segmento parabólico con su eje a través de P_0, P_1 y P_2 y de acuerdo al teorema se tiene:

La medida del área de la región acotada por esta parábola, el eje X y las rectas $x = x_0$, $x = x_2$ en $\Delta x = h$ es: $\frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ o $\frac{\Delta x}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$.

En forma análoga para el segmento de la curva $y = f(x)$ de P_2 a P_4 se tiene:

$$\frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) \text{ o } \frac{\Delta x}{3}(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))$$

y para la última región se tiene:

$$\frac{\Delta x}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \text{ o } \frac{\Delta x}{3}(f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))$$

la suma de la medida de las áreas de estas regiones aproxima la medida del área de la región acotada por la curva de ecuación y = f(x), el eje X y las rectas x = a, x = b y como $\int_a^b f(x)dx$ da la medida de la región, entonces una aproximación para esta integral es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2))+\frac{\Delta x}{3}(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4))+\ldots+$$

$$+\frac{\Delta x}{3}(f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n}))$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\ldots+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n}))} \ldots(*)$$

A la ecuación (*) se le denomina La Regla de Simpson.

OBSERVACIÓN.- Así como en la regla de los trapecios se comete un error E_T, también en la regla de Simpson se comete un error E_S y es calculado mediante el teorema siguiente.

TEOREMA 2.- Si y = f(x) una función continua en el intervalo [a,b] y si f', f'', f''' y f^{iv} existen en [a,b], si $E_S = \int_a^b f(x)dx - S$, donde S es el valor aproximado de $\int_a^b f(x)dx$, entonces ∃ k ∈ [a,b] tal que:

$$\boxed{E_S = -\frac{1}{180}(b-a)f^{iv}(k)(\Delta x)^4}$$

OBSERVACIÓN.- Si f(x) es un polinomio de grado 3 o menor entonces $f^{iv}(x)=0 \Rightarrow E_S = 0$ entonces la regla de Simpson da un valor exacto para la integral $\int_a^b f(x)dx$

Al aplicar la regla de Simpson a la integral $\int_a^b f(x)dx$ donde f (x) es un polinomio de tercer grado y tomemos $2n = 2$, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, $\Delta x = \frac{b-a}{2}$, el valor exacto de la integral $\boxed{\int_a^b f(x)dx : \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]}$ ...(*)

A la ecuación (*) se denomina la fórmula Prismoidal.

6.4 PROBLEMAS DESARROLLADOS.-

1. Calcular el valor aproximado de la integral definida por la regla trapecial para el valor de n indicado $\int_2^3 \sqrt{1+x^2}\,dx$, n = 6.

Solución

Hallaremos $\Delta x = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6} = 0,16$; $x_0 = 2$, $x_i = x_0 + i\Delta x$ para i = 1,2,...,6

$$\int_2^3 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+2f(x_4)+2f(x_5)+f(x_6))$$

i	x_i	k	$\frac{\Delta x}{2}$	$f(x_i)$	$k.\frac{\Delta x}{2}.f(x_i)x$
0	2,00	1	0,08	2,236067	0,17888
1	2,16	2	0,08	2,38025	0,38004
2	2,32	2	0,08	2,52634	0,404214
3	2,48	2	0,08	2,67402	0,42784
4	2,64	2	0,08	2,82304	0.45168
5	2,80	2	0,08	2,977321	0,47571
6	2,96	1	0,08	3,12435	0,49989
					2,81825

$$\int_2^3 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx 2,818825\,,\quad f(x)=\sqrt{1+x^2}$$

(2) Calcular el valor aproximado de la integral definida por la regla del trapecio para el valor indicado de n $\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx$, n = 6

Solución

Hallaremos $\Delta x = \dfrac{2-0}{6} = \dfrac{1}{3}$

$x_0 = 0\ ,\ \ x_i = x_0 + i\Delta x$ para i = 0, 1, 2,..., 6 además $f(i) = \sqrt{1+x_i^4}$

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx = \Delta x\left[\frac{f(x_0)+f(x_6)}{2} + f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)\right]$$

i	x_i	$f(x_i)=\sqrt{1+x_i^4}$
0	0	1,0000000
1	$\frac{1}{3}$	1,0061539
2	$\frac{2}{3}$	1,0943175
3	1	1,4142136
4	$\frac{4}{3}$	2,0397289
5	$\frac{5}{3}$	2,9522956
6	2	4.1231056

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx \approx \Delta x\left[\frac{f(x_0)+f(x_6)}{2} + f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)\right]$$

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx \approx \frac{1}{3}(2,05615528+8,5067095)$$

$$\therefore \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx \approx 3,6894208 \text{ aprox.}$$

(3) Calcular el valor aproximado de la integral definida por la regla trapecial para el valor indicado de n. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, n = 5

Solución

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \Delta x = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Hallaremos los valores de x_i

x_0, $x_1 = x_0 + \Delta x$, $x_2 = x_0 + 2\Delta x$,, $x_3 = x_0 + 3\Delta x$, $x_4 = x_0 + 4\Delta x$, $x_5 = x_0 + 5\Delta x$

Los valores encontrados mostraremos en el siguiente cuadro

i	x_i	k	$\frac{\Delta x}{2}$	$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{1+x_i^2}}$	$\frac{\Delta x}{2}.k.f(x_i)$
0	0,0	1	0,1	1,0000000	0,1000000
1	0,2	2	0,1	0,9805806	0,1961 161
2	0,4	2	0,1	0,9284767	0,1856953
3	0,6	2	0,1	0,8574429	0,1714985
4	0,8	2	0,1	0,7808688	0,1561737
5	1,0	1	0,1	0,7071068	0,0707106
				Suma total	0,8801942

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \approx 0,880$$

Calculando la integral por el método usual.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})-\ln(1) = \ln|1+1,414213| = 0,88137358$$

Calculando el error por la regla de trapecio: $E_t = -\frac{1}{12}(b-a)f''(k)(\Delta x)^2$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow f''(x) = 3x^2(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

Luego el intervalo $[0,1]$: $f''(0)=0$, $f''(1) = \frac{3}{0,6568}$ reemplazando tenemos:

$$-\frac{1}{12}(1-0)f''(1)(\Delta x)^2 \le E_t \le -\frac{1}{2}(1-0)f''(0)(\Delta x)^2$$

$$-\frac{1}{12}\cdot\frac{(3)(0,2)^2}{5,6568} \le E_t \le \frac{3(0)(0,2)^2}{(12)(5,6568)}$$

$$-1,76778x10^{-3} \le E_t \le 0$$

4 Aproximar la integral definida por la regla de Simpson usando el valor indicado de 2n.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}, \ 2n = 8$$

Solucion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}, \quad \Delta x = \frac{b-a}{2n} = \frac{2-0}{2n} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$x_0 = 0, \quad x_i = x_0 + i\Delta x = \frac{i}{4}$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \approx \frac{\Delta x}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+$$

$$+4f(x_5)+2f(x_6)+4f(x_7)+f(x_8))$$

i	x_i	k	$f(x_i)$	$k\,f(x_i)$
0	0,00	1	1,0000	1,0000
1	0,25	4	0,9922	3,9688
2	0,50	2	O,9428	1,8856.
3	0,75	4	0,8386	2,5544
4	1,00	2	0,7071	1,4142
5	1,25	4	0,58 19	2,3276
6	1,50	2	0,4780	0,9560
7	1,75	4	0,3965	1,5860
8	2,00	1	0,3333	0,3333
				16,1259

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \approx \frac{\Delta x}{3}(16,1259) \approx 1,3438$$

5. Aproximar la integral definida por la regla de Simpson usando el valor indicado de 2n.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}, \quad 2n = 4$$

Solución

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}, \quad \Delta x = \frac{b-a}{2n} = \frac{1}{4} = 0,25, \text{ además: } \quad x_0 = 0, \quad x_i = x_0 + i\Delta x = \frac{i}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} \approx \frac{\Delta x}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4))$$

i	x_i	k	$f(x_i)$	$k\,f(x_i)$
0	0,00	1	1,0000	1,0000
1	0,25	4	0,76 19	3,0476
2	0,50	2	0,5714	1,1428
3	0,75	4	0,4324	1,7296
4	1,00	1	0,333	0,3333
			Suma	7,2533

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} \approx \frac{\Delta x}{3}(1+3,0476+1,1428+1,7296+0,333) \approx \frac{1}{12}(7,253) = 0,6044$$

(6) Aproximar la integral definida por la regla de Simpson usando el valor indicado 2n.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad 2n = 4$$

Solución

$$f(x) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \approx \frac{\Delta x}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4))$$

i	x_i	k	$f(x_i)$	$k\,f(x_i)$
0	0,00	1	1,000000	1,00000
1	0,25	4	0,970143	3,88057
2	0,50	2	0,894427	1,78885
3	0,75	4	0,800000	3,20000
4	1,00	1	0,707107	0,70711
			Suma	10,57653

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \approx \frac{\Delta x}{3}(10,576531) = (0,0833)(10,576531) \approx 0,8813776$$

Calcular el error para la regla de Simpson: $E_s = -\frac{1}{180}(b-a)f''(k)(\Delta x)^2$

$$f(x) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Rightarrow \quad f^{iv}(x) = 105x^4(1+x^2)^{-\frac{9}{2}}, \text{ como } [0,1]$$

$$f^{iv}(0) = 0\,, \quad f^{iv}(1) = \frac{105}{22,627416}$$

para $\quad k = 0,\ E_s = -\frac{1}{180}(1)(0)\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0$

$$k = 1,\ E_s = -\frac{1}{180}(1)\left(\frac{105}{22,627416}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2 = -1,61124x10^{-3}$$

$$\therefore \quad -1,61124 \le E_s \le 0$$

7. Calcular el valor aproximado de la integral definida por la regla de Simpson para el valor indicado 2n; $\int_0^{\pi} sen\,x\,dx$, 2n = 6

Solución

f(x) = sen x, $\Delta x = \frac{\pi}{6}$, $x_0 = 0$, $x_i = x_0 + i\Delta x$

i	x_i	k	$\frac{\Delta x}{3}$	$f(x_i)$	$k\frac{\Delta x}{3}f(x_i)$
0	0	1	$\frac{\pi}{18}$	0,00000	0,17453292
1	$\frac{\pi}{6}$	4	$\frac{\pi}{18}$	0,50000	0,34906585
2	$\frac{\pi}{3}$	2	$\frac{\pi}{18}$	0,86602	0,30229975
3	$\frac{\pi}{2}$	4	$\frac{\pi}{18}$	1,00000	0,6981317
4	$\frac{2\pi}{3}$	2	$\frac{\pi}{18}$	0,86602	0,30229975
5	$\frac{5\pi}{6}$	4	$\frac{\pi}{18}$	0,50000	0,34906585
6	π	1	$\frac{\pi}{18}$	0,00000	0,00000000
					2,17539583

$$\int_0^{\pi} sen\,x\,dx = \frac{\Delta x}{3}(2,175395831) = (0,174532925)(2,175395831)$$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi} sen\,x\,dx = 0,379678197$$

6.5 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Usando los métodos de los trapecios y de Simpson, estimar el valor de cada integral, redondear las soluciones de cuatro cifras decimales.

① $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$, n = 4 **Rpta.** T: 2,7500 , S: 2,6667

② $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, n = 4 **Rpta.** T: 0,7828 , S : 0,7854

③ $\int_0^2 x^3 dx$, n = 4 Rpta. T: 4,2500 , S: 4,0000

④ $\int_0^2 x^3 ddx$, n = 8 Rpta. T: 4,0625 , S: 4,0000

II. Aproxime las integrales usando.

a) El método de los trapecios. b) Él Método de Simpson

① $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$, n = 4 Rpta. a) 0,957 b) 0,978

② $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\, dx$, n = 2 Rpta. a) 3,41 b) 3,22

③ $\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1-x}\, dx$, n = 4 Rpta. a) 0,342 b) 0,372

④ $\int_0^1 sen\, x^2 dx$, n = 2 Rpta. a) 0,334 b) 0,305

⑤ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\, tg\, x\, dx$, n = 4 Rpta. a) 0,194 b) 0,186

⑥ $\int_{-3}^1 e^{x^2} dx$, n = 4 Rpta. a) $\frac{5e}{64} \approx 0,212$ b) $\frac{13e}{1024} \approx 0,035$

III. Por la regla del trapecio aproximar la integral:

① $\int_1^4 \frac{x\, dx}{\sqrt{10+x^3}}$, n = 6 Rpta. 1,13

② $\int_2^8 \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{4+x^2}}$, n = 6 Rpta. 9,47

3) $\int_0^2 x^2\sqrt{16-x^4}\,dx$, n = 4 Rpta. 6,156

4) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4+x^3}}$, n = 4 Rpta. 1,227

IV. Por la regla de Simpson, aproximar la integral.

1) $\int_2^8 \sqrt{64-x^2}\,dx$, 2n = 6 Rpta. 0,561

2) $\int_1^5 \sqrt{126-x^3}\,dx$, 2n=4 Rpta. 35,306

3) $\int_1^5 \sqrt[3]{x^3-x}\,dx$, 2n = 4 Rpta. 11,140

4) $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$, 2n = 6 Rpta. 3,24

CAPÍTULO VII

7. ECUACIONES PARAMÉTRICAS.-

7.1 REPRESENTACIÓN DE CURVAS EN FORMA PARAMÉTRICA

Las coordenadas (x,y) del punto P de una curva pueden estar dadas en función de una tercera variable, llamado parámetro es decir:

$$C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad \ldots (1)$$

A la expresión dada en (1) se denomina ecuaciones paramétricas, en donde cada valor de t le corresponde un punto $p\big(f(t), g(t)\big)$ del plano XY.

El lugar geométrico que describe el punto P se denomina curva parametrizada de la ecuación paramétrica, para obtener la ecuación cartesiana se elimina el parámetro t y de esa manera se obtiene una ecuación en forma cartesiana.

$$y = f(x) \;\; ó \;\; E(x,y) = 0$$

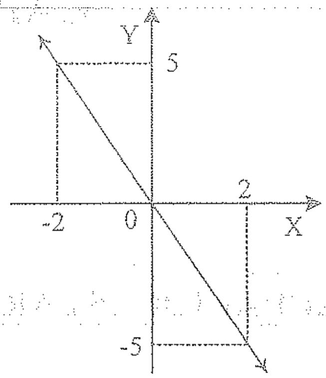
Ejemplo.- Trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones paramétricas.

1. $x = 2t\ ,\ y = -5t$

Solución

Para trazar la gráfica primeramente hacemos una tabulación

t	x	y
0	0	0
1	2	-5
2	4	-10
-1	-2	5
-2	-4	10

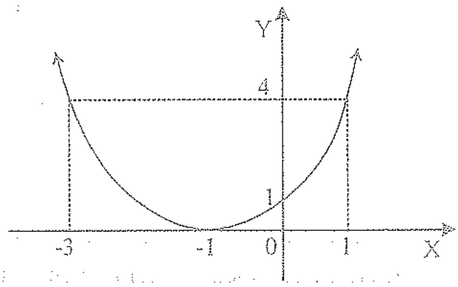


② $x = t - 1, \quad y = t^2$

Solución

Para trazar la gráfica hacemos una tabulación.

t	x	y
0	-1	0
1	0	1
-1	-2	-1
2	1	4
-2	-3	4



Ejemplos.- Trazar la gráfica de las ecuaciones paramétricas pasando a coordenadas cartesianas.

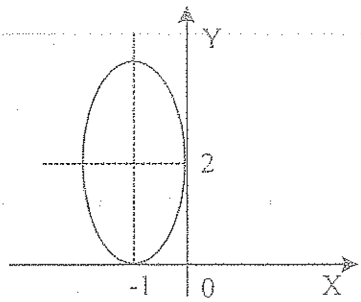
① $x = -1 + \cos\theta, \; y = 2 + 2 \operatorname{sen}\theta$

Solución

$$\begin{cases} x = -1 + \cos\theta \\ y = 2 + 2\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = \cos\theta \\ \dfrac{y-2}{2} = \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$, elevando al cuadrado para eliminar el parámetro.

$$(x+1)^2+\frac{(y-2)^2}{4}=\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=1$$

$$(x+1)^2+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$, que es una elipse

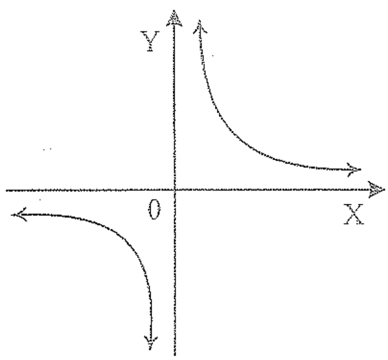


2) $x=t,\quad y=\frac{1}{t}$

Solución

Para obtener la ecuación cartesiana, eliminaremos el parámetro t.

$$\begin{cases} x=t \\ y=\frac{1}{t}\end{cases} \Rightarrow xy=1$$ ecuación cartesiana.



7.2 DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS.-

Consideremos dos funciones f y g derivables en un intervalo $[a,b]$ tal que:

$$\boxed{\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t)\end{cases}} \qquad \ldots (\alpha)$$

son las ecuaciones paramétricas.

La derivada $\frac{dy}{dx}$ cuando x e y están dados en forma paramétrica se obtiene aplicando la regla de la cadena, es decir:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)},\quad f'(t)\neq 0}$$

para obtener la segunda derivada, se aplica nuevamente la regla de la cadena, es decir:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)}{f'(t)}=\frac{\frac{f'(t)g''(t)-f''(t)g'(t)}{(f'(t))^2}}{f'(t)}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{f'(t)g''(t)-f''(t)g'(t)}{(f'(t))^3}}$$

Generalizando se tiene: $\boxed{\dfrac{d^ny}{dx^n}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^{n+1}}}$

OBSERVACIÓN.-

1) La primera derivada $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$ nos permite determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de acuerdo al signo de la derivada.

2) La segunda derivada $\dfrac{dy^2}{dx^2}=\dfrac{f'(t)g''(t)-f''(t)g'(t)}{(f'(t))^3}$ nos permite determinar la dirección de la concavidad en cada punto de la curva.

Ejemplo.- Calcular la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de las funciones dadas en forma paramétrica.

(1) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -\dfrac{1}{(t+1)^2} \\ y'(t) = \dfrac{2t}{(t+1)^3} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\dfrac{2t}{(t+1)^3}}{-\dfrac{1}{(t+1)^2}} = -\frac{2t}{t+1} \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2t}{t+1}$$

(2) $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ para $t = \dfrac{\pi}{2}$

Solución

$$\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = a(1-\cos t) \\ y'(t) = a \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a \operatorname{sen} t}{a(1-\cos t)} = \frac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t} \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t}$$

Luego: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{1-0} = 1 \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1$

Ejemplos.- Encontrar la ecuación de la tangente y normal de la curva especifica en el punto correspondiente al valor dado del parámetro.

(1) $x = t^2 + 1, \quad y = t^3 + 2t, \quad t = -2$

Solución

El punto para $t = -2$ es $P(5,-12)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2+2}{2t} \Rightarrow mL_t = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=-2} = -\frac{7}{2}$$

$$L_t : y+12 = -\frac{7}{2}(x-5)$$

$$m_{l_n} = -\frac{1}{m_{l_t}} = \frac{2}{7} \qquad \therefore \; l_n : y+12 = \frac{2}{7}(x-5)$$

(2) $x = 4\cos t,\quad y = 2\,\text{sen}^2 t,\quad t = \dfrac{\pi}{3}$

Solución

El punto para $t = \dfrac{\pi}{3}$ es $P\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4\,\text{sen}\,t\cos t}{-4\,\text{sen}\,t} = -\cos t$$

$$m_{l_t} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$L_t : y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x-2) \qquad \therefore \; l_n : y - \frac{3}{2} = 2(x-2)$$

7.3 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS.-

7.3.1 AREA BAJO UNA CURVA DADA EN FORMA PARAMÉTRICA.-

Consideremos una curva C definida mediante las ecuaciones paramétricas.

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases},\quad t \in [\alpha, \beta]$$

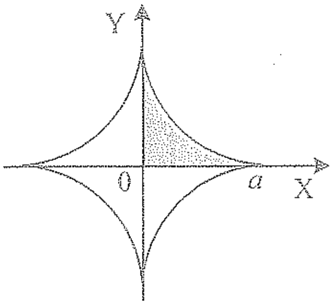
Entonces el área de la región acotada por está curva, el eje X y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ se expresa mediante la integral

$$\boxed{A=\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,f'(t)\,dt}$$

donde α y β se determinan de las ecuaciones $a=f(\alpha)$; $b=f(\beta)$ y $g(t)\geq 0$ en $[\alpha,\beta]$

Ejemplo.- Hallar el área contenida en el interior de la astroide $x=a\cos^3 t$, $y=b\,\text{sen}^3 t$.

Solución



Aplicando la simetría, el área de la región es dado por:

$$A=4\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,f'(t)\,dt$$

ahora calculamos los límites de integración.

$$x=f(t)=a\cos^3 t \;\Rightarrow\; f(\alpha)=0 \;\Rightarrow\; a\cos^3\alpha=0 \;\Rightarrow\; \alpha=\frac{\pi}{2}$$

$$f(\beta)=a \;\Rightarrow\; a\cos^3\beta=a \;\Rightarrow\; \beta=0$$

$$f(t)=a\cos^3 t \;\Rightarrow\; f'(t)=-3a\cos^2 t\,\text{sen}\,t$$

$$A=4\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,f'(t)\,dt=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\,\text{sen}^3 t(-3a\cos^2 t\,\text{sen}\,t)dt=12ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}^4 t\cos^2 t\,dt$$

$$=\frac{12ab}{8}\left(\frac{t}{2}-\frac{\text{sen}\,4t}{8}-\frac{\text{sen}^3 2t}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3ab}{2}\left(\frac{\pi}{4}-0-0\right)=\frac{3ab\pi}{8}$$

$$\therefore\quad A=\frac{3ab\pi}{8}u^2$$

7.3.2 LONGITUD DE ARCO CUANDO LA CURVA ES DADA POR ECUACIONES PARAMÉTRICAS.-

Si la ecuación de la curva C es dada en forma paramétrica mediante un par de funciones con derivadas continuas, es decir:

$$\boxed{C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta]}$$

entonces la longitud de la curva C es: $\boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt}$

Ejemplo.- Hallar la longitud del arco de la curva $x = t^3$, $y = t^2$ desde $t = 0$ hasta $t = 4$.

Solución

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2t \end{cases}$$

$$L = \int_0^4 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^4 \sqrt{9t^4 + 4t^2}\, dt = \int_0^4 t\sqrt{9t^2 + 4}\, dt = \frac{1}{27}(9t^2 + 4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4$$

$$= \frac{8}{27}(37\sqrt{37} - 1)u \qquad \therefore \quad L = \frac{8}{27}(37\sqrt{37} - 1)u$$

7.3.3 ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN CUANDO LA CURVA ES DADA EN FORMA PARAMÉTRICA.

Si la curva es dada por las ecuaciones paramétricas: $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ donde $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ son continuas en $\alpha \le t \le \beta$, entonces el área de la superficie obtenido por rotación alrededor del eje X, del arco de la curva desde $t = \alpha$ hasta $t = \beta$ es expresado por la fórmula:

$$\boxed{A = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt}$$

OBSERVACIÓN.- Cuando se rota alrededor del eje Y el área de la superficie es dado por:

$$\boxed{A = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt}$$

Ejemplo.- Hallar el área de la superficie de la esfera engendrada al rotar un círculo de radio 4 alrededor de un diámetro.

Solución

Con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas la ecuación del círculo de radio 4 es: $x^2 + y^2 = 16$, cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 4\cos t$, $y = 4\,\text{sen}\, t$ entonces:

$\frac{dx}{dt} = -4\,\text{sen}\, t$, $\frac{dy}{dt} = 4\cos t$, donde el área de la superficie es dado por:

$$A = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = 2\pi\int_{0}^{\pi} 4\,\text{sen}\, t\sqrt{16\cos^2 t + 16\,\text{sen}^2\, t}\, dt$$

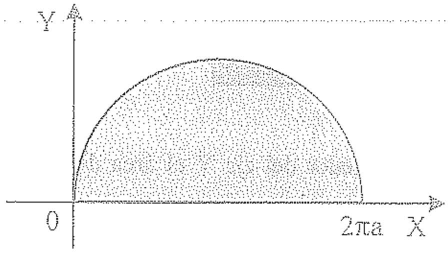
$$= 2\pi\int_{0}^{\pi} 16\,\text{sen}\, t\, dt = -32\pi\cos t\Big|_{0}^{\pi} = 64\pi u^2$$

NOTA.- Cuando t varia desde $t = 0$ hasta $t = \pi$ se obtiene el semicírculo de diámetro sobre el eje X.

7.4 PROBLEMAS DESARROLLADOS.-

(1) Hallar el área de la región bajo un arco de la curva $x = at$, $y = a(1-\cos t)$.

Solución



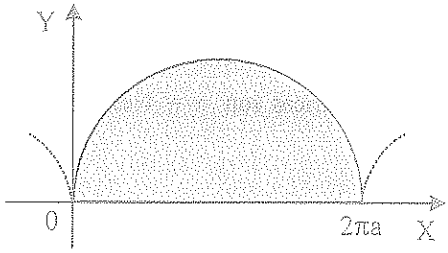
$$A=\int_0^{2\pi} y\,dx=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a\,dt$$

$$A=a^2(t-\operatorname{sen} t)\Big/_0^{2\pi}=2a^2\pi$$

$$\therefore\quad A=2a^2\pi$$

(2) Hallar el área limitada por la cicloide dada por: $x(t)=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$, y por el eje X entre dos puntos sucesivos de intersección con el eje X.

Solución



$$A=\int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,dt$$

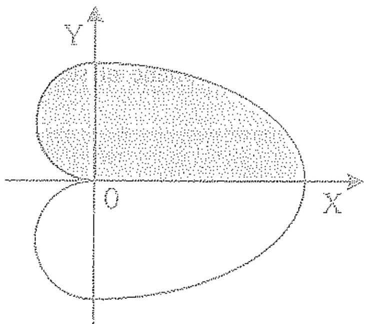
$$A=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)\,dt$$

$$A=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt$$

$$A=a^2\left(\frac{3t}{2}-2\operatorname{sen} t+\frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=a^2(3\pi-0)=3\pi a^2 \qquad \therefore\quad A=3\pi a^2u^2$$

(3) Hallar el área de la región limitada por la cardioide $\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t) \\ y=a(2\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} 2t)\end{cases}$

Solución



Como la cardioide es simétrica su área es:

$$\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t) \\ y=a(2\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} 2t)\end{cases} \Rightarrow A=2\int_\pi^0 y(t)x'(t)\,dt$$

$$A=2\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt \text{ de donde } x'(t)=2a(\operatorname{sen} 2t-\operatorname{sen} t)$$

$$A = 8a^2 \int_{\pi}^{0} (\operatorname{sen} t - \cos t \cdot \operatorname{sen} t)(2 \operatorname{sen} t \cos t - \operatorname{sen} t)\,dt$$

$$A = -8a^2 \int_{\pi}^{0} \operatorname{sen}^2 t(1 - 3\cos t + 2\cos^2 t)dt$$

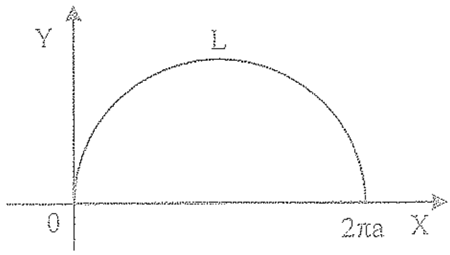
$$A = -8a^2 \left(\frac{3t}{4} - \frac{\operatorname{sen} t \cos t}{2} - \operatorname{sen}^3 t - \frac{\operatorname{sen} 2t \cos 2t}{8} \right)\Bigg|_{\pi}^{0}$$

$$A = -8a^2 \left(0 - \frac{3\pi}{4} \right) = 6a^2\pi \qquad \therefore \quad A = 6a^2\pi$$

(4) Hallar la longitud de un arco completo de la cicloide $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(1 - \cos t) \\ \dfrac{dy}{dt} = a \operatorname{sen} t \end{cases}$$



$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

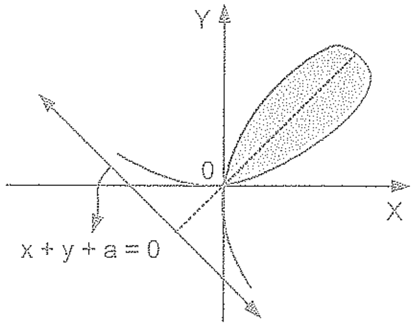
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t) + a^2 sen^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt = \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,dt$$

$$= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} sen\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2a \int_0^{2\pi} sen\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2a\left(2\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -4a[-1-1] = 8a$$

$$\therefore \quad L = 8a$$

(5) Hallar el área de la figura limitada por el lazo del Folium de Descartes $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$, $t \neq 1$.

Solución



$$A=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \text{ donde}$$

$$x(t)=\frac{3at}{1+t^3} \Rightarrow x'(t)=\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$$

para $\alpha = 0$, $\beta = +\infty$

Luego el área de la región es:

$$A=\int_0^{+\infty}\frac{3at^2}{1+t^3}.\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}dt=9a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2-2t^5}{(1+t^3)^3}dt$$

$$=9a^2\left[\int_0^{+\infty}\frac{3t^2dt}{(1+t^3)^3}-2\int_0^{+\infty}\frac{t^5+t^2}{(t^3+1)^3}dt\right]$$

$$=9a^2\left[-\frac{1}{2(1+t^3)^2}+\frac{2}{3(1+t^3)}\right]\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{3a^2}{2} \qquad \therefore\ A=\frac{3a^2}{2}u^2$$

(6) Encontrar la longitud total de la curva dada por: x = a (2 cos t – cos 2t), y = a(2 sen t – sen 2t).

Solución

Como la curva es simétrica con respecto al eje X, y además se tiene que cuando t varia de t = 0 hasta t = π el punto P (x, y) recorre la parte superior de la curva, entonces.

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t) \\ y=a(2sen\,t-sen\,2t)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a(-2sen\,t+2\,sen\,2t) \\ \dfrac{dy}{dt}=a(2\cos t-2\cos 2t)\end{cases}$$

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(-2sent+2sen2t)^2+a^2(2\cos t-2\cos 2t)^2}\,dt$$

$$=8a\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,dt=8a\int_0^{\pi}sen\left(\frac{t}{2}\right)dt=-16a\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=16a$$

$\therefore$ L = 16a

(7) Calcular el área de la superficie generada por la rotación alrededor del eje X, del arco de la curva $x=e^t sen t$, $y=e^t\cos t$ desde t = 0 hasta $t=\frac{\pi}{2}$.

Solución

$$\begin{cases}x=e^t sen t\\ y=e^t\cos t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=e^t(sen t+\cos t)\\ \dfrac{dy}{dt}=e^t(\cos t-sen t)\end{cases}$$

$$A=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^t\cos t.\sqrt{2}e^t\,dt$$

$$A=2\sqrt{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\cos t\,dt=\frac{2\sqrt{2}}{5}(e^{2t}(sen t+2\cos t))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\qquad\therefore A=\frac{2\sqrt{2}\pi}{5}(e^{\pi}-2)u^2$$

(8) Hallar el área de la superficie generada por la rotación alrededor del eje Y, del arco de la curva $y=\frac{1}{4}(x^2-2\ln x)$, x ∈ [1,4].

Solución

Paramétrizando la curva se tiene:

$$\begin{cases}x=t\\ y=\dfrac{1}{4}(t^2-2\ln t)\end{cases},\ t\in[1,4],\ \text{calculando sus derivadas.}$$

$\frac{dx}{dt}=1$; $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$, de donde el área de la superficie es:

$$A=2\pi\int_1^4 x(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=2\pi\int_1^4 t\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}\,dt=2\pi\int_1^4 t\sqrt{\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}\,dt$$

$$=2\pi\int_1^4 \frac{t}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)dt=\pi\int_1^4 (t^2+1)dt=\pi\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Bigg|_1^4=24\pi$$

$$\therefore\quad A=24\pi\,u^2$$

(9) Hallar el área de la superficie engendrada al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, alrededor:

a) Del eje X

b) Del eje Y (a > b)

Solución

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ paramétrizando ésta curva: x = a cos t , y = b sen t

Por ser simétrica con respecto al eje X se tiene:

Para: x = 0 $\Rightarrow$ $t=\frac{\pi}{2}$; x = a $\Rightarrow$ t = 0

$$A=2\left[2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\right]$$

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\,sen\,t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt}=-a\,sen\,t \\ \frac{dy}{dt}=b\cos t \end{cases}$$ que al reemplazar tenemos:

$$A4\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\,sent\sqrt{a^2sen^2t+b^2\cos^2 t}\,dt=4\pi b\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sent\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}\,dt$$

$$A=4b\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sent\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\,dt=4\pi\sqrt{a^2-b^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}-\cos^2 t}\;sent\,dt$$

$$A=4\pi\sqrt{a^2-b^2}\left[\frac{\cos t}{2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}-\cos^2 t}+\frac{a^2}{2(a^2-b^2)}arcsen\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cos t\right]_{\pi}^{0}$$

Evaluando y simplificando se tiene: $A=2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{E}arcsen\,E$ donde $E=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

En forma similar para la parte b).

$$A=2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{E}\ln\left(\frac{1+E}{1-E}\right)\quad \text{donde}\quad E=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

(10) Calcular el área de la superficie obtenida al rotar un arco comprendido de la cicloide $\begin{cases} x=a(t-sent) \\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$, alrededor de la tangente a la cicloide en su punto más alto.

<u>Solución</u>

Un arco completo de la cicloide se obtiene cuando t varia desde 0 hasta 2π, en donde el punto más alto en este intervalo es cuando t = π y como $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\,sent}{a(1-\cos t)}$

entonces la pendiente de la tangente es $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\pi}=0$

Luego la ecuación de la tangente es y = 2a. Como la distancia del punto (x,y) de la cicloide a la recta tangente es (2a – y) por lo tanto el área pedida es:

$$A=2\pi\int_0^{2\pi}(2a-y)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\text{ , pero: }\begin{cases}x=a(t-sent)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)\\ \dfrac{dy}{dt}=a\,sent\end{cases}$$

$$A=2\pi\int_0^{2\pi}(2a-y)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\text{ , reemplazando se tiene:}$$

$$A=2\pi a\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\sqrt{2a^2(1-\cos t)}dt$$

$$A=2\pi a^2\int_0^{2\pi}2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right).2sen\left(\frac{t}{2}\right)dt=8a^2\pi\int_0^{2\pi}\cos^2\left(\frac{2t}{2}\right).sen\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

$$A=-\frac{16a^2\pi}{3}.\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=-\frac{16a^2\pi}{3}[-1-1]=\frac{32\pi a^2}{3}\qquad\therefore\quad A=\frac{32\pi a^2}{3}u^2$$

7.5. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Construir las gráficas de las siguientes ecuaciones dadas en forma paramétrica:

① $\begin{cases}x=2^t+e^{-t}\\ y=2^t-2^{-t}\end{cases}$ ② $\begin{cases}x=a(2\cos t-\cos^2 t)\\ y=a(2\,sent-sen2t)\end{cases}$ ③ $\begin{cases}x=\dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}\\ y=\dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}}\end{cases}$

④ $\begin{cases}x=\dfrac{t-1}{t+1}\\ y=\dfrac{1}{t}\end{cases}$ ⑤ $\begin{cases}x=t-t^2\\ y=t^2-t^3\end{cases}$ ⑥ $\begin{cases}x=10\cos^3 t\\ y=10\,sen^3 t\end{cases}$

⑦ $\begin{cases}x=t^2-2t\\ y=t^2+2t\end{cases}$ ⑧ $\begin{cases}x=\sqrt{1-t^2}\\ y=arcsent\end{cases}$ ⑨ $\begin{cases}x=e^t\\ y=e^{-t}\end{cases}$

⑩ $\begin{cases}x=e^{2t}-1\\ y=1-e^{-t}\end{cases}$ ⑪ $\begin{cases}x=3\,sent\\ y=4\,tg\,t\sec t\end{cases}$ ⑫ $\begin{cases}x=t-tgh\,t\\ y=\sec h\,t\end{cases}$

(13) $\begin{cases} x = 3\sqrt{t-2} \\ y = 2\sqrt{4-t} \end{cases}$ (14) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = \ln|t| \end{cases}$

II. En cada una de las ecuaciones, encontrar $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, en donde:

(1) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = a(\operatorname{sen} t - t\cos t) \\ y = a(\cos t + t\operatorname{sen} t) \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\operatorname{sen} t \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x = \operatorname{arcsen} t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{1-t} \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\operatorname{sen} t \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^n \end{cases}$ (9) $\begin{cases} x = a\theta - a\operatorname{sen}\theta \\ y = a - a\cos\theta \end{cases}$

(10) $\begin{cases} y = e^t + \cos t \\ x = e^t - \operatorname{sen} t \end{cases}$ (11) $\begin{cases} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = (1-\pi)^2 \end{cases}$ (12) $\begin{cases} x = e^{2t} + 1 \\ y = 1 - e^{-t} \end{cases}$

III. Hallar las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva en el punto correspondiente al valor del parámetro que se indica:

(1) $\begin{cases} x = 1 + 3\operatorname{sen} t \\ y = 2 - 5\cos t \end{cases}$, $t = \dfrac{\pi}{6}$ (2) $\begin{cases} x = 2\operatorname{sen} t \\ y = 5\cos t \end{cases}$, $t = \dfrac{\pi}{3}$

(3) $\begin{cases} x = a(1 - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $t = \dfrac{\pi}{4}$ (4) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\operatorname{sen}^3 t \end{cases}$, $t = \dfrac{\pi}{4}$

(5) $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{t^3+1} \\ y = \dfrac{3t^2}{t^3+1} \end{cases}$, $t = 0$ (6) $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2\operatorname{sen}^3 t \end{cases}$, $t = \dfrac{\pi}{3}$

(7) $\begin{cases} x = 3\operatorname{sen} t - 8 \\ y = 5 + 2\operatorname{sen} t \end{cases}$, $t = \dfrac{5\pi}{4}$ (8) $\begin{cases} x = ae^t\cos t \\ y = ae^t\operatorname{sen} t \end{cases}$, $t = 0$

IV.

1. Hallar el área de la región limitada por el astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\,sen^3 t$.

   Rpta. $\frac{3a^2\pi}{8}u^2$

2. Hallar el área de la superficie comprendida entre el eje X y el arco de la cicloide x=a(t – sen t), y = a(1 – cos t). Rpta. $3a^2\pi\ u^2$

3. Hallar el área de la figura limitada por una rama de la Trocoide, x = at – b sen t, y = a – b cos t, (0 < b ≤ a). Rpta. $(b^2 + 2ab)\pi u^2$

4. Hallar el área de la región encerrada por los lazos de las curvas.

   a) $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ Rpta. $\frac{72\sqrt{3}}{5}u^2$

   b) $x = t - t^2$, $y = t^3 - 3t$ Rpta. $\frac{81}{20}u^2$

   c) $x = \cos^3 t$, $y = \cos^2 t.sen\,t$ Rpta. $\frac{3\pi}{8}$

5. Determinar el área encerrada por el lazo de la curva descrita por: $x = t^2 - 2t$, $y = t^3 - 12t$ w Rpta. $129,6\ u^2$

6. Hallar el área encerrada por: $x = t^3 - 1$, $y = t^2 + t$. Rpta. $\frac{1}{60}u^2$

7. Hallar el área de la región limitada por la curva $x = a\cos^5 t$, $y = b\,sen^5 t$

   Rpta. $\frac{15a^2\pi}{128}u^2$

8. Hallar el área encerrada por el lazo de la curva dada por: $x = t^2 - t$, $y = t^3 - 3t$

   Rpta. $\frac{81}{20}u^2$

9) Hallar el área de la región encerrada por las curvas: $x=\dfrac{2at}{1+t^2}$, $y=\dfrac{\pi t}{1+t}$, $t \in [0,+\infty>$, y el eje Y. **Rpta.** $\dfrac{\pi a(\pi-2)}{2}u^2$

10) Calcular el área de la región limitada por la curva cerrada $x=\dfrac{2at}{1+t^2}$, $y=\dfrac{\pi t}{1+t}$.

Rpta. $\dfrac{a^2(4-\pi)\pi}{4}u^2$

V.

1) Hallar la longitud del arco de la envolvente del círculo: x = a(cos t + t sen t), y = a(sen t – t cos t) desde t = 0 hasta t = T. **Rpta.** $\dfrac{aT^2}{2}$

2) Hallar la longitud de la envolvente de la elipse $x=\dfrac{c^2\cos^3 t}{a}$, $y=\dfrac{c^2 sen^3 t}{b}$, $(c^2=a^2-b^2)$ **Rpta.** $4\left(\dfrac{a^3-b^3}{ab}\right)$

3) Hallar la longitud de un arco de la cicloide dada por: x = a(t – sen t), y = a(1 – cos t).

Rpta. 8a

4) Hallar la longitud de la curva dada por: x = a(2 cos t – cos 2t), y = a(2 sen t – sen 2t).

Rpta. 16a

5) Calcular la longitud de la curva cuyas ecuaciones son $x=\dfrac{t^2}{2}+t$, $y=\dfrac{t^2}{2}-t$ de t = 0 hasta t = 1. **Rpta.** $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

6) Determinar la longitud de la curva $x=e^{-t}sen\,t$, $y=e^{-t}\cos t$, desde t = 0 hasta t = π.

Rpta. $\sqrt{2}(1-e^{-\pi})$

(7) Hallar la longitud del arco de la curva cuyas ecuaciones son: $x=\dfrac{t^2}{2}$, $y=\dfrac{t^4}{4}$, $1 \le t \le 2$

Rpta. $\dfrac{1}{4}(4\sqrt{17}-\sqrt{2})+\ln\left(\dfrac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}\right)$

(8) Encontrar la longitud del arco de la curva dada por: $x=t-a\,tgh\left(\dfrac{t}{a}\right)$, $y=a\sec h\left(\dfrac{t}{a}\right)$ desde t = -a hasta t = 2a. Rpta. [ln(cosh (2)) – ln (cosh (-1))]

(9) Hallar la longitud de la curva dada en coordenadas paramétricas $x=e^{2t}sen3t$, $y=e^{2t}\cos 3t$, desde el origen hasta el punto en que t = ln 2. Rpta. $\dfrac{3}{2}\sqrt{13}$

(10) Las ecuaciones parametricas de una curva son: $\begin{cases} x=50(1-\cos t)+50(2-t)sent \\ y=50\,sent+50(2-t)sent \end{cases}$

Determinar la longitud de la curva entre los puntos t = 0 y t = 2. Rpta. 100

(11) Determinar las ecuaciones paramétricas de una curva $x\,sent+y\cos t=t^2$, x = cos t – y sen t = 2t, en donde t es el parámetro, se pide hallar la longitud de la curva comprendida entre los puntos t = 0 y $t=\dfrac{\pi}{2}$. Rpta. $\dfrac{\pi^2+24}{24}\pi$

(12) Calcular la longitud de arco de la curva paramétrizada $x=(t^2-2)sent+2t\cos t$, $y=(2-t^2)\cos t+2t\,sent$, desde t = 0 hasta t = π. Rpta. $\dfrac{\pi^3}{3}$

(13) Hallar la longitud de arco de cada un de las curvas siguientes:

a) $x=e^t sent$, $y=e^t\cos t$, $t\in[0,\pi]$ Rpta. $\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$

b) $x=\sqrt{t}$, $y=\dfrac{t^2}{8}+\dfrac{1}{4t}$, desde t = 1 hasta t = 3. Rpta. $\dfrac{7}{6}$

c) $x = e^t(\cos t + t\,sen\,t)$, $y = e^t(sen\,t - t\cos t)$, $t \in [0,2\pi]$ **Rpta.** $2(e^{2\pi} - 1)$

(14) Calcular la distancia recorrida por una partícula que viaja a lo largo de la curva dada en forma paramétrica $x = t^2 - 3$, y = 3t durante el tiempo $t \in [0,2]$. **Rpta.** 5 – ln 3

VI.

(1) Hallar el área de la superficie engendrada por la rotación alrededor del eje X, de la cicloide x = a(2 cos t – cos 2t), y = a(2 sen t – sen 2t). **Rpta.** $\frac{128}{3}a^2\pi\ u^2$

(2) Hallar el área de la superficie engendrada al girar uno de los arcos de la cicloide: x = a (t – sen t), y = a(l – cos t) alrededor:

a) del eje X **Rpta.** $\frac{64a^2}{3}\pi\ u^3$

b) del eje Y **Rpta.** $16a^2\pi^2u^2$

c) de la tangente a la cicloide en su punto superior. **Rpta.** $\frac{32a^2}{3}\pi\ u^2$

(3) Hallar el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje X, las curvas dadas por:

a) $x = a\cos^3 t$, $y = a\,sen^3 t$ **Rpta.** $\frac{12}{5}a^2\pi u^2$

b) $y = e^{-x}$, x > 0 **Rpta.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}(e^{\pi} - 2)\pi\ u^2$

(4) Encontrar el arco de la superficie generada al girar alrededor del eje X la curva $x = e^t sen\,t$, $y = e^t\cos t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **Rpta.** $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^{\pi} - 2)$

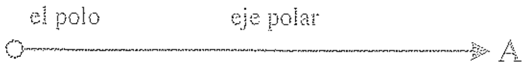
(5) Hallar el área de la superficie generada al rotar alrededor del eje Y la curva x = t + 1, $y = \frac{t^2}{2} + t$, $t \in [0,4]$. **Rpta.** $\frac{2\pi}{3}(26\sqrt{26} - 2\sqrt{2})u^2$

CAPÍTULO VIII

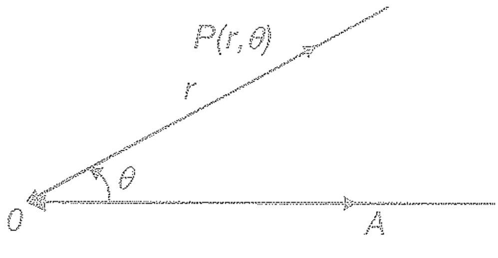
8. COORDENADAS POLARES.-

8.1 INTRODUCCIÓN.-

El sistema de coordenadas polares consiste de una distancia y la medida de un ángulo respecto de un punto fijo y una semirecta fija. El punto fijo se llama el polo (u origen) y se denota por "o", la semirecta fija se llama eje polar que denotaremos por $\overline{OA}$ y se gráfica horizontalmente y a la derecha.

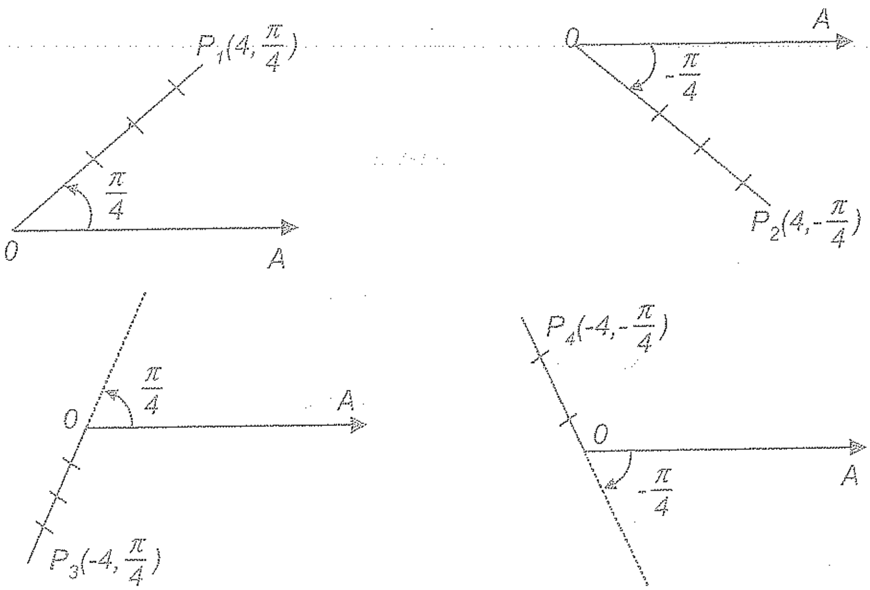


Sea P un punto distinto del polo "O" y θ el ángulo en radianes cuyo lado inicial es $\overline{OA}$ y su lado terminal $\overline{OP}$. Entonces: si r es la distancia dirigida desde "O" a "P" $(r = |\overline{OP}|)$ un conjunto de coordenadas del punto P está dado por r y θ y denotaremos por: $P(r,\theta)$ (ver gráfico).



Ejemplo.- Graficar los puntos $P_1\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$, $P_2\left(4,-\frac{\pi}{4}\right)$, $P_3\left(-4,\frac{\pi}{4}\right)$, $P_4\left(-4,-\frac{\pi}{4}\right)$

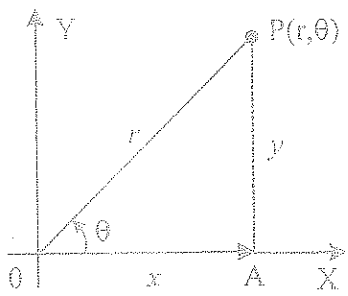
Solución



8.2 RELACIÓN ENTRE COORDENADAS POLARES Y RECTANGULARES.

Suponiendo que el polo de un sistema de coordenadas polares coincide con el origen del sistema cartesiano y el eje polar coincide con el eje X en sentido positivo.

Luego, cualquier punto P del plano tiene por representación en coordenadas polares $P(r,\theta)$ y cartesianas $P(x,y)$.



En el Δ OAP se tiene: $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

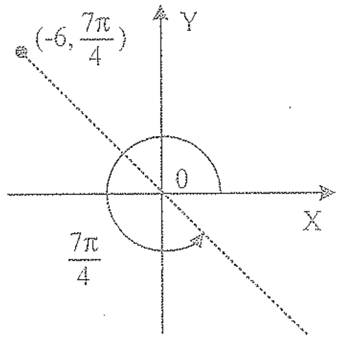
$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}}$$

Que es la relación entre coordenadas polares y cartesianas.

Ejemplo.- Trazar el punto $\left(-6,\frac{7\pi}{4}\right)$ y encontrar sus coordenadas cartesianas.

Solución



Como $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ entonces:

$$x = -6\cos\frac{7\pi}{4} = -3\sqrt{2}$$

$$y = -6\,\text{sen}\frac{7\pi}{4} = 3\sqrt{2}$$

Luego $(x,y) = (-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

Ejemplo.- Encontrar una ecuación polar de la gráfica cuya ecuación cartesiana es dada por $x^2 + y^2 = a^2$

Solución

Se conoce que: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = r^2\cos^2\theta \\ y^2 = r^2\,\text{sen}^2\,\theta \end{cases}$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Como $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow r^2 = a^2 \Rightarrow r = a$

Por lo tanto la ecuación polar es $\boxed{r = a}$

Ejemplo.- Encontrar una ecuación polar de la gráfica cuya ecuación cartesiana es $y^2 = 4(x+1)$.

Solución

Se conoce que: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Luego reemplazando en la ecuación $y^2 = 4(x+1)$ entonces $r^2\,\text{sen}^2\,\theta = 4(r\cos\theta + 1)$ de donde

$$r^2\,\text{sen}^2\,\theta - 4r\cos\theta - 4 = 0$$

Entonces $r = \dfrac{2(\cos\theta \pm 1)}{\operatorname{sen}^2\theta}$, de donde: $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$ ó $r = -\dfrac{2}{1+\cos\theta}$

Ejemplo.- Encontrar una ecuación cartesiana de la gráfica cuya ecuación **polar es:** $r^2 = 2\operatorname{sen}\theta$.

Solución

Se sabe que $r^2 = x^2 + y^2$, $y = r\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$

Como: $r^2 = 2\operatorname{sen}\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad\therefore\quad (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 2y$

Ejemplo.- Encontrar una ecuación cartesiana de la gráfica cuya **ecuación es:** $r^2 = \theta$.

Solución

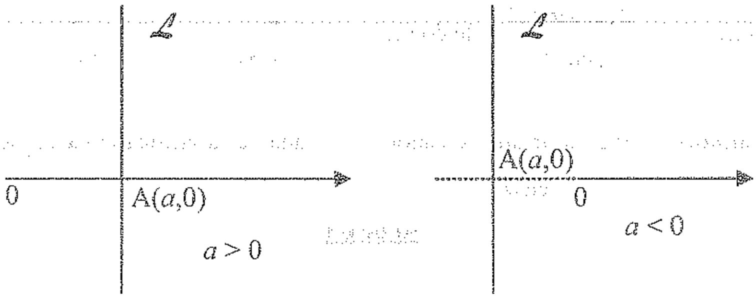
Conocemos que: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$r^2 = x^2 + y^2$ como $r^2 = \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

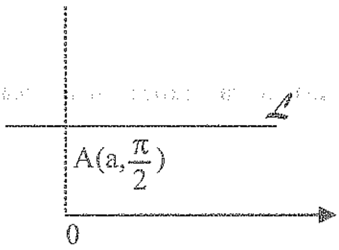
8.3 LA RECTA Y LA CIRCUNFERENCIA EN COORDENADAS POLARES.

Consideremos la recta L que pasa por el punto A(a,o) y que es perpendicular al eje polar ó a su prolongación, su ecuación cartesiana es dada por $x = a$, como $x = r\cos\theta$ entonces su ecuación polar es: $r\cos\theta = a$.

Cuando $a > 0$, la recta L se encuentra a la derecha del polo; cuando $a < 0$ la recta L se encuentra a la izquierda del polo.

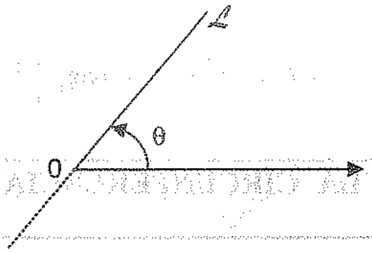


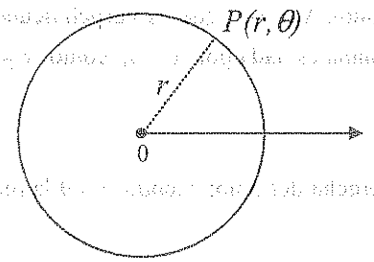
Consideremos una recta L que pasa por el punto $A\left(a,\dfrac{\pi}{2}\right)$ que es paralelo al eje polar.



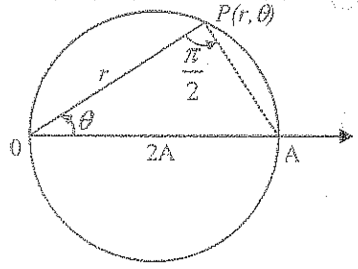
Su ecuación cartesiana es $y = a$, como $y = r\operatorname{sen}\theta$, entonces su ecuación polar es: $r\operatorname{sen}\theta = a$.

Cuando $a > 0$, la recta se encuentra arriba del eje polar; Cuando $a < 0$, la recta se encuentra por debajo del eje polar; cualquier recta que pase por el polo, su ecuación es $\theta = k$, donde k es la medida del ángulo que forma la recta con el eje polar.





La ecuación de la circunferencia con centro en el polo y radio k es $r = \pm k$ es decir, el punto $P(r,\theta)$ pertenece a la circunferencia sí y sólo sí $|\overline{OP}| = k$.



Luego si la distancia $|\overline{OP}| = k$, entonces $r = \pm k$ es la ecuación de la circunferencia de centro en el polo y radio igual a k.

$P(r,\theta)$ pertenece a la circunferencia y como ΔOPA es recto por ser inscrito en una circunferencia.

Luego $\cos\theta = \frac{r}{2a}$ de donde $r = 2a\cos\theta$.

8.4 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Encontrar una ecuación polar de la gráfica que tiene la ecuación cartesiana que se indica.

1) $x^2 + y^2 + 4x = 0$

2) $x^2 + y^2 + 4x + 4y = 0$

3) $x^2 = 6y - y^2$

4) $x^3 = 4y^2$

5) $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$

6) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

7) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

8) $y^2 - 4x - 4 = 0$

9) $3x^2 + 4y^2 - 6x - 9 = 0$

10) $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$

11) $x^4 + x^2y^2 - (x + y)^2 = 0$

12) $(x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2(x^2 - y^2)^2$

13) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$

14) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$

15) $2x^2 - y^2 = 0$

16) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$

II. Hallar una ecuación cartesiana de la gráfica que tiene la ecuación polar dada:

1) $r = 3\,\text{sen}\,\theta + 5\cos\theta$

2) $r^2 = 2\,\text{sen}\,\theta$

3) $r^2\cos 2\theta = 10$

4) $r^2 = \cos\theta$

5) $r^2 = 4\cos 2\theta$

6) $r^2 = \theta$

7) $r = 2\text{ sen } 3\theta$

8) $r^6 = r^2\cos^2\theta$

9) $r = a\,\theta$

10) $r = \dfrac{3}{2+3\,\text{sen}\,\theta}$

11) $r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$

12) $r = 1+2\,\text{sen}\,\theta$

13) $r = \dfrac{9}{4-5\cos\theta}$

14) $r^2\cos 2\theta = 3$

15) $r = 2\cos 2\theta$

16) $r\,\text{sen}\,2\theta = 3$

17) $r\,\text{sen}^2\,\theta = 4\cos\theta$

18) $r = 2(1+\text{sen}\,\theta)$

19) $r = \dfrac{6}{2-3\,\text{sen}\,\theta}$

20) $r = \dfrac{4}{3-2\cos\theta}$

21) $r = a\,\text{sen}\,\theta + b\cos\theta$

22) $r = a(1-\cos\theta)$

8.5 TRAZADO DE CURVAS EN COORDENADAS POLARES.-

La gráfica ó lugar geométrico de una ecuación expresada en coordenadas polares es:

$$\boxed{G = \{(r,\theta)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, r = f(\theta)\}}$$

DISCUSIÓN DE UNA ECUACIÓN POLAR.-

Para facilitar el trazado de la gráfica de una ecuación en coordenadas polares es conveniente establecer el siguiente análisis.

1ro. Las Intersecciones:

a) Con el eje polar: se hace $\theta = n\pi$, $n \in Z$

b) Con el eje a 90°: se hace $\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$

2^{do}. Simetrías:

a) Con respecto al eje polar: se reemplaza (r,-θ) por (r,θ) si no cambia la ecuación, la curva presenta simetría.

b) Con respecto a eje a 90°: se reemplaza (r,θ) por (r,π − θ) y por (-r,-θ) si la ecuación no cambia la curva es simétrica.

c) Con respecto al polo: se sustituye (r,θ) por (-r,θ) si la ecuación no cambia la curva es simétrica.

3^{ro}. Tabulación:

Se determinan los valores de r correspondiente a los valores asignados a θ en el dominio y se ordenan los pares.

4^{to}. Trazado de la Gráfica:

En el sistema coordenado se localizan los puntos hallados y se traza la curva.

8.6 EJEMPLOS.-

Discutir y graficar las ecuaciones.

1. $r = a(1+\cos\theta)$ (La Cardioide)

Solución

a) **Intersecciones:**

i) Con el eje polar: $\theta = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$$r = a(1+\cos n\pi)$$

Sí $n = 0 \Rightarrow r = 2a$, $(2a,0)$

Sí $n = 1 \Rightarrow r = 0$, $(0,\pi)$

Sí $n = -1 \Rightarrow r = 0$, $(0,-\pi)$

Sí $n = 2 \Rightarrow r = 2a$, $(2a,2\pi) = (2a,0)$

ii) Con el eje a $\frac{\pi}{2}$: $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

Si $n = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = a$, $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$

Si $n = 1$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $r = a$, $\left(a, \frac{3\pi}{2}\right)$

Si $n = -1$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $r = a$, $\left(a, -\frac{\pi}{2}\right) = \left(a, \frac{\pi}{2}\right)$

iii) Con el polo: $r = 0 \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi,\ 3\pi$

b) **Simetrías:**

i) Con respecto al eje polar: $(r, -\theta)$ por (r, θ).

$r = a(1+\cos\theta) = a(1+\cos(-\theta)) \Rightarrow \exists$ simetría.

ii) Con respecto al eje $\theta = \frac{\pi}{2}$: (r, θ) por $(r, \pi - \theta)$

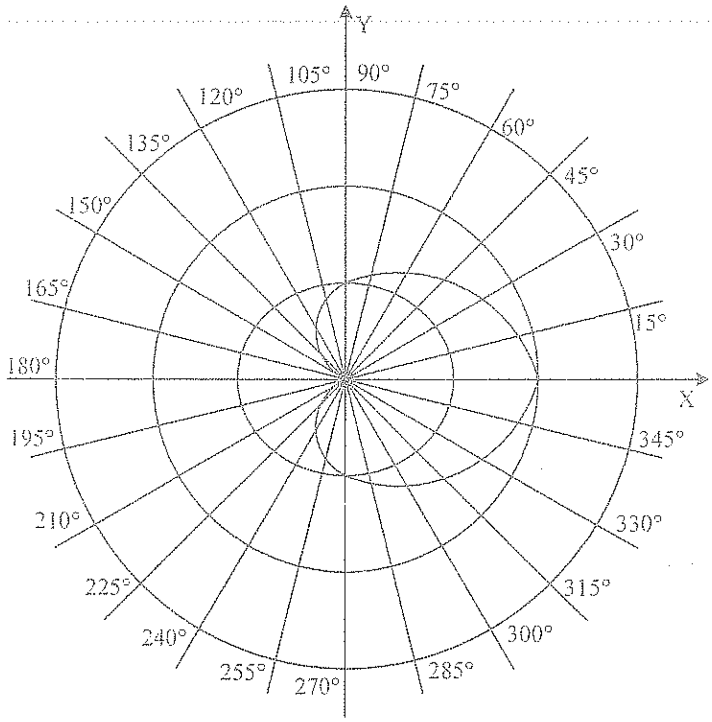
$r = a(1+\cos\theta) \neq a(1+\cos(\pi-\theta)) \Rightarrow \nexists$ simetría

iii) Con respecto al polo: (r, θ) por $(-r, \theta)$ ó $(r, \theta + \pi)$

$r = a(1+\cos\theta) \neq a(1+\cos(\pi-\theta)) \Rightarrow \nexists$ simetría

c) **Tabulaciones:**

θ	0	15°	30°	45°	60°	75°	90°
r	$2a$	$1.97a$	$1.87a$	$1.70a$	$1.5a$	$1.26a$	a



(2) $r^2 = 5\cos 2\theta$ (lemniscata)

Solución

a) **Intersecciones:**

i) Con el eje polar: $\theta = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$$r^2 = 5\cos 2n\pi$$

Si $n = 0$, $\theta = 0$, $r = \pm\sqrt{5} \Rightarrow (\sqrt{5},0)$ y $(-\sqrt{5},0)$

Si $n = 1$, $\theta = \pi$, $r = \pm\sqrt{5} \Rightarrow (\sqrt{5},\pi)$ y $(-\sqrt{5},\pi)$

Si $n = -1$, $\theta = -\pi$, $r = \pm\sqrt{5} \Rightarrow (\sqrt{5},-\pi)$ y $(-\sqrt{5},-\pi)$

ii) Con el eje a $\dfrac{\pi}{2}$: $\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$$r^2 = 5\cos 2\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

Sí $n = 0$, $r^2 = -5$, $\nexists\ r \in \mathbb{R}$

Si $n = 1$, $r^2 = -5$, $\nexists\ r \in \mathbb{R}$

Si $n = -1$, $r^2 = -5$, $\nexists\ r \in \mathbb{R}$

iii) Con el polo $r = 0$.

Si $r = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$

b) **Simetría:**

i) Con respecto al eje polar: (r,θ) por $(r,-\theta)$

$$r^2 = 5\cos 2\theta = 5\cos(-2\theta) = 5\cos 2\theta \Rightarrow \exists \text{ simetría}$$

ii) Con respecto al eje $\frac{\pi}{2}$: (r,θ) por $(r,\pi - \theta)$

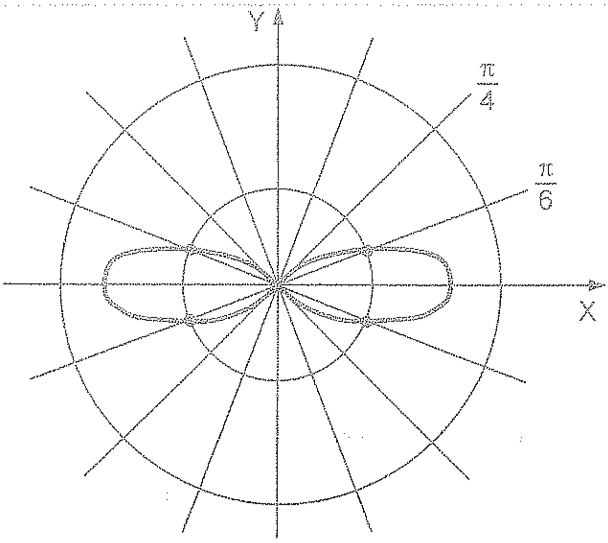
$$r^2 = 5\cos 2(\pi - \theta) = 5\cos 2\theta \Rightarrow \exists \text{ simetría}$$

iii) Con respecto al polo: (r,θ) por $(-r,\theta)$ ó $(r,\pi + \theta)$

$$r^2 = 5\cos 2\theta = (-r)^2 = r^2 \Rightarrow \exists \text{ simetría.}$$

c) **Tabulación.**

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	$\pm\sqrt{3}$	$\pm$ 1,58	0	$\nexists$	$\nexists$



(3) r = 2 sen 3θ (Rosa de tres pétalos)

Solución

a) Intersecciones:

i) Con respecto al eje polar: $\theta = n\pi$

si $n = 0$, $\theta = 0$, r 2 sen $\theta = 0$, $(0,0)$

si $n = 1$, $\theta = r$, $r = 2$ sen 3π, $(0,\pi)$

si $n = 2$, $\theta = 2\pi$, $r = 2$ sen $6\pi = 0$, $(0,2\pi)$

si $n = 3$, $\theta = 3\pi$, $r = 2$ sen $9\pi = 0$, $(0,3\pi)$

ii) Con respecto al eje a $\frac{\pi}{2}$: $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$

si $n = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = 2sen\left(\frac{3\pi}{3}\right) = -2$, $\left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$

si $n = 1$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $r = 2sen\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 2$, $\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$

si $n = 2$, $\theta = \frac{5\pi}{2}$, $r = 2sen\left(\frac{15\pi}{3}\right) = -2$, $\left(-2, \frac{5\pi}{2}\right)$

si $n = 3$, $\theta = \frac{7\pi}{2}$, $r = 2sen\left(\frac{21\pi}{2}\right) = 2$, $\left(2, \frac{7\pi}{2}\right)$

iii) Con respecto al polo: $r = 0$

si $r = 2 \text{ sen } 3\theta = 0 \Rightarrow 3\theta = \pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

b) Simetría:

i) Con respecto al eje polar: (r,θ) por $(r,-\theta)$

si $r = 2 \text{ sen } 3\theta \neq 2 \text{ sen}(-3\theta) \Rightarrow \nexists$ simetría

ii) Con respecto al eje a $\frac{\pi}{2}$: (r,θ) por $(r, \pi - \theta)$

si $r = 2 \text{ sen } 3\theta = 2 \text{ sen } 3(\pi - \theta) = 3 \text{ sen } 3\theta \Rightarrow \exists$ simetría

iii) Con respecto al polo: (r, θ) por $(-r, \theta)$

si $r = 2 \text{ sen } 3\theta = -2 \text{ sen } 3\theta \Rightarrow \nexists$ simetría.

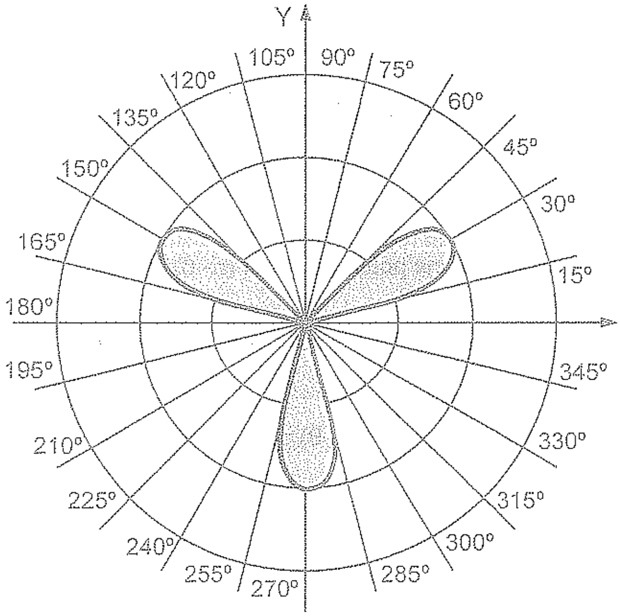
c) Tabulación:

θ	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	105°
r	1,414	2	1,414	0	-1,414	-2	-1,414

θ	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\frac{13\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$
r	0	1,414	2	1,414	0	-1,414	2

θ	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	285°	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$
r	-1,414	0	1,414	2	1,414	0	-1,414

θ	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	2π
r	-2	-1,414	0



④ $r = a(1 - 2\cos\theta)$

Solución

a) Intersecciones:

i) Con respecto al eje polar: $\theta = n\pi$, $n \in Z$

$n = 0$, $\theta = 0$, $r = -a$, $(-a,0)$

$n = 1$, $\theta = \pi$, $r = 3a$, $(3a,\pi)$

$n = -1$, $\theta = \pi$, $r = 3a$, $(3a,-\pi)$

ii) Con respecto al eje $\frac{\pi}{2}$; $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

si $n = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = a$, $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$

si n = 1, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, r = a, $\left(a, \frac{3\pi}{2}\right)$

si n = -1, $\theta = -\frac{\pi}{2}$, r = a, $\left(a, -\frac{\pi}{2}\right)$

iii) Con respecto al polo: (r, θ) por (r,- θ)

b) Simetría:

i) Con respecto al eje polar: (r, θ) por (r,- θ)

$r = a(1 - 2\cos\theta) = a(1 - 2\cos(-\theta)) \Rightarrow \exists$ simetría

ii) Con respecto al eje $\frac{\pi}{2}$: (r, θ) por (r,π - θ)

$r = a(1 - 2\cos\theta) \neq a(1 - 2\cos(\pi - \theta)) \Rightarrow \nexists$ simetría

iii) Con respeto al polo: (r, θ) por (-r, θ) ó (r, π + θ)

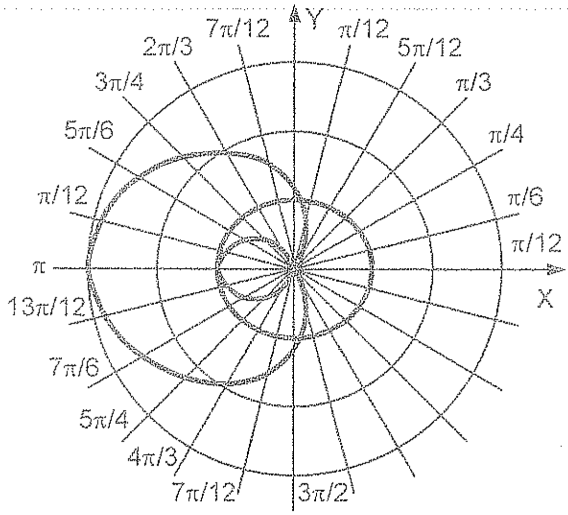
$r = a(1 - 2\cos\theta) \neq a(1 - 2\cos(\pi + \theta)) \Rightarrow \nexists$ simetría.

c) Tabulación:

θ	0	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
r	-a	-0,95a	-0,73a	-0,41a	0	0,485a	a

θ	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	2π
r	1,51a	2a	2,41a	2,73a	2,95a	3a

Los demás puntos es decir de ir a 2ir se hace por simetría.



⑤ $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$

<u>**Solución**</u>

a) Intersecciones:

i) Con respecto al eje polar: $\theta = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

si $n = 0,\ \theta = 0,\ r = \dfrac{2}{0},\ \nexists\ r \in \mathbb{R}$

si $n = 1,\ \theta = \pi,\ r = 1,\ (1,\pi)$

si $n = 2,\ \theta = 2\pi,\ r = \dfrac{2}{0},\ \nexists\ r \in \mathbb{R}$

si $n = -1,\ \theta = -\pi,\ r = 1,\ (1,-\pi)$

ii) Con respecto al eje $\dfrac{\pi}{2}$: $\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

si $n = 0,\ \theta = \dfrac{\pi}{2},\ r = 2,\ \left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$

si n = 1, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, r = 2, $\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$

si n = -1, $\theta = -\frac{\pi}{2}$, r = 2, $\left(2, -\frac{\pi}{2}\right) = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$

iii) Con respecto al polo: r = 0

$$r = \frac{2}{1-\cos\theta} \Rightarrow \nexists \ \theta \text{ que verifique:}$$

b) Simetría:

i) Con respecto al eje polar: (r,θ) por (r,-θ)

$$r = \frac{2}{1-\cos\theta} = \frac{2}{1-\cos(-\theta)} \Rightarrow \exists \text{ simetría}$$

ii) Con respecto al eje $\frac{\pi}{2}$: (r, θ) por (r, π - θ)

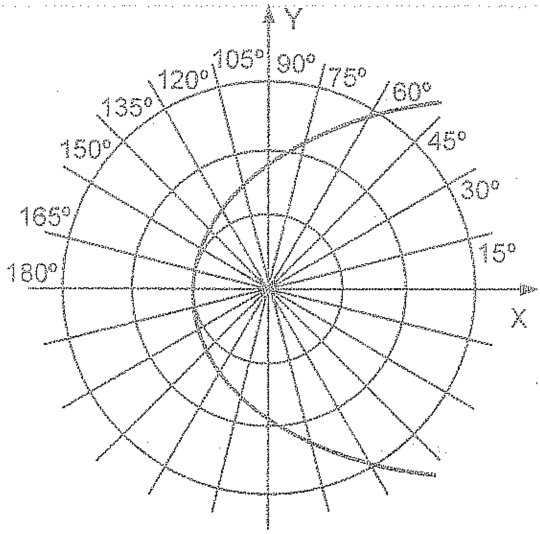
$$r = \frac{2}{1-\cos\theta} = \frac{2}{1-\cos(\pi-0)} \neq \frac{2}{1-\cos\theta} \Rightarrow \nexists \text{ simetría}$$

iii) Con respecto al pólo: (r,θ) por (-r,θ) o (r, π + θ).

c) Tabulación:

θ	0	15°	30°	45°	60°	75°	90°
r	∞	57,14	4,92	6,82	4	2,66	2

θ	105°	120°	135°	150°	165°	180°
r	1,6	1,33	1,17	1,07	1,01	1



(6) $r = 3 \cos 2\theta$ (Rosa de tres pétalos)

Solución

a) Intersecciones:

i) Con el eje polar: $\theta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

si $n = 0$, $\theta = 0$, $r = 3$, $(3,0)$

si $n = 1$, $\theta = \pi$, $r = 3$, $(3,\pi)$

si $n = 2$, $\theta = 2\pi$, $r = 3$, $(3,2\pi) = (3,0)$

si $n = -1$, $\theta = -\pi$, $r = 3$, $(3,-\pi) = (3,\pi)$

ii) Con respecto al eje a $\frac{\pi}{2}$: $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

si $n = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = -3$, $\left(-3, \frac{\pi}{2}\right)$

si $n = 1$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $r = -3$, $\left(-3, \frac{3\pi}{2}\right)$

si n = 2, $\theta = \frac{5\pi}{2}$, r = -3, $\left(-3, \frac{5\pi}{2}\right) = \left(-3, \frac{3\pi}{2}\right)$

si n = -1, $\theta = -\frac{\pi}{2}$, r = -3, $\left(-3, -\frac{\pi}{2}\right) = \left(-3, \frac{\pi}{2}\right)$

iii) Con respecto al polo: r = 0

Como r = 3 cos 2θ = 0 $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

b) Simetria

i) Com respecto al eje polar: (r,θ) por (r,-θ)

Si r = 3 cos 2θ = 3 cos (-2θ) $\Rightarrow \exists$ simetria

ii) Com respecto al eje a $\frac{\pi}{2}$: (r,θ) por (r,π - θ)

Si r = 3 cos 2θ = 3 cos 2(π - θ) = 3 cos θ $\Rightarrow \exists$ simetria

iii) Con respecto al pólo: (r,θ) por (-r,θ) o (r,π + θ)

Si r = 3 cos 2(π + θ) = 3 cos 2θ $\Rightarrow \exists$ simetria

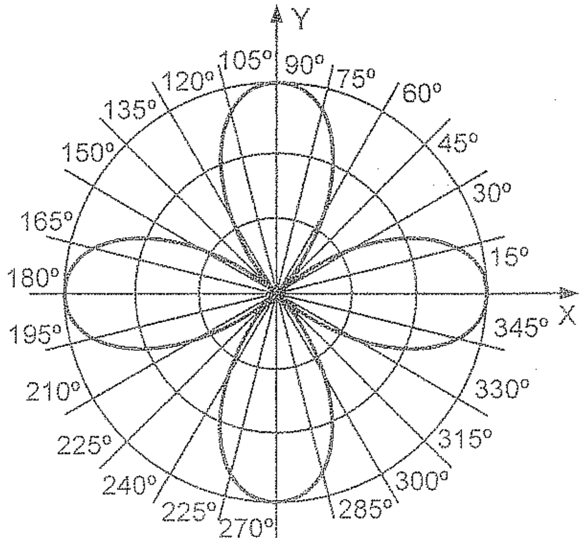
c) Tabulación:

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	75°	90°
r	3	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	3.5	0	-3.5	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	-3

θ	105°	120°	$\frac{\pi}{4}$	135°	150°	165°
r	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	-1.5	0	0	1.5	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

θ	180°	195°	210°	225°	240°	255°
r	3	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	1.5	0	-1.5	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

θ	270°	285°	300°	315°	330°	345°	360°
r	-3	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	-1.5	0	1.5	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	3



⑦ $r = 2 - 2 \text{ sen } \theta$

<u>**Solución**</u>

a) Intersecciones:

i) Con respecto al eje polar: $\theta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

si $n = 0$, $\theta = 0$, $r = 2$, $(2,0)$

si $n = 1$, $\theta = \pi$, $r = 2$, $(2,\pi)$

si $n = -1$, $\theta = -\pi$, $r = 2$, $(2,-\pi) = (2,\pi)$

ii) Con respecto al eje $\frac{\pi}{2}$: $\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$

si n = 0, $\theta=\frac{\pi}{2}$, r = 0, $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

si n = 1, $\theta=\frac{3\pi}{2}$, r = 4, $\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)=\left(4,-\frac{\pi}{2}\right)$

si n = -1, $\theta=-\frac{\pi}{2}$, r = 4, $\left(4,-\frac{\pi}{2}\right)$

iii) Con respecto al polo: r = 0

si r = 2 – 2 sen θ = 0 ⇒ sen θ = 1 ⇒ $\theta=-\frac{\pi}{2}$

b) Simetría.-

i) Con respecto al eje polar: (r,θ) por (r,-θ)

r = 2 – 2 sen θ ≠ 2 – 2 sen (-θ) ⇒ ∄ simetría

ii) Con respecto al eje a $\frac{\pi}{2}$: (r,θ) por (r,π - θ)

r = 2 – 2 sen θ = 2 – 2 sen (π - θ) ⇒ ∃ simetría

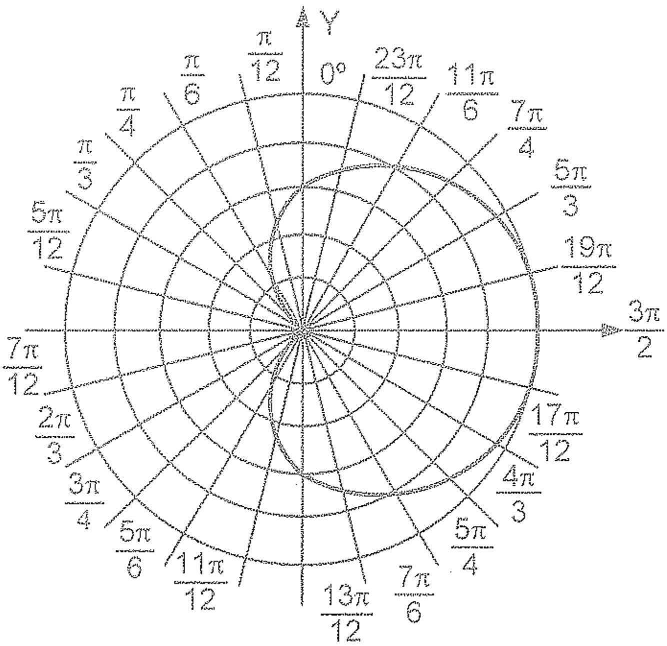
c) Tabulación:

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
r	2	1,48	1	0,58	0,26	0,66	0

θ	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\frac{13\pi}{12}$
r	1,51a	2a	2,41a	2,73a	3a	2	2,51

θ	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$
r	3	3,41	3,73	3,92	4	3,93	3,73

θ	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	2π
r	-3	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	-1.5	0



(8) $r = 2\theta,\ \theta \in [0,2\pi]$ (espiral de Arquímedes)

Solución

a) Intersecciones:

i) Con respecto al eje polar: $\theta = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

si $n = 0,\ \theta = 0,\ r = 0,\ (0,0)$

si n = 1, θ = π, r = 2π, (6.28,π)

si n = 2, θ = 2π, r = 4π, (12.57,2π)

ii) Con respecto al eje a 90°: $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

si n = 0, $\theta = \frac{\pi}{2}$, r = π, $\left(3.14, \frac{\pi}{2}\right)$

si n = 1, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, r = 3π, $\left(9.42, \frac{3\pi}{2}\right)$

si n = -1, $\theta = -\frac{\pi}{2}$, r = -π, $\left(3.14, -\frac{\pi}{2}\right)$

iii) Con respecto al polo: r = 0

r = 2θ = 0, θ = 0, (0,0)

b) Simetria:

i) Con respecto al eje polar: (r,θ) por (r,-θ)

$r = 2\theta \neq 2(-\theta) \Rightarrow \not\exists$ simetria

ii) Con respecto al eje a $\frac{\pi}{2}$: (r,θ) por (r,π - θ)

$r = 2\theta \neq 2(\pi - \theta) \Rightarrow \not\exists$ simetria

iii) Con respecto al pólo: (r,θ) por (-r,θ) o (r,π + θ)

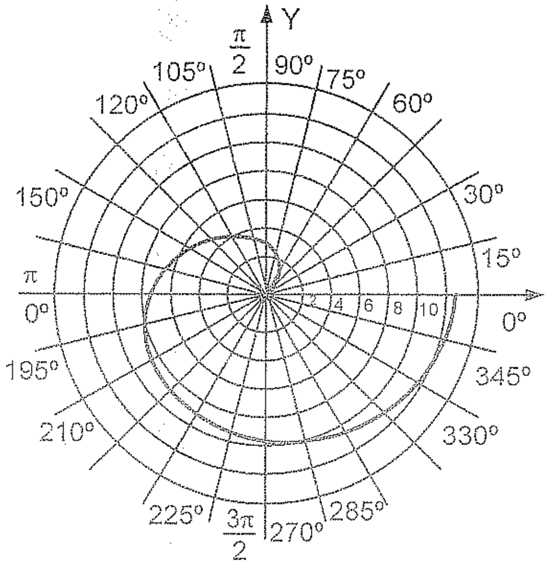
$r = 2\theta \neq 2(\pi + \theta) \Rightarrow \not\exists$ simetria

c) Tabulación:

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
r	0	0,52	1,05	1,57	2,09	2,62	3.14

θ	105°	120°	135°	150°	165°	180°	195°	210°
r	3,67	4,19	4,71	5,24	5,76	6,28	6,81	7,33

θ	225°	240°	255°	270°	300°	315°	330°	360°
r	7,85	8,38	8,9	9,42	10,5	11,0	11,5	12,6



8.7 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Discutir y graficar las siguientes curvas.

1. $r = 4\cos 3\theta$ (Rosa de tres pétalos)
2. $r = \dfrac{1}{sen\,\theta}$ (La recta)
3. $r = 2 - 4\cos\theta$ (Caracol)
4. $r = e^{\theta}$ (espiral logarítmica)
5. $r^2 = a^2\cos 2\theta$ (La Lemniscota)
6. $r = \dfrac{\theta}{2}$ (Espiral de Arquimedes)
7. $r = a\, sen\, 2\theta$ (Rosa de cuatro pétalos)
8. $r(1 - 2\cos\theta) = 4$ (Hipérbola)

(9) $r = 4 - 4\cos\theta$

(10) $r = |2a\cos\theta|$

(11) $r = 6\cos 4\theta$

(12) $r = 3 - 3\,\text{sen}\,\theta$

(13) $r = 7\,\text{sen}\,5\theta$

(14) $r = 1 + 2\cos\theta$

(15) $r = 2 - 2\,\text{sen}\,\theta$

(16) $r = 2\cos 2\theta$

(17) $r = b + a\cos\theta$ $(b > a > 0)$ (Limzon)

(18) $r = 2a\,\text{tg}\,\theta - \text{sen}\,\theta$ (Cisoide)

(19) $r = a(2 + \cos\theta)$ (Caracol de Pascal)

(20) $r = 4\cos\theta$

(21) $r = a(1 - 2\cos\theta)$ (Caracol de Pascal)

(22) $r = 3\cos 2\theta$

(23) $r = 4\,\text{sen}\,2\theta$

(24) $r = 3 + 3\cos\theta$

(25) $r = 2(1 + \text{sen}\,\theta)$

(26) $r = \dfrac{2}{1 - 2\cos\theta}$

(27) $r = \dfrac{2}{1 - 2\,sen\,\theta}$

(28) $r = 4\,sen\,\theta.\cos^2\theta$

(29) $r^2 = 9\,sen\,2\theta$

(30) $r^2 = -4\,sen\,2\theta$

(31) $r^2 = -25\cos 2\theta$

(32) $r = e^{-\theta}$

(33) $r = |\cos 2\theta|$

(34) $r = |\text{sen}\,3\theta|$

(35) $r = 2\cos 4\theta$

(36) $r = 6\cos 5\theta$

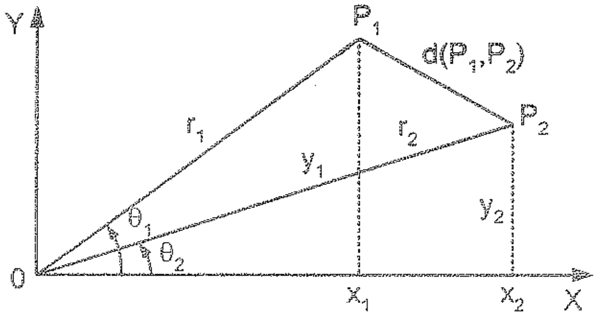
8.8. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN COORDENADAS POLARES.-

Consideremos dos puntos en coordenadas polares $P_1(r_1,\theta_1)$ y $P_2(r_2,\theta_2)$ y cuyos componentes en el sistema de coordenadas cartesianas son $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ y como la distancia entre dos punto es dado por:

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2(x_1x_2+y_1y_2)}$$

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$$



Ejemplo.- Hallar la distancia entre los puntos $P_1(-3,75°)$ y $P_2(5,45°)$

<u>**Solución**</u>

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{9+25-2(-3)(5)\cos(75°-45°)}=\sqrt{34+34\cos 30°}=\sqrt{34+15}=\sqrt{49}=7$$

$$\therefore \quad d(P_1,P_2)=7$$

8.9. INTERSECCIÓN DE CURVAS EN COORDENADAS POLARES.-

Las intersecciones de dos curvas dadas en coordenadas polares, se determina resolviendo la ecuación r y θ.

Ejemplo.- Hallar los puntos de la intersección de las curvas

$$r = a(1 + 2\cos\theta),\quad r = a\cos\theta$$

<u>**Solución**</u>

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene:

$$\begin{cases} r = a(1+2\cos\theta) \\ r = a\cos\theta \end{cases}$$

$\Rightarrow$ a(1 + 2 cos θ) = a cos θ

$\Rightarrow$ cos θ = -1 $\Rightarrow$ θ = π

Sustituyendo el valor en cualquiera de las ecuaciones se tiene r = -a, luego el punto de intersección es (-a,π) (si r = 0, ambas ecuaciones tienen solución).

OBSERVACIÓN.- Consideremos la ecuación de una curva en coordenadas polares.

$$\boxed{r = f(\theta)} \quad \dots (1)$$

la misma curva está dada por: $\boxed{(-1)^n r = f(\theta + n\pi),\ n \in \mathbb{Z}}$ ... (2)

En efecto: n = 0, r = f(θ)

n = 1, -r = f(θ + 2π) $\Rightarrow$ P(-r, θ + π)

P(-r, θ + 2π)

n = 2, r = f(θ + 2π) $\Rightarrow$ P(r, θ + 2π)

por lo tanto (1) y (2) son equivalentes.

Luego para hallar los puntos de intersección de las curvas r = f(θ) y r = g(θ) se sigue los siguientes pasos:

1) Se obtiene todas las ecuaciones distintas de las dos curvas aplicando (2) en cada una de ellas.

$$\begin{cases} r = f_1(\theta) \\ r = g_1(\theta) \end{cases}, \begin{cases} r = f_2(\theta) \\ r = g_2(\theta) \end{cases}, \begin{cases} r = f_3(\theta) \\ r = g_3(\theta) \end{cases} \quad \dots (3)$$

2) Se resuelven las ecuaciones simultáneas.

$$\begin{cases} r = f(\theta) \\ r = g(\theta) \end{cases}, \quad \begin{cases} r = f_1(\theta) \\ r = g_1(\theta) \end{cases} \qquad \ldots (4)$$

3) Se verifica si el polo es un punto de la intersección haciendo $r = 0$, en cada ecuación para determinar si existen solución para θ (no necesariamente la misma)

Ejemplo.- Hallar los puntos de intersección de las curvas $r = 2\cos\theta$ y $r = 2\,\text{sen}\,\theta$

<u>**Solución**</u>

Calculando las ecuaciones distintas de las dos curvas para el cual aplicamos.

$(-1)^n r = f(\theta + n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$ se tiene:

Para $n = 1$, $\begin{cases} -r = 2\cos(\theta+\pi) \\ -r = 2sen(\theta+\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2\cos\theta \\ r = 2\,sen\,\theta \end{cases}$

Como se obtiene las mismas ecuaciones entonces es suficiente resolver el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} r = 2\cos\theta \\ r = 2\,sen\,\theta \end{cases} \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \cos\theta \Rightarrow \text{tg}\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$r = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

Luego el punto de intersección de las curvas es $P\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

Ejemplo.- Hallar los puntos de intersección de las curvas $r = 4(1 + \text{sen}\,\theta)$ y $r = (1 - \text{sen}\,\theta)$ =3

<u>**Solución**</u>

Calculemos las distintas ecuaciones de las curvas dadas, para lo cual aplicamos.

$(-1)^n r = f(\theta + n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

Para n = 1, $\begin{cases} -r = 4(1+sen(\theta+\pi)) \\ -r = \dfrac{3}{1-sen(\theta+\pi)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -r = 4(1-sen\,\theta) \\ -r = \dfrac{3}{1+sen\,\theta} \end{cases}$

Para n = 2, $\begin{cases} r = 4(1+sen(\theta+2\pi)) \\ r = \dfrac{3}{1-sen(\theta+2\pi)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 4(1+sen\,\theta) \\ r = \dfrac{3}{1-sen\,\theta} \end{cases}$

El sistema (2) va repitiendo, luego para hallar los puntos de intersección resolveremos los sistemas de ecuaciones dada.

$$\begin{cases} r = 4(1-sen\theta) \\ r = \dfrac{3}{1+sen\,\theta} \end{cases} \Rightarrow 4(1-sen\,\theta) = \frac{3}{1+sen\,\theta} \Rightarrow 1-sen^2\theta = \frac{3}{4}$$

$$\cos^2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6},\ \theta = \frac{7\pi}{6},\ \theta = \frac{5\pi}{6},\ \theta = \frac{11\pi}{6}$$

Como r = 4(sen θ - 1) $\Rightarrow \begin{cases} -r = 4\left(sen\dfrac{\pi}{6}-1\right) = -2 \quad , \quad r = 2 \\ -r = 4\left(sen\dfrac{7\pi}{6}-1\right) = -2 \ , \ r = -2 \end{cases}$

$$P_3\left(2, \frac{7\pi}{6}\right),\ P_4\left(2, \frac{11\pi}{6}\right)$$

8.10. DERIVADAS Y RECTAS TANGENTES EN COORDENADAS POLARES.-

Consideremos la ecuación de una curva dada por:

$$\boxed{C: r = f(\theta)} \qquad \ldots (1)$$

Sabemos que las coordenadas cartesianas y polares están relacionados por:

$$\boxed{x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\,sen\,\theta} \qquad \ldots (2)$$

Luego al reemplazar (1) en (2) en la ecuación de la curva lo escribiremos en la forma:

$$\boxed{C: \begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)sen\,\theta \end{cases}}$$

Que son las ecuaciones paramétricas respecto al parámetro θ.

Ahora calculamos la derivada de cada ecuación paramétrica respecto al parámetro θ.

$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)sen\,\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)sen\,\theta \\ \dfrac{dy}{d\theta} = f'(\theta)sen\,\theta + f(\theta)\cos\theta \end{cases}$$

Luego calculamos $\dfrac{dy}{dx}$ es decir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{f'(\theta)sen\,\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)sen\,\theta} = \frac{f'(\theta)tg\,\theta + f(\theta)}{f'(\theta) - f(\theta)tg\,\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\theta)tg\,\theta + f(\theta)}{f'(\theta) - f(\theta)tg\,\theta} = \frac{tg\,\theta.\dfrac{dr}{d\theta} + r}{\dfrac{dr}{d\theta} - r\,tg\,\theta}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{tg\,\theta.\dfrac{dr}{d\theta} + r}{\dfrac{dr}{d\theta} - r\,tg\,\theta}}$$

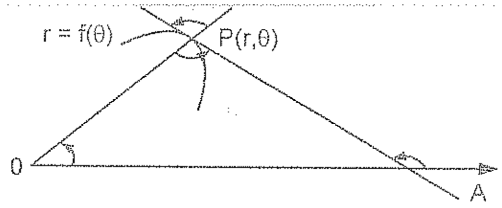
Como la $\dfrac{dy}{dx}$ representa la pendiente de la recta tangente a la curva, se tiene que:

Si α es el ángulo formado por la recta tangente y el eje polar, entonces:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha = \frac{r + tg\,\theta.\dfrac{dr}{d\theta}}{\dfrac{dr}{d\theta} - r\,tg\,\theta}}$$

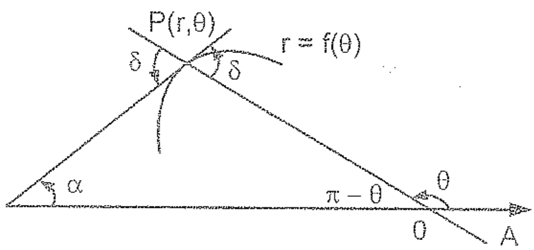
Si P(r,θ) es el punto de tangencia y δ es el ángulo que forma el radio vector $\overrightarrow{OP}$ y la tangente, veremos los siguientes casos:

i)



Se deduce que $\alpha = \theta + \delta \Rightarrow \delta = \alpha - \theta$, aplicando tangente se tiene: $tg\,\delta = tg\,(\alpha - \theta)$

ii)



$\delta = \alpha + \pi - \theta \Rightarrow \delta = \pi + (\alpha - \theta)$ de donde

$tg\,\delta = tg\,(\pi + (\alpha - \theta)) = tg\,(\alpha - \theta)$ por lo tanto en ambos casos significa que:

$tg\,\delta = tg\,(\alpha - \theta)$ de donde $tg\,\delta = \dfrac{tg\,\alpha - tg\,\theta}{1 + tg\,\alpha . tg\,\theta}$ como $tg\,\alpha = \dfrac{r + tg\,\theta . \frac{dr}{d\theta}}{\frac{dr}{d\theta} - r\,tg\,\theta}$

$$tg\,\delta = \frac{\dfrac{r + tg\,\theta . \frac{dr}{d\theta}}{\frac{dr}{d\theta} - r\,tg\,\theta} - tg\,\theta}{1 + \dfrac{r + tg\,\theta . \frac{dr}{d\theta}}{\frac{dr}{d\theta} - r\,tg\,\theta} . tg\,\theta} = \frac{r + r\,tg^2\theta}{\frac{dr}{d\theta} + tg^2\theta . \frac{dr}{d\theta}}$$

$$tg\,\delta = \frac{r(1 + tg^2\theta)}{\frac{dr}{d\theta}(1 + tg^2\theta)} = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} \qquad \therefore \boxed{tg\,\delta = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}}$$

Ejemplo.- Hallar el ángulo α y δ, el valor de la pendiente de la tangente en el punto dado.

(1) $r = 4(1 + \text{sen}\,\theta)$, $P(4,0°)$

Solución

$$r = 4(1+\text{sen}\,\theta) \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = 4\cos\theta \Rightarrow \left.\frac{dr}{d\theta}\right|_{\theta=0} = 4$$

$$tg\,\alpha = \frac{r + tg\,\theta.\dfrac{dr}{d\theta}}{\dfrac{dr}{d\theta} - r\,tg\,\theta} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{4+0}{4-0} = 1 \Rightarrow tg\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$tg\,\delta = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{4}$$

(2) $r = a(1 - \cos\theta)$ $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, $a > 0$

Solución

$$r = a(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = a\,sen\,\theta \Rightarrow \left.\frac{dr}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{a}{2}$$

$$r = a(1-\cos\theta) \text{ para } \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow r = \frac{a}{2}(2-\sqrt{3})$$

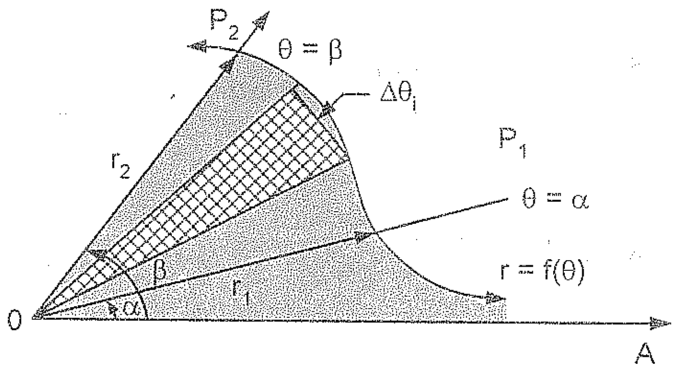
$$tg\,\alpha = \frac{r + tg\,\theta.\dfrac{dr}{d\theta}}{\dfrac{dr}{d\theta} - r\,tg\,\theta} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\dfrac{a}{2}(2-\sqrt{3}) + \dfrac{a}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{a}{2} - \dfrac{a}{2}(2-\sqrt{3})\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = 1 \Rightarrow tg\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\delta = \alpha - \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{12}$$

8.11 APLICACIONES DE LAS INTEGRALES EN COORDENADAS POLARES.-

a) ÁREA DE UNA REGIÓN EN COORDENDAS POLARES.-

Consideremos una función continua y positiva en el intervalo $[\alpha,\beta]$, suponiendo que la curva C tenga por ecuación $r = f(\theta)$ y dos radios vectores $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$ que pasan por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$.



El área de un sector circular es igual al semiproducto del radio por el arco.

Luego el área del i-esimo sector circular es: $\boxed{A_i = \frac{1}{2} r_i r_i \Delta\theta_i = \frac{r_i^2 \Delta\theta_i}{2}}$

Luego el área de los n sectores circulares es: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} r_i^2 \Delta\theta_i}$

Teniendo en cuenta que la integral definida, expresa geométricamente el área bajo una curva, por lo tanto el área buscada es el límite de los n sectores circulares, es decir:

$$\boxed{A = \lim_{\Delta\theta_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} \frac{r_i^2 \Delta\theta_i}{2} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta}$$

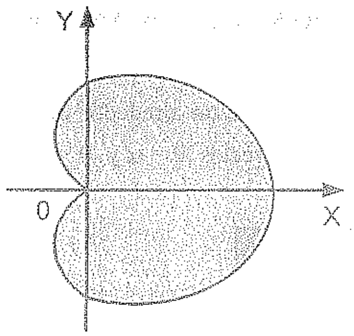
Luego el área determinada por le radio vector de la curva al desplazarse de la posición $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$ es expresada por la formula.

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta}$$

Ejemplo.- Hallar el área de la figura limitada por la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$

Solución

$a=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$, pero: $r = f(\theta) = a(1 + \cos\theta)$



$$a=2\left[\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta\right]$$

$$A=a^2\int_{0}^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=a^2\left(\frac{3\theta}{2}+2 sen\,\theta+\frac{sen\,2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi}$$

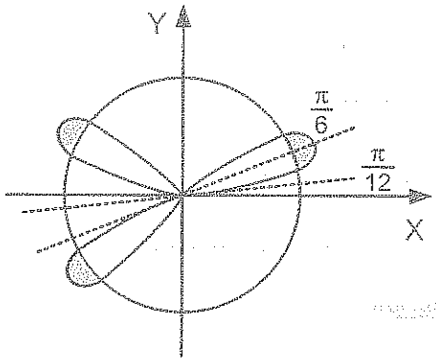
$$\therefore \quad A=\frac{3a^2\pi}{2}u^2$$

OBSERVACIÓN.- Consideremos dos funciones $f, g: [\alpha,\beta] \to R$ tales que $0 \le g(\theta) \le f(\theta)$, $\forall\, \theta \in [\alpha,\beta]$ y sea R el sector limitado por los gráficos $r = g(\theta)$, $r = f(\theta)$ y las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ entonces el área de la región R es expresado por la formula.

$$\boxed{A(R)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f^2(\theta)-g^2(\theta)]d\theta}$$

Ejemplo.- Hallar el área de la figura limitada por la curva $r = 2a\ sen\ 3\theta$ que está fuera del circulo $r = a$.

Solución



Sean: $\begin{cases} r_1 = 2a\,sen 3\theta \\ r_2 = a \end{cases}$

$$A = 6\left[\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)\,d\theta\right]$$

$$A = 3\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} (4a^2 sen^2 3\theta - a^2)\,d\theta$$

$$\therefore \quad A = \left(\frac{a^2\pi}{2} + a^2\right)u^2$$

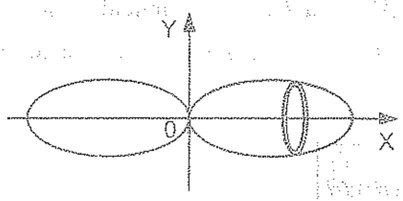
b) VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN EN COORDENADAS POLARES.-

El volumen V del sólido obtenido por la rotación alrededor del eje polar de la región R limitada por la curva $r = f(\theta)$ y las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ es dado por la formula.

$$\boxed{V = \frac{2}{3}\int_{\alpha}^{\beta} f^3(\theta)\,sen\theta\,d\theta}$$

Ejemplo.- Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la curva $r = a\cos^2\theta$ alrededor del eje polar.

Solución



La variación de la integral es desde $\theta = 0$ hasta $\frac{\pi}{2}$

$$V = \left[\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 sen\,\theta\,d\theta\right] = \frac{4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\cos^6\theta . sen\,\theta\,d\theta$$

$$V = \frac{4a^3\pi}{21}u^3$$

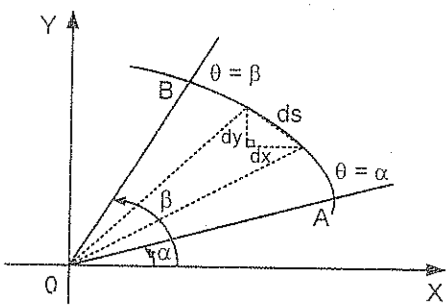
c) LONGITUD DE ARCO DE COORDENADAS POLARES.-

Consideremos una función $r = f(\theta)$ continua en el intervalo $[\alpha,\beta]$; como $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, por diferenciación se tiene:

$$\begin{cases} dx = \cos\theta.dr - r\,sen\,\theta.d\theta \\ dy = sen\,\theta.dr + r\cos\theta.d\theta \end{cases} \quad \dots (1)$$

Si en coordenadas cartesianas se tiene ds como la hipotenusa de un triangulo de catetos dx, dy. Entonces:

$$\boxed{(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2} \quad \dots (2)$$



Ahora reemplazando (1) en (2) se tiene:

$$(ds)^2 = (\cos\theta\,dr - r\,sen\,\theta\,d\theta)^2 + (sen\,\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta)^2$$

$$(ds)^2 = \cos^2\theta(dr)^2 + r^2 sen^2\theta(d\theta)^2 - 2\,sen\,\theta\cos\theta\,dr\,d\theta + sen^2\theta(dr)^2 +$$

$$+ r^2\cos^2\theta(d\theta)^2 + 2r\,sen\,\theta\cos\theta\,dr\,d\theta$$

$$(ds)^2 = (sen^2\theta + \cos^2\theta)(dr)^2 + r^2(sen^2\theta + \cos^2\theta)(d\theta)^2$$

$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$ extrayendo la raíz cuadrada

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Integrando ambos miembros de α hasta β

$$\boxed{L=\int_{\alpha}^{\beta} ds=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta}$$

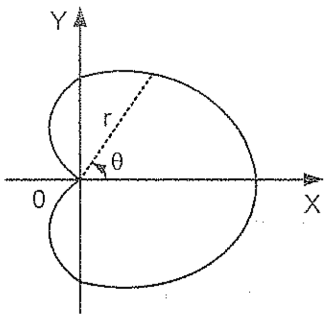
Que la longitud del arco de la curva desde A hasta B.

TEOREMA.- Si f es una función continúa en el intervalo cerrado $[\alpha,\beta]$, entonces la longitud de la curva $r = f(\theta)$, desde, $P_1(r_1,\alpha)$ hasta $P_2(r_2,\beta)$ está expresado por:

$$\boxed{L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{f^2(\theta)+(f'(\theta))^2}\,d\theta}$$

Ejemplo.- Hallar la longitud total de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$

Solución



$r = a(1+\cos\theta) \Rightarrow \dfrac{dr}{d\theta}=-a\,sen\,\theta$

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta$$

Como la grafica es simétrica

$$L=2\int_{0}^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2sen^2\theta}\,d\theta$$

$$L=2\int_{0}^{\pi}\sqrt{2a+2a\cos\theta}\,d\theta=2\sqrt{2}a\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta$$

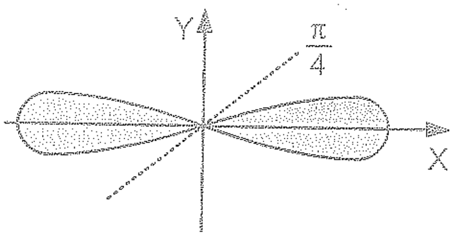
$$L=2\sqrt{2}\int_{0}^{\pi}\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=8a\,sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi}=8a$$

$\therefore\ L = 8a$

8.12 EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Calcular el área de la región limitada por la lemniscata $r^2 = 9\cos 2\theta$

Solución



Por simetría con respecto al eje polar se tiene:

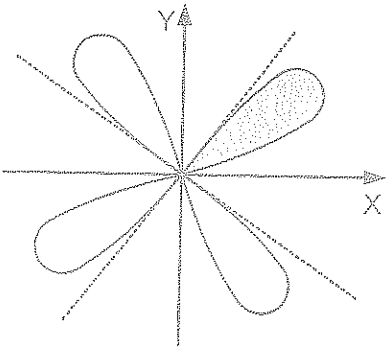
$$A = 4\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta\right]$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 9\cos 2\theta . d\theta = 9sen 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 9$$

$$\therefore \quad A = 9u^2$$

② Hallar el área limitada por la curva $r^2 = a^2 sen 4\theta$

Solución



Del grafico se tiene:

$$A = 4\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta\right] = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 sen 4\theta\, d\theta$$

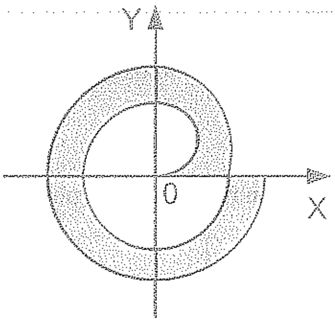
$$A = -\frac{a^2}{2}\cos 4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{a^2}{2}[-1-1] = a^2$$

$$\therefore \quad A = a^2 u^2$$

③ Hallar el área comprendida entre la primera y segunda espiral de Arquímedes $r = a\theta$

Solución

Del grafico se tiene: $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} (r_2^2 - r_1^2)d\theta$



Donde $r_1 = a\theta$ y $r_2 = a(\theta + 2\pi)$

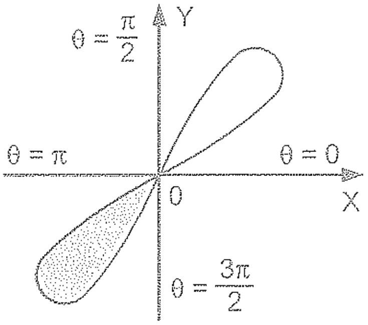
$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a^2(\theta+2\pi) - a^2\theta^2]d\theta$$

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(4\theta\pi + 4\pi^2)d\theta = 8a^2\pi^3$$

$$\therefore \quad A = 8a^2\pi^3 u^2$$

(4) Hallar el área de la región encerrada por la Limniscata $r^2 = 4\,sen\,2\theta$

Solución



La grafica es simétrica respecto al polo, entonces

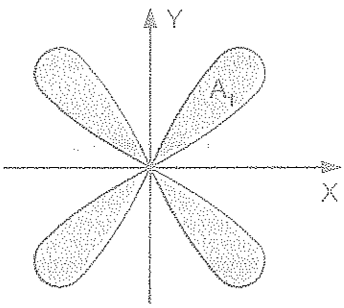
$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\,sen\,2\theta\,d\theta$$

$$A = -2\cos 2\theta\Big|_0^{\pi/2} = -2[-1-1] = 4$$

$$\therefore \quad A = 4u^2$$

(5) Hallar el área de la región encerrada por la curva r = a sen 2θ

Solución



Como la grafica es simétrica con respecto a los dos ejes entonces.

$$A = 4A_1 = 4\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta\right] = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 sen^2 2\theta . d\theta$$

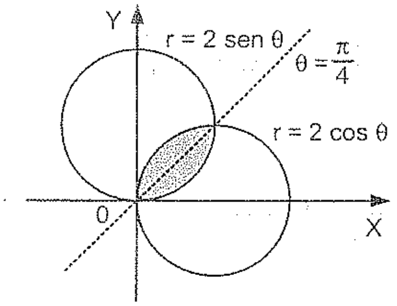
$$A = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)d\theta = a^2\left(\theta - \frac{sen\,43\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2\pi}{2}$$

$$\therefore \quad A = \frac{a^2\pi}{2}u^2$$

(6) Encontrar el área de las dos circunferencias r = 2 sen θ y r = 2 cos θ

Solución

Ubiquemos la región común



Calculando las intersecciones

$$\begin{cases} r = 2\cos\theta \\ r = 2\,sen\,\theta \end{cases} \Rightarrow \text{sen } \theta = \cos\theta$$

$$\text{tg } \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

también se intercepta en el polo (origen) es decir para r = 0 se satisface las ecuaciones

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\,sen\,\theta)^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta)^2\, d\theta = 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen^2\theta.d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta.d\theta\right]$$

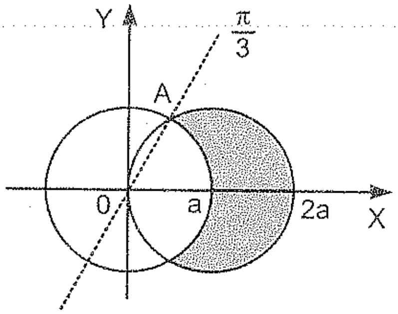
$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\theta)d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)d\theta = \left(\theta - \frac{sen2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \left(\theta + \frac{sen2\theta}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)u^2$$

(7) Encontrar el área de la región acotada por la curva r = 2a cos θ y que se encuentra fuera del círculo r = a.

Solución

Calculando la intersección



$$\begin{cases} r = 2a\cos\theta \\ r = a \end{cases} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

De donde $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{5\pi}{3}$

Como se tiene simetría respecto al eje polar.

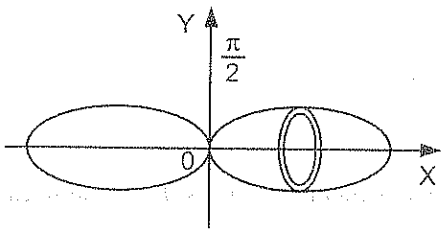
$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2a\cos\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 d\theta\right] = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta.d\theta - a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta$$

$$A = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\theta)d\theta - a^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 2a^2\left(\theta + \frac{sen 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{a^2\pi}{3}$$

$$\therefore \quad A = a^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)u^2$$

(8) Calcular el volumen de un sólido obtenido por rotación de la región acotada por la curva $r = a\cos^2\theta$ alrededor del eje polar.

Solución



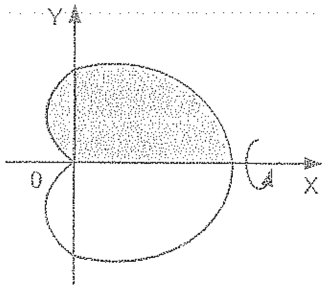
Por simetría se tiene:

$$V = 2\left[\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\cos^6\theta\, sen\,\theta\, d\theta\right]$$

$$V = \frac{4a^3\pi}{3}\left(-\frac{\cos^7\theta}{7}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a^3\pi}{21}u^3$$

(9) Calcular el volumen del sólido obtenido al hacer girar la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$ alrededor del eje X.

Solución



Ubicando la región se tiene:

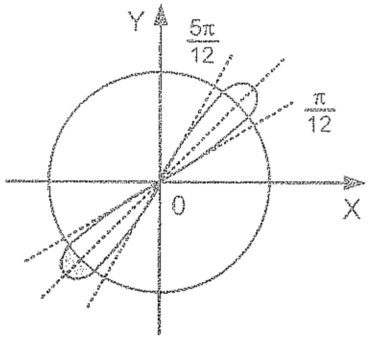
Del grafico se observa que el sólido de revolución se obtiene de hacer girar alrededor del eje X la región de la parte superior de la cardioide.

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}a^3(1+\cos\theta)^3 sen\,\theta\,d\theta=-\frac{2\pi}{3}.\frac{(1+\cos\theta)^4a^3}{4}\Big|_0^{\pi} \qquad \therefore\ V=\frac{8a^3\pi}{3}u^3$$

(10) Hallar el volumen del sólido generado por la rotación de la región R: $a\le r\le a\sqrt{2\,sen 2\theta}$, a > 0, alrededor del eje polar.

Solución

Ubicando la región de las curvas polares que encierran como R: $a\le r\le a\sqrt{2\,sen2\theta}$, a > 0, entonces r = a circunferencia.



$r^2=a^2 2\,sen2\theta$, $\quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$,

donde la ecuación $r^2=2a^2 sen2\theta$ corresponde a la gráfica de la Lemniscata.

$$\begin{cases} r=a \\ r^2=a^2 2\,sen2\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad sen2\theta=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}$$

Por simetría se tiene $V=2V_1$

$$V=2\left[\frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}[(a\sqrt{2\,sen2\theta})^3]sen\,\theta.d\theta-\frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}a^3 sen\,\theta.d\theta\right]$$

$$V=\frac{4\pi}{3}\left[\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}a^3 2\sqrt{2}(sen2\theta)^{\frac{3}{2}}sen\,\theta.d\theta-a^3\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}sen\,\theta\,d\theta\right]$$

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}\left[\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} a^3 2\sqrt{2}(sen\,2\theta)^{\frac{3}{2}}\,sen\,\theta.d\theta+\cos\theta\Big|_{\pi/12}^{5\pi/12}\right]$$

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}\left[\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} a^3 2\sqrt{2}(sen\,2\theta)^{\frac{3}{2}}\,sen\theta.d\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad \dots (1)$$

Sea $\theta=\frac{\pi}{4}-z \implies d\theta=-dz$, reemplazando en (1)

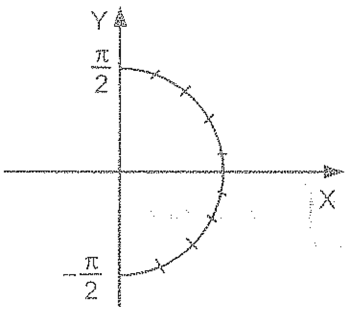
$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}(sen\,2\theta)^{\frac{3}{2}}\,sen\,\theta.d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos z)^{\frac{3}{2}}(\cos z)dz=\frac{3\pi+8}{32} \qquad \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene: $V=\frac{4\pi a^2}{3}\left[2\sqrt{2}.\frac{3\pi+8}{32}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$$\therefore\ V=\frac{\pi^2 a^3}{2\sqrt{2}}u^3$$

(11) Hallar la longitud del arco de la parte de la parábola $r=a\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, cortado de la misma por la recta perpendicular que pasa por el polo.

Solución



Como $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$r^2=a^2\sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right)$ de donde $r=a\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\frac{dr}{d\theta}=a\sec\left(\frac{2\theta}{2}\right).tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

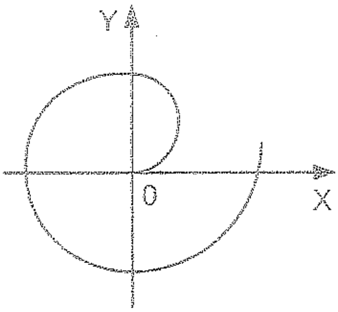
$$L=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$L=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right)+a^2\sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right)tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta$$

$$L=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\sec^3\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=2a\left[\sqrt{a}+\ln(\sqrt{2}+1)\right]$$

(12) Un móvil recorre una pista que sigue la trayectoria de al espiral de Arquímedes.

Solución



$$r=a\theta \Rightarrow \frac{dr}{d\theta}=a$$

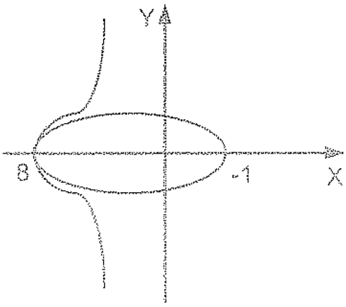
$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\theta^2+a^2}\,d\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$$

$$L=a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2}+\frac{1}{2}\ln|\theta+\sqrt{1+\theta^2}|\right]\Bigg|_0^{2\pi} \quad \therefore L=a\left[\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln|2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}|\right]$$

(13) Hallar la longitud del bucle (Lazo) de la curva polar $r=\sec^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$

Solución



Por simetría se tiene: $L=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

$$r=\sec^3\left(\frac{\theta}{3}\right) \Rightarrow \frac{dr}{d\theta}=\sec^3\left(\frac{\theta}{3}\right).tg\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{\sec^6\left(\frac{\theta}{3}\right)+\sec^6\left(\frac{\theta}{3}\right).tg^2\left(\frac{\theta}{3}\right)}\,d\theta$$

$$L = a\int_0^{\pi} \sec^4\left(\frac{\theta}{3}\right)d\theta = 12\sqrt{3} \qquad \therefore \quad L = 12\sqrt{3}$$

8.13 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Halle los puntos de intersección de las graficas del par de ecuaciones dado:

① $\begin{cases} 2r = 3 \\ r = 3\,sen\,\theta \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2r = 3 \\ r = 1 + \cos\theta \end{cases}$ ③ $\begin{cases} r = 2\cos\theta \\ r = 2\,sen\,\theta \end{cases}$

④ $\begin{cases} r = 2\cos 2\theta \\ r = 2\,sen\,\theta \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} r = \cos\theta - 1 \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$ ⑥ $\begin{cases} r = 4\theta \\ r = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} r = 1 - sen\,\theta \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$ ⑧ $\begin{cases} r^2 = 2\cos\theta \\ r = 1 \end{cases}$ ⑨ $\begin{cases} r = 4\,tg\,\theta.sen\,\theta \\ r = 4\cos\theta \end{cases}$

⑩ $\begin{cases} r\,sen\,\theta = 4 \\ r\cos\theta = 4 \end{cases}$ ⑪ $\begin{cases} r = 2\cos\theta \\ r = 2\sqrt{3}\,sen\,\theta \end{cases}$ ⑫ $\begin{cases} r = tg\,\theta \\ r = 4\,sen\,\theta \end{cases}$

⑬ $\begin{cases} r = 4(1 + sen\,\theta) \\ r(1 - sen\,\theta) = 3 \end{cases}$ ⑭ $\begin{cases} r^2 sen\,2\theta = 8 \\ r\cos\theta = 2 \end{cases}$ ⑮ $\begin{cases} r = 4 \\ r\theta = 4 \end{cases}$

⑯ $\begin{cases} r = sen\,\theta \\ r = sen\,2\theta \end{cases}$ ⑰ $\begin{cases} r = 4\,sen\,\theta\cos^2\theta \\ r = sen\,\theta \end{cases}$ ⑱ $\begin{cases} r = 1 + \cos\theta \\ r = 1 - sen\,\theta \end{cases}$

II. Calcular el área de la región de las curvas que se indican y hacer su grafica.

① r = a cos θ, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$ **Rpta.** $0,37\ a^2\ u^2$

② r = a(1 − cos θ) **Rpta.** $\dfrac{3\pi}{2}a^2u^2$

③ r = 4 cos 2θ **Rpta.** $4\pi\ u^2$

④ r = a cos 5θ **Rpta.** $\dfrac{\pi a^2}{4}u^2$

(5) $r = a\ sen\ 2\theta$ **Rpta.** $\frac{\pi a^2}{2}u^2$

(6) $r = a(1 + 2\ sen\ \theta)$, $\theta = -\frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{7\pi}{6}$ **Rpta.** $2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(7) $r = \cos 3\theta$ **Rpta.** $\frac{\pi}{4}u^2$

(8) $r = b + a\cos\theta$, $(0 < b < a)$ **Rpta.** $\frac{\pi}{2}(a^2 + 2b^2)$

(9) $r = a\cos\theta$ **Rpta.** $\frac{\pi a^2}{2}u^2$

(10) $r^2 = a^2\frac{sen 3\theta}{\cos\theta}$ **Rpta.** $a^2\left(\frac{3}{2} - \ln 2\right)u^2$

(11) $r = 2\ sen\ 3\theta$ **Rpta.** πu^2

(12) $r^2 = 9\,sen 2\theta$ **Rpta.** $9\ u^2$

(13) $r = 4 - 4\cos\theta$ **Rpta.** $24\pi\ u^2$

(14) $r^2 = 4\,sen 2\theta$ **Rpta.** $4u^2$

(15) $r^2 = 2a^2 sen 3\theta$ **Rpta.** $4a^2u^2$

III.

(1) Hallar el área interior a $r = 4\,sen\,\theta\cos^2\theta$ y exterior a $r = sen\ \theta$ **Rpta.** $\frac{\pi}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{8}$

(2) Calcular el área de la región que es interior a la curva $r = 2a\cos 3\theta$ y exterior al circulo $r = a$, $a > 0$ **Rpta.** $\frac{a^2}{6}(2\pi + 3\sqrt{3})u^2$

(3) Hallar el área común a las cardiodes r = a(1 ± cos θ) **Rpta.** $\frac{3\pi-8}{2}a^2u^2$

(4) Hallar el área encerrada por las curvas $r=\frac{a}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ y r = 2a en el intervalo de θ = 0 a $\theta=\frac{\pi}{2}$. **Rpta.** $\frac{a^2}{3}(3\pi-4)u^2$

(5) Calcular el área exterior a la lemniscata $r^2=2a^2\cos 2\theta$ comprendida dentro del circulo r = a. **Rpta.** $\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{3}a^2u^2$

(6) Hallar el área de la región que es interior a la curva r = 3a cos 2θ y exterior a la curva r = a(1 + cos 2θ), a > 0. **Rpta.** $a^2\left(4\pi+\frac{3}{4}\sqrt{15}-6\alpha\right)$

Donde α es tal $\cos 2\alpha=-\frac{1}{4}$

(7) Hallar el área limitada por la curva $r^2=a^2sen 4\theta$ **Rpta.** a^2u^2

(8) Hallar el área limitada por la parábola $r=a\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ y las semirrectas $\theta=\frac{\pi}{4}$ y $\theta=\frac{\pi}{2}$. **Rpta.** $\frac{14-8\sqrt{2}}{3}a^2u^2$

(9) Hallar el área de la región limitada por curva r = 2a cos 3θ que está fuera del circulo r = a. **Rpta.** $\frac{a^2\pi}{2}u^2$

(10) Calcular el área de la superficie obtenida al rotar, alrededor del eje polar, la Lemniscata $r^2=a^2\cos 2\theta$ **Rpta.** $2\pi a^2(2-\sqrt{2})u^2$

(11) Hallar el área de la superficie generada al rotar alrededor de eje X la curva r = a(1 + cos θ), a > 0, 0 ≤ θ ≤ π. **Rpta.** $\frac{32a^2\pi}{5}$

(12) Hallar el área de la superficie generada al rotar la curva $r = 2a\cos\theta$ alrededor del eje X. Rpta. $4a^2\pi$

(13) Hallar el área de la superficie generada al hacer girar la circunferencia $r = 2a \operatorname{sen}\theta$ alrededor del eje $\frac{\pi}{2}$. Rpta. $4a^2\pi^2$

(14) Hallar el área dentro de $r = 8\cos\theta$ y a la derecha de la recta $r = 2\sec\theta$.

Rpta. $\frac{32\pi}{3} + 4\sqrt{3}$

(15) Hallar el área de la región dentro de $r = 10\operatorname{sen}\theta$ y encima de la recta $r = 2\operatorname{cosec}\theta$.

Rpta. $25\pi - 58 + 10\sqrt{5} - 50\,arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

(16) Hallar el área de la región encerrada por las curvas:

a) $r = e^{\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, $r = e^{\frac{\theta}{2}}$, $0 \le \theta \le \pi$ y los rayos $\theta = 2\pi$ y $\theta = 3\pi$.

Rpta. $\frac{(e^{\pi} - 1)^2}{4}$

b) $r = e^{\theta}$, $2\pi \le \theta \le 3\pi$, $r = \theta$, $0 \le \theta \le \pi$ y los rayos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

Rpta. $\frac{1}{12}[3e^{4\pi}(e^{2\pi} - 1)2\pi^3]$

(17) Encontrar el área de la región limitada por la curva.

a) $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2xy(x^2 - y^2)$, $a > 0$ Rpta. a^2

b) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ Rpta. $\pi\sqrt{2}$

IV.

1) Calcular la longitud de la curva $r = a\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Rpta. $a[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$

2) Hallar la longitud del arco de la espiral hiperbólica $r\theta = 1$ desde el punto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ hasta el punto $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Rpta. $\frac{\sqrt{5}}{2} + \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

3) Hallar la longitud del arco de la curva $r = a\,sen^3\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $a > 0$.

Rpta. $\frac{3a\pi}{2}$

4) Hallar la longitud de la curva $r = 2b\ \text{tg}\ \theta\ \text{sen}\ \theta$, $b > 0$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{3}$

Rpta. $2b(\sqrt{7} - 2) + \sqrt{3}\ln\left(\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}\right)$

5) Calcular la longitud del arco de la curva $r = sen^3\left(\frac{\theta}{2}\right)$ comprendida entre $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Rpta. $\frac{1}{8}(2\pi - 3\sqrt{3})$

6) Hallar la longitud del arco de la espiral logarítmica $r = ae^{m\theta}$, $(m > 0)$, que se encuentre dentro del circulo $r = a$.

Rpta. $\frac{a}{m}\sqrt{1+m^2}$

7) Hallar la longitud del arco de la curva $\theta = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$, desde $r = 1$ hasta $r = 3$.

Rpta. $\frac{4+\ln 3}{2}$

(8) Calcular la longitud del arco de la curva $r=\theta^2$, entre $0 \le \theta \le \pi$.

Rpta. $\dfrac{(\pi^2+4)\sqrt{\pi^2+4}-8}{3}$

(9) Calcular la longitud del arco de la curva $r = a\cos^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$, entre $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

Rpta. $\dfrac{a}{8}(2\pi+3\sqrt{3})$

(10) Hallar la longitud del arco de la parte de la parábola $r = a\sec^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, cortada por la recta perpendicular que pasa por el polo. **Rpta.** $2a[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]u$

(11) Calcular la longitud del arco de la curva $r = \operatorname{sen}\theta$ desde $\theta \in [0,2\pi]$.

Rpta. π u

(12) Hallar la longitud de la primera espiral de Arquímedes $r = a\theta$.

Rpta. $a\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\dfrac{a}{2}\ln|\,2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\,|$

(13) Calcular la longitud del arco de la espiral hiperbólica $r\theta = 1$ desde $\theta_1 = \dfrac{3}{4}$ hasta $\theta_2 = \dfrac{4}{3}$ **Rpta.** $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{5}{12}$

(14) Si R es la región exterior a la circunferencia $r = \cos\theta$ e interior a la cardioide $r = 1-\cos\theta$, calcular la longitud de su perímetro. **Rpta.** $4\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3}$.

(15) Calcular la longitud total de la curva $r = a\,sen^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$ **Rpta.** $\dfrac{3a\pi}{2}$

(16) Encontrar la longitud de la espiral logarítmica $r = \frac{a}{\theta}$ desde (r_1, θ_1) hasta (r_2, θ_2).

Rpta. $a \ln \frac{r_1(a+\sqrt{a^2+r_2^2})}{r_2(a+\sqrt{a^2+r_1^2})} + \sqrt{a^2+r_1^2} - \sqrt{a^2+r_2^2}$

(17) Hallar la longitud de $r = 4 - 4\cos\theta$.

V.

(1) Hallar el volumen del sólido obtenido por la rotación alrededor del eje polar de la figura acotada por la cardioide $r = 4 + 4\cos\theta$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Rpta. $160\pi\ u^3$

(2) Hallar el volumen del cuerpo generado por la rotación de la figura limitada por una semi espira de la espiral de Arquímedes $r = a\theta$, desde $a > 0$, $0 \le \theta \le \pi$.

Rpta. $\frac{2a^3\pi^2(\pi^2-6)}{3} u^2$

(3) Hallar el volumen del sólido formado pro rotación alrededor del eje polar de la curva $r = 3\ \text{sen}\ 2\theta$. **Rpta.** $\frac{576}{35}\pi\ u^3$

(4) Hallar el volumen del sólido generado por la rotación de la superficie $a \le r \le a\sqrt{2\,sen\,2\theta}$, $a > 0$ alrededor del eje polar. **Rpta.** $\frac{a^3\pi^2}{2\sqrt{2}} u^3$

(5) Hallar el volumen en coordenadas polares por la curva $r = a\ \text{tg}\ \theta$ al girar alrededor del eje polar y ente los limites $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\theta = 0$. **Rpta.** $\frac{a^3\pi}{2}[6\ln(3+\sqrt{2}) - 7\sqrt{2}]u^3$

APÉNDICE

I. LOGARITMOS.-

$a^x = N, \quad a > 0 \Leftrightarrow \quad x = \log_a N \qquad\qquad x = e^y \quad \Leftrightarrow \quad y = \log_e x = Lnx$

① $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$

② $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

③ $\log_a A^n = n \log_a A$

④ $\log_a \sqrt[n]{A} = \dfrac{1}{n} \log_a A$

⑤ $\log_b N = \log_b a.\log_a N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$ (cambio de base)

II. ECUACIONES CUARTICAS.-

$x^4 + 2px^3 + qx^2 + 2rx + s = 0$, sumando $(ax + b)^2$

$x^4 + 2px^3 + qx^2 + 2rx + s + (ax + b)^2 = (ax + b)^2$

$x^4 + 2px^3 + (a^2 + q)x^2 + 2(r + ab)x + s + b^2 = (ax + b)^2$

$$(x^2 + px + k)^2 = (ax + b)^2$$

$x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2k)x^2 + 2pkx + k^2 = (ax + b)^2$

$$\begin{cases} p^2 + 2k = a^2 + q \\ 2pk = 2(r + ab) \\ k^2 = s + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2pk - 2r = 2ab \\ pk - 4 = ab \end{cases}$$

$$(pk - r)^2 = a^2b^2 \Rightarrow \qquad \begin{cases} a^2 = p^2 + 2k - q \\ b^2 = k^2 - s \end{cases}$$

$(pk - r)^2 = a^2 \cdot b^2 = (p^2 + 2kp - q)(k^2 - s)$

simplificando: $2k^3 - qk^2 + (2pr - 2s)k - p^2 s - r^2 + qs = 0$

Hallando las raíces de k se tiene: $(x^2 + px + k)^2 = (ax + b)^2$

$x^2 + px + k = \pm(ax + b)$ de donde $\begin{cases} x^2 + (p-a)x + k - b = 0 \\ x^2 + (p+a)x + k + b = 0 \end{cases}$

III. ECUACIONES CÚBICAS.-

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ haciendo $x = y - p/3$

se transforma en $y^3 + \left(q - \dfrac{p^2}{3}\right)y + \dfrac{2p^3}{27} - \dfrac{qp}{3} + r = 0$

$$y^3 + Qy + R = 0$$

se hace $y = A + B$

donde: $A^3 = -\dfrac{R}{2} + \sqrt{\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{Q^3}{27}}$, $B^3 = -\dfrac{R}{2} - \sqrt{\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{Q^3}{27}}$

IV. DERIVADAS ELEMENTALES.-

1. $y = f(x) = c \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(x) = 0$

2. $y = kf(x) = c \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = kf'(x)$

3. $y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(x) \pm g(x)$

4. $y = f(x) = x^n \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(x) = nx^{n-1}$

5. $y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

⑥ $$y=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

⑦ $$y=(f(x))^n \Rightarrow \frac{dy}{dx}=n\left(f'(x)\right)^{n-1}.f'(x)$$

V. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y SUS INVERSAS.-

① $$y=\operatorname{sen}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\cos f(x)\cdot f'(x)$$

② $$y=\cos(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\operatorname{sen}(f(x))\cdot f'(x)$$

③ $$y=\operatorname{tg}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sec^2(f(x))\cdot f'(x)$$

④ $$y=\operatorname{ctg}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec}^2(f(x))\cdot f'(x)$$

⑤ $$y=\sec(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sec(f(x)).\operatorname{tg}(f(x))\cdot f'(x)$$

⑥ $$y=\operatorname{cosec}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec}(f(x))\cdot\operatorname{ctg}(f'(x))\cdot f'(x)$$

⑦ $$y=arc.\operatorname{sen}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

⑧ $$y=arc.\cos(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

⑨ $$y=arc.\operatorname{tg}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

⑩ $$y=arc.\operatorname{ctg}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-f'(x)}{1+f^2(x)}$$

(11) $y = arc.\sec(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{|f(x)|\sqrt{f^2(x)-1}}$

(12) $y = arc.\operatorname{cosec}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-f'(x)}{|f(x)|\sqrt{f^2(x)-1}}$

VI. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS.-

(1) $y = \log_a(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\log_a e}{f(x)} \cdot f'(x), \quad a \neq 0,1$

(2) $y = \ln(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

(3) $y = a^{f(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = a^{f(x)} \cdot Ln\ a \cdot f'(x)$

(4) $y = e^{f(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

(5) $y = (f(x))^{g(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = g(x)(f(x))^{g(x)-1} f'(x) + (f(x))^{g(x)} \ln(f(x)) \cdot g'(x)$

VII. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS Y SUS INVERSAS.-

(1) $y = \operatorname{senh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \cosh(f(x)) \cdot f'(x)$

(2) $y = \cosh(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{senh}(f(x)) \cdot f'(x)$

(3) $y = \operatorname{tgh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \sec h^2(f(x)) \cdot f'(x)$

④ $y = \operatorname{ctgh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}h^2(f(x)) \cdot f'(x)$

⑤ $y = \sec h(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\sec h(f(x)) \cdot \operatorname{tgh}(f(x)) \cdot f'(x)$

⑥ $y = \operatorname{cosech}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{cosech}(f(x)) \cdot \operatorname{ctgh}(f(x)) \cdot f'(x)$

⑦ $y = arc.\operatorname{senh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}$

⑧ $y = arc.\cosh(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\pm f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}}$

⑨ $y = arc.\operatorname{tgh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{1-f^2(x)}, \quad -< f(x) < 1$

⑩ $y = arc.\operatorname{ctgh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{1-f^2(x)}, \quad f(x) > 1$

⑪ $y = arc.\sec h(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\pm f'(x)}{f(x)\sqrt{1-f^2(x)}}$

⑫ $y = arc.\operatorname{cosech}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-f'(x)}{|f(x)|\sqrt{1+f^2(x)}}$

VIII. TABLA DE INTEGRALES.-

① $\int a\,dx = ax + c$

② $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

③ $\int d(f(x)) = f(x) + c$

④ $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(5) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

(6) $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

(7) $\int \frac{du}{u} = Ln|u| + c$

(8) $\int e^u\,du = e^u + c$

(9) $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

(10) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\,\text{arctg}\,\frac{u}{a} + c$

(11) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$

(12) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}Ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + c$

(13) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc.\text{sen}(\frac{u}{a}) + c$

(14) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = Ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + c$

(15) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = Ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + c$

(16) $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\,arc.\text{sen}\,\frac{u}{a} + c$

(17) $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\,Ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + c$

(18) $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\,Ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + c$

(19) $\int \text{sen}\,u\,du = -\cos u + c$

(20) $\int \cos u\,du = \text{sen}\,u + c$

(21) $\int \text{tg}\,u\,du = -Ln|\cos u| + c$

(22) $\int \text{ctg}\,u\,du = Ln|\text{sen}\,u| + c$

(23) $\int \sec u\,du = Ln|\sec u + \text{tg}\,u| + c$

(24) $\int \text{cosec}\,u\,du = Ln|\text{cosec}\,u - \text{ctg}\,u| + c$

(25) $\int \sec^2 u du = \operatorname{tg} u + c$

(26) $\int \operatorname{cosec}^2 u du = -\operatorname{ctg} u + c$

(27) $\int \sec u \ \operatorname{tg} u \ du = \sec u + c$

(28) $\int \operatorname{cosec} u . \operatorname{ctg} u \, du = \sec u + c$

(29) $\int \operatorname{senh} u du = \cosh u + c$

(30) $\int \cosh u du = \operatorname{senh} u + c$

(31) $\int \operatorname{tgh} u du = Ln|\cosh u| + c$

(32) $\int \operatorname{ctgh} u du = Ln|\sec hu| + c$

(33) $\int \sec h^2 u du = \operatorname{tgh} u + c$

(34) $\int \operatorname{cosech}^2 u du = -\operatorname{ctgh} u + c$

(35) $\int \sec hu . \operatorname{tgh} u du = -\sec hu + c$

(36) $\int \operatorname{cosech} u . \operatorname{ctgh} u du = -\operatorname{cosech} u + c$

(37) $\int e^{au} \operatorname{sen}(bu) du = e^{au} \frac{(a \operatorname{sen}(bu) - b \cos(bu))}{a^2 + b^2} + c$

(38) $\int e^{au} \cos(bu) du = e^{au} \frac{(a \cos(bu) + b \operatorname{sen}(bu))}{a^2 + b^2} + c$

BIBLIOGRAFIA

1. Calculus Volumen II por: Tom M. Apóstol
2. Análisis Matemático por: Protter Morrey
3. Análisis Matemático Tomo II por: L. D. Kudriavtsev
4. Cálculo con Geometría por: Louis Leithold
5. Cálculo y Geometría Analítica por: Larson – Hostetle
6. Análisis Matemático Volumen II por: Hasser – Lasalle – Sullivan
7. Cálculo de una y Varias Variables con Geometría Analítica por: Saturnino L. Sales, Einar Hile
8. Cálculo con Geometría por: Edwin J. Purcell
9. Cálculo y Geometría Analítica por: Sherman K. Stein
10. Matemática Superior para Ingeniería por: C. R. Wylie J. R.
11. Matemática Superior para matemáticos, físicos e ingenieros Volumen II por: R. Rothe
12. Cálculo Avanzado por: Murray R. Spiegel
13. Cálculo Diferencial e Integral por: Banach
14. Cálculo de Varias Variables en Álgebra Lineal.
15. Cálculo Infinitesimal por: Smith – Longly y Wilson
16. Cálculo con Geometría Analítica por: John B. Fraleich
17. Análisis Matemático por: M. N. Bentebol, J. Margalef

(18) Ejercicios y problemas de matemática superior Tomo II por: P. Danko Popov.

(19) Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático por: B. Demidovich.

(20) Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático por: G. N, Berman

(21) Cálculo Diferencial e Integral Tomo I, II por: N. Piskunov

(22) 5000 problemas de Análisis Matemático por: B. P. Demidovich

(23) Análisis de una Variable Real por: Celso Martínez, Carracedo, Miguel A. Sanz Alix

(24) Cálculo Diferencial e integral por: Granville–Smith – Langley

(25) Cálculo con Geometría Analítica por: R.E. Johnson – F.L. Kiokemeister – E.S. Wolk.

(26) Cálculo por: James Stewart

(27) Calculus Tomo I, II por: Michel Spivak

(28) Problemas de las Matemáticas Superiores I, II por: V. Bolgov, A. Karakulin, R. Shistak

(29) Cálculo Diferencial e Integral por: Yu Takeuchi

(30) Cálculo Infinitesimal con Geometría Analítica por: G.B. Thomas

(31) Cálculo con Geometría Analítica por: Edwards y Penney

(32) Cálculo de una Variable por: Finney – Demana – Waits – Kennedy

(33) Cálculo de una variable por: Claudio Pita Ruiz

(32) Cálculo II por: Alvaro Pinzón

(33) Matemáticas para Administración y Economía por: S.T. Tan

(34) Matemáticas para Administración y Economía por: Ernest F. Haeussler

35. Matemáticas para Administración y Economía por: **Lial Hubmerford**

36. Matemática Aplicada a la Administración y Economía por: **Jagdish Arya, Robin Lardner**

37. Cálculo Aplicado para Administración y Economía por: **Laurence D. Hoffmann**

38. Matemáticas para Administración y Economía por: **Jean E. Weber**

39. Matemáticas Finitas para Economistas y Administración por: **G. Hadley, M.C. Kemp**

40. Métodos Fundamentales de Economía matemática por: **Alpha C. Chiang**

41. Matemática, Aplicaciones a la Ciencias Económica – Administrativas por: **Michael L. Kova Cic**

42. Métodos Matemáticos para Economistas por: **J. Colin Glass**

43. Matemáticas y métodos Cuantitativos, para Comercio y Economía por: **Stephen P. Shao; Cristina Rodríguez**

44. Matemáticas Aplicadas para Economía y Negocios por: **Gerald Alan Beer**

45. Matemáticas para Administración y Economía por: **Jean E. Draper, Jane S. Klingman**

46. Matemáticas para Economistas por: **Taro Yamane**

47. Matemáticas para el Análisis Económico por: **Knut Sydsaeter, Peter J. Hammond**

PEDIDOS AL POR MAYOR Y MENOR

AV. GERARDO UNGER Nº 247 OF. 202

Urbanización Ingeniería (Frente a la UNI)

Teléfono: 382 – 4990 ☎ 99853 – 3465

Email. ventas@edukperu.com

Web: www.edukperu.com

LIMA – PERU

IMPRESO EN:

EDITORIAL EDUKPERU E.I.R.L.